This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

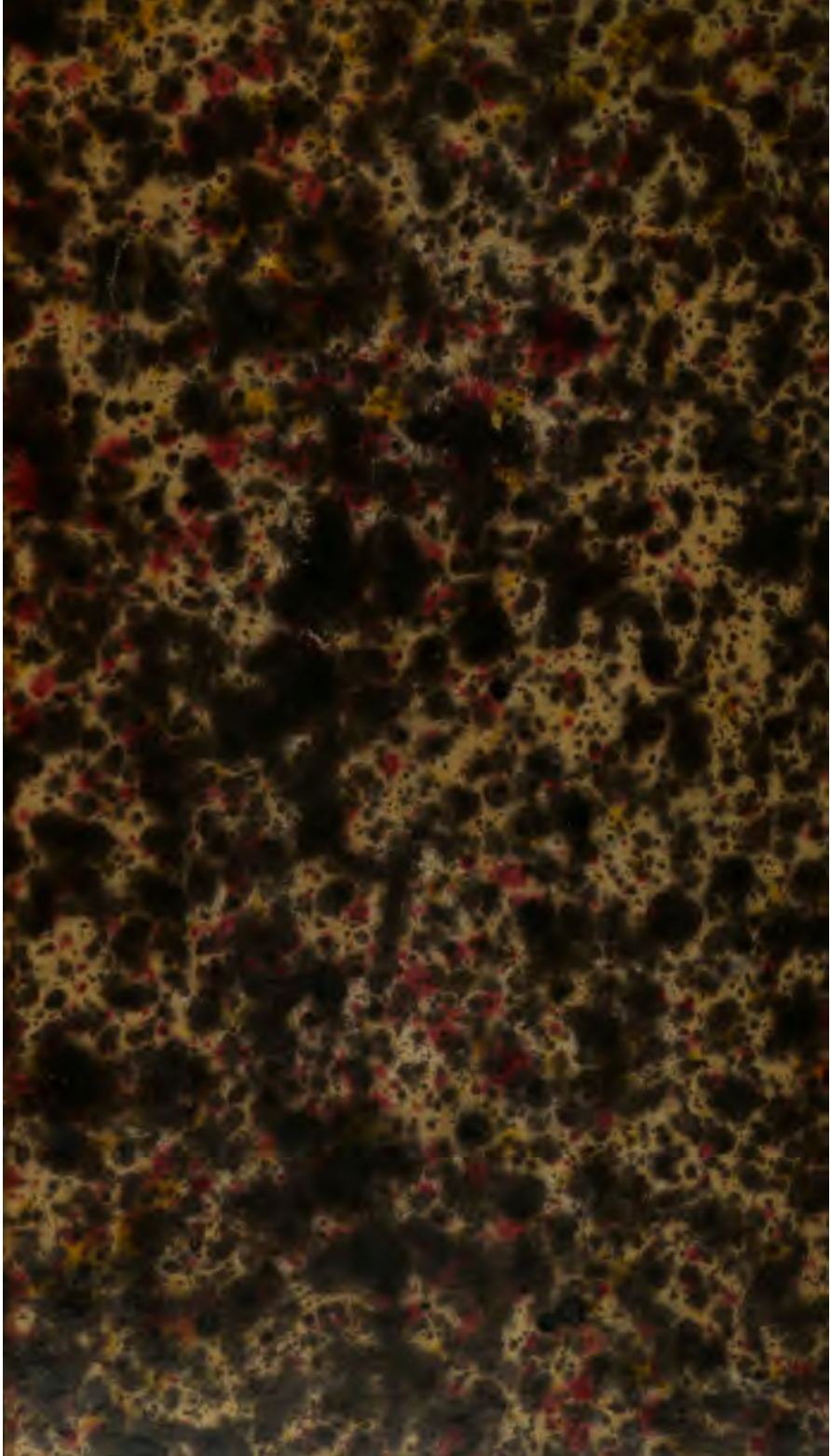
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



sub
CLEMENS FRIEDRICH MEYER.
Wissenschaften und fremde Sprachen.
№ 88.
Palma
pondere
crescit.

L Soc 3983.55

R. 4964.

HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

d° 602

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

TIRÉS DU

BULLETIN PHYSICO-MATHÉMATIQUE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

Tome I.

(1849—1853.)

Avec 6 planches.

St.-Pétersbourg.
Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.
1853.

Se vend chez MM. *Eggers* et *Comp.*, libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky, № 12, et à Leipzic, chez M. *Léopold Voss.*

Prix: 2 Rbl. 70 Cop. arg. — 3 Thlr.

L Soc 3983.55

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEGRAND FUND
Sept. 23, 1925
(7 vols.)

TABLE DES MATIÈRES.

MATHÉMATIQUES.

Bounïakovsky. Page.

Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la géométrie élémentaire. (Avec 1 planche.).158—171

Note sur le maximum du nombre des positions d'équilibre d'un prisme triangulaire homogène, plongé dans un fluide.....347—358

Note sur l'emploi des procédés élémentaires du calcul intégral dans des questions relatives à l'analyse de Diophante ...489—501

Clausen.

Ueber den Werth des Kettenbruchs

$$\cfrac{a+b}{a+1+\cfrac{b+1}{a+2+\cfrac{b+2}{a+3+\text{etc.}}}}$$

wenn b grösser als $a+1$ ist.....271—278

Ostrogradsky.

Sur les racines égales des polynomes entiers..... 85—100

Note sur son traité de trigonométrie à l'usage des écoles militaires.....309—312

Sur les dérivées des fonctions algébriques .....557—563

Paucker.

Zur Theorie der kleinsten Quadrate.....188—204, 333—346, 433—439

Somov.

Note sur la rectification graphique de l'ellipse. (Avec une planche.) .....172—176

Démonstration de quelques formules elliptiques de C. G. J. Jacobi.....359—369

Tchébychev. Page.

Lettre à M. Fuss, sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers, contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$. 543—544

MECANIQUE ANALYTIQUE.

Braschmann.

Note sur le mouvement du pendule simple. . . . . 370—376

Clausen.

Ueber die Form architectonischer Säulen. . . . . 279—294

Ueber den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben. . . . . 313—332

Minding.

Auflösung einer Aufgabe aus der *Mécanique analytique* von Lagrange. . . . . 580—592

Ostrogradsky.

Sur les intégrales des équations générales de la dynamique. . 8— 22

ASTRONOMIE.

Clausen.

Ueber die Olbers'sche Methode Cometen zu berechnen. . . . . 406—407

Fedorenko.

Ueber die Doppelsterne No. 1263 und 1516 des Dorpater Catalogs. . . . . 177—187

Voir aussi W. Struve.

Lassel.

Nouvelles observations de Saturne. Lettre à M. O. Struve. (Avec une planche.). . . . . 536—542

Pérévostchikov.

О предварении равноденствій. . . . . 377—405

Peters.

Ueber Bessels Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni, aus Beobachtungen am Heliometer der Königsberger Sternwarte. . . . . 23— 41

Savitch. Page.

Mémoire sur la détermination de l'orbite d'un satellite autour de sa planète. Extrait.....477—488

Schweizer.

Ueber die Bahn des im August 1847 in Moskau entdeckten Cometen..... 52— 58

O. Struve.

Note sur la comète découverte par M. Schweizer..... 42— 43

Nouvelle détermination de la parallaxe de l'étoile Groombridge 1830.....101—103

Evaluation de la masse de Neptune, d'après les mesures micrométriques, exécutées au grand réfracteur de l'Observatoire de Poulkova.....205—213

Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 28 (16) Juli 1851 in Lomza. (Mit zwei Tafeln.).....295—308

Observations de la comète de Faye, faites à Poulkova, en 1851.440—448

Premiers éléments de la comète découverte par M. Schweizer le 8 Mars 1853..... .....554—556

Addition à la lettre de M. Lassel, voir ce nom.

W. Struve.

Fedorenko. Catalogue des étoiles circumpolaires, composé d'après les observations de Lalande etc. etc. réduit à l'époque de 1790. Rapport de M. W. Struve.....564—567

Yvon Villarceau.

Sur les étoiles doubles. 1ère Note..... 1— 7

2de Note..... 59— 67

3ème Note..... 68— 71

4ème Note.....568—579

Lettre sur le mouvement des étoiles doubles..... 72— 85

GÉODÉSIE.

—

Döllen.

Bestimmung der Höhe über dem Meere für einige in der Umgegend von Pawlofsk gelegene, in geologischer Beziehung wichtige Punkte.....104—113

Lindhagen.

Bericht über die im Sommer 1850 ausgeführte Expedition nach dem norwegischen Finnmarken.....225—257

Page.

Bericht über die im Sommer 1851 in Angelegenheiten der Gradmessung unternommene Reise nach Lappland.....449—476

Minding.

Ueber einige Grundformeln der Geodäsie..... 44— 51

Paucker.

Das astronomische Längenmaass.....408—432
Die Gestalt der Erde.....609—648

Prasmovsky.

Rapport sur les travaux de l'expédition de Bessarabie, entreprise en 1852, pour terminer les opérations de la mesure de l'arc du méridien.....593—608

W. Struve.

Résultats des opérations géodésiques de MM. G. Fuss, Savitch et Sabler, exécutées en 1836 et 1837, dans la province cis-caucasienne.....114—157
Sur la jonction des opérations astronomico-géodésiques exécutées par ordre des gouvernements russe et autrichien.502—534

GÉOGRAPHIE.

Middendorff.

Einige Geleitszeilen zu dem beifolgenden Entwurfe des Weges zwischen Kola und Kandalakscha. (Mit einer Karte.).545—553

HISTOIRE LITTÉRAIRE.

P. H. Fuss.

Supplément à son rapport relatif à la succession littéraire de Léonard Euler.....258—270

W. Struve.

H. C. Schumacher, eine biographische Skizze.....215—224

Avertissement.

Le Bulletin scientifique de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg, fondé en 1836, a été dès 1842, partagé en deux Recueils divers, selon les spécialités représentées par les deux anciennes Classes de l'Académie des sciences. Dans le but de rendre les articles de ce journal plus accessibles aux divers genres de lecteurs, on a cru devoir en spécialiser encore davantage le contenu, tout en laissant subsister l'ancien ordre des choses. A cet effet, on tirera de chaque article un certain nombre d'exemplaires in 8-vo, et on en formera, selon les sciences, six recueils divers, qui paraîtront par livraisons, sous les titres suivants:

1. *Mélanges mathématiques et astronomiques.*
2. *Mélanges physiques et chimiques.*
3. *Mélanges biologiques.*
4. *Mélanges russes.*
5. *Mélanges asiatiques.*
6. *Mélanges gréco-romains.*

Quarante à quarante cinq feuilles de chacun de ces recueils formeront un volume qui sera muni d'un frontispice et d'une table des matières convenable. Cependant les livraisons seront mises en vente isolément et sans obliger les acheteurs de payer le volume entier.

En Janvier 1850.

CONTENU.

Pag.

Yvon Villarceau. Étoiles doubles. 1ère Note 1

Ostrogradsky. Sur les intégrales des équations générales de la Dynamique. 8

C. A. F. Peters. Ueber Bessel's Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni aus Beobachtungen am Heliomether der Königsberger Sternwarte. 23

O. Struve. Note sur la comète découverte par M. Schweizer . . 42

Ferdinand Minding. Ueber einige Grundformeln der Geodäsie 44

Gottfr. Schweizer. Ueber die Bahn des im August 1847 in Moskau entdeckten Kometen. 52

Yvon Villarceau. Étoiles doubles. 2de Note. 59

Le même. Troisième Note sur les Étoiles doubles 68

Le même. Lettre à M. O. Struve 72

Ostrogradsky. Sur les racines égales des polynomes entiers . 85

$\frac{2}{14}$ Mars 1849.

Étoiles doubles. 1ère note. Par M. YVON VILLARCEAU.

Depuis la découverte du mouvement de révolution dans les étoiles multiples par William Herschel, d'immenses travaux d'observation ont été entrepris dans le but d'en compléter le dénombrement et de recueillir la suite des positions relatives des étoiles de chaque système. Ces recherches n'ont été poursuivies avec régularité que depuis 1818 environ; l'on doit les plus importants résultats obtenus, au zèle et à l'habileté de MM. Struve et Sir John Herschel. Les nouvelles observations apportèrent de nouvelles confirmations aux vues de William Herschel sur le mouvement de révolution des étoiles doubles, et dix années s'étaient à peine écoulées, qu'un membre de l'Académie des sciences (de Paris), entreprit d'appliquer à ces astres, la théorie du mouvement elliptique, et de montrer qu'une loi unique, celle de la pesanteur, régit le mouvement des étoiles doubles et celui des planètes de notre système. Dans ce but, Savary, sur la sollicitation de M. Arago, fit l'application de ses formules à l'étoile ξ de la grande Ourse. Mais, telles sont les difficultés dont les plus légères erreurs des observations entourent le problème, que Savary n'osa présenter ses résultats que comme un exemple de calcul. Les éléments qu'il a donnés de l'orbite de cette étoile, peuvent, dit-il, être fort loin de leurs valeurs véritables. D'ailleurs, il commence ses calculs en partant de données auxquelles il n'attribue *aucune réalité*, et les termine en disant que ces données

sont *à peu près* quatre observations de l'étoile double ξ de la grande Ourse, sauf deux distances déduites du mouvement angulaire. Disons en passant que la plus grande difficulté du travail de Savary, s'est peut-être rencontrée dans le passage des observations aux données en question. M. Encke a fait également l'application d'une méthode de son invention à l'étoile *p* d'Ophiuchus; et depuis lors, divers astronomes se sont occupés en Angleterre et en Allemagne du calcul des orbites des étoiles doubles.

On conçoit que la précision des résultats dépend, non seulement de l'exactitude des observations, mais aussi de l'amplitude du déplacement observé. Désirant produire des résultats utiles à la science en appliquant les formules que j'ai eu l'honneur de déposer, à de nouvelles méthodes que j'exposerai plus tard, j'ai demandé à MM. Struve et obtenu de leur libéralité scientifique à laquelle je m'empresse de rendre hommage, la communication de plusieurs séries d'observations précieuses, encore inédites, faisant suite au grand ouvrage de M. Struve et à l'*Additamentum*, et comprenant l'année 1847. Aujourd'hui, je viens présenter à l'Académie le premier extrait d'un long travail que j'ai entrepris sur les étoiles doubles. Il est relatif au système binaire ζ d'Hercule (2084 Struve), dont la position est $R = 16^h\ 34'',8$; $D = +31^\circ\ 55'$, et qui se compose de deux étoiles dont l'une de 3ème grandeur est de couleur *subflava*, et l'autre de 6 à 7 est *subrubra* (Struve).

C'est cette étoile double qui excita à un si haut degré l'attention de W. Herschel, lui présentant un phénomène entièrement nouveau en astronomie, celui d'une occultation d'une étoile fixe par une autre. W. Herschel la vit double en 1782 et mesura l'angle de position. En 1795, il trouva qu'il était difficile d'apercevoir la petite étoile; cependant, en octobre de la même année, il la vit franchement double, avec un grossissement de 460 fois, et il indiqua le quadrant dans lequel elle était située. Ce ne fut ensuite qu'en 1802 et 1803 qu'Herschel reprit les observations de ζ d'Hercule; et tantôt il croyait apercevoir la petite étoile, tantôt il constatait seulement une déformation de l'étoile principale. Il en conclut que

la direction du mouvement relatif n'est pas tout à fait centrale, et présume que le disque de l'étoile principale restera déformé pendant tout le temps de la conjonction. Nous ne suivrons point Herschel dans la discussion à laquelle il se livre à ce sujet, et nous passerons aux observations que M. Struve a consignées dans son grand ouvrage (Mesures micrométriques des étoiles doubles etc.). Laissons parler ce dernier.

«Le même phénomène, dit-il, après avoir cité les observations de W. Herschel, s'est pleinement présenté à nous, de 1826 à 1834. J'ai vu sans difficulté les deux étoiles en 1826. Pendant l'année 1828, il était déjà difficile de les séparer; en 1829 et 1831, je n'ai point aperçu le compagnon. En 1832, j'ai cru observer une apparence du compagnon; enfin, en 1834, le compagnon s'est offert à mes regards dégagé des rayons de l'étoile principale, et de l'autre côté qu'en 1826. Ainsi, j'ai constaté, sans hésitation, ce phénomène qui se présentait inattendu. En effet, d'après le récit d'Herschel I, j'avais supposé le mouvement beaucoup plus lent. C'est pourquoi je ne m'expliquais nullement *cur comitem, antea visam, annis* 1828 *et* 1832 *difficilius et mox omnino non viderem.* Grande fut ma surprise, lorsque le 15 juin 1834, je vis nettement (je ne me souviens pas avoir jamais vu d'images d'une telle précision), le compagnon presque sur la même ligne que huit ans auparavant, autant que ma mémoire pouvait me le rappeler. Je songeais à la variabilité de la lumière du compagnon. Mais, quelle fut ma joie en transcrivant cette observation de mon journal sur le registre des étoiles multiples, lorsque je remarquai que le compagnon se trouvait bien à peu près sur la même ligne, mais dans la direction opposée: de là, l'explication des circonstances qui m'avaient tant de fois embarrassé (*reraverant*) pendant l'espace de 8 années. Il ne me paraît pas y avoir aucun doute que j'aie effectivement observé le compagnon en 1832,75, quoique la distance 0″,81 surpasse probablement la véritable, qui pouvait à peine excéder elle-même 0″,5, vu qu'en 1833, la petite étoile m'échappa de nouveau.» Après une courte comparaison des observations faites jusqu'en 1834, M. Struve ajoute: «Mais ces observations qui

embrassent un intervalle de 52 ans, ne suffisent pas pour qu'on en puisse conclure avec quelque certitude, la durée de la révolution. On pourrait faire l'hypothèse d'une durée de 14 ans, de sorte qu'il se serait accompli une révolution de 1782 à 1795, et que deux autres aient eu lieu de 1795 à 1826. Il faut remarquer qu'il s'est écoulé $28 = 2 \times 14$ ans, entre la disparition observée par Herschel et celle que nous avons observée nous même. *Etenim quo minus tempus revolutionis* 28 *annorum assumamus, positio comitis a Herschelio* 1795 *primo quadranti assignata pugnat.* Mais j'avoue volontiers qu'il convient de suspendre son jugement et d'attendre des observations ultérieures instituées avec le plus grand soin et au moyen des meilleurs instruments.»

MM. Struve ont continué depuis, la série des observations de l'intéressante étoile qui nous occupe, et ce sont leurs observations, jointes à l'angle de position obtenu par Herschel en 1782, qui ont servi de base aux calculs dont nous présentons seulement les résultats en ce moment.

Les erreurs qui affectent les mesures de distance, si difficiles à obtenir lorsqu'elles sont de $1''$ environ ou au dessous, ne paraissent pas excéder ici $0''{,}10$ à $0''{,}12$, néanmoins, ces erreurs nous ont paru trop considérables pour introduire avantageusement les distances, dans la détermination d'une première valeur approchée des éléments de l'orbite. Nous avons dû recourir à une méthode différente de celle que nous avons présentée, et propre à fournir les inconnues du problème autres que le demi grand axe, en partant des seuls angles de position. Les éléments que nous avons obtenus représentent bien les angles de position, mais ils laissent dans les distances des erreurs progressives comprises entre $+ 0''{,}14$ et $- 0''{,}18$. Celles-ci dépassant notablement la limite des erreurs des observations modernes, il convenait d'essayer de les atténuer par une correction des éléments. Nous allons présenter ici, en même temps, les deux systèmes que nous avons obtenus; puis les positions observées et le résultat de leur comparaison avec celles déduites des éléments. (Voir le tableau annexé).

A pag. 4: *Mélanges mathém. et astron.*

Éléments de l'orbite relative de ζ d'Hercule.			1ère Approximation.			Corrigés.					
1835 . 45	196, 90	1, 094	1000	5	le même.	— 2, 46	— 0, 047	+ 0, 001	— 2, 06	— 0, 037	— 0, 048
1836 . 60	186, 20	1, 090	920	5	W.etO.Str.	— 0, 74	— 0, 015	+ 0, 053	— 1, 39	— 0, 027	+ 0, 011
1837 . 47	175, 47	1, 097	—	4	voir Add.	+ 3, 57	+ 0, 072	+ 0, 064	+ 2, 32	+ 0, 046	+ 0, 033
1838 . 44	168, 65	1, 030	—	4	le même.	+ 3, 39	+ 0, 069	+ 0, 141	+ 1, 67	+ 0, 034	+ 0, 126
1839 . 67	160, 40	1, 165	—	1	le même.	+ 2, 85	+ 0, 058	+ 0, 008	+ 0, 84	+ 0, 017	+ 0, 015
1840 . 66	159, 92	1, 293	858	4	W.etO.Str.	— 3, 74	— 0, 076	— 0, 182	— 5, 72	— 0, 119	— 0, 095
1841 . 60	149, 00	1, 253	858	3	O. Struve.	+ 0, 43	+ 0, 009	— 0, 084	— 1, 32	— 0, 028	— 0, 040
1842 . 64	144, 83	1, 247	858	3	le même.	— 2, 88	— 0, 059	— 0, 078	— 4, 18	— 0, 090	— 0, 017
1845 . 27	119, 06	1, 248	982	5	le même.	+ 4, 23	+ 0, 088	— 0, 059	+ 4, 75	+ 0, 106	+ 0, 031
1847 . 18	108, 40	1, 410	858	4	le même.	+ 1, 98	+ 0, 042	— 0, 185	+ 4, 02	+ 0, 093	— 0, 090

*) En 1782 . 55 la distance n'a pas été observée; celle calculée, par les éléments corrigés est 1″,429.

**) La position de 1828 . 735 est la moyenne de 2 observations que M. Struve a trouvées peu sûres; il ne les a point comprises dans son tableau des positions moyennes. Nous n'avons point fait usage de cette position dans notre première approximation.

Les éléments corrigés représentent mieux les distances que les premiers; mais on doit remarquer que les angles de position sont moins bien représentés que dans la première approximation. On pouvait s'y attendre. La discordance de quelques observations montre que les erreurs de nos éléments corrigés, n'excèdent point celles des observations elles mêmes; ainsi il est manifeste que l'angle de position décrit de 1836 à 1840 est en erreur de 6°,5 environ ou en arc 0″,12 à 0″,13. Pareillement les distances de 1838 et 1840 discordent entre elles de 0″,20 à 0″,21 et peuvent être considérées comme affectées d'erreurs à peu près moitié moindres et de sens contraires. Un court examen des chiffres que nous venons de présenter, suffit pour montrer le degré d'incertitude qui peut encore affecter nos résultats, et la nécessité d'attendre de nouvelles observations pour en obtenir de plus précis.

S'il est exact de dire que nos éléments représentent les observations accompagnées de mesures, et concordent, ainsi qu'on le verra tout à l'heure, avec les indications fournies par M. Struve à l'époque de la conjonction qu'il a observée; il faut avouer qu'il n'en est pas de même à l'égard des indications fournies par W. Herschel dans une circonstance du même genre. Pour mettre ceci en évidence, nous allons donner les positions assignées par nos éléments corrigés, aux époques de ces observations.

Dates.	Angles de position calculés.	Distances calculées.	
1793 . 740	299°,39	0″,504	Périhélie apparent.
1795 . 76	237°,64	0″,712	
1802 . 6	166°,67	1″,167	
1803 , 274	161°,75	1″,180	
1829 . 74	313°,12	0″,514	
1830 . 097	299°,16	0″,504	Périhélie apparent.
1831 . 65	247°,58	0″,644	. . . . .

Suivant nous, le passage au périhélie apparent aurait eu lieu en 1793, 74. Herschel après ses observations de

1795, 1802 et 1803, présume que le disque de l'étoile principale, restera déformé pendant toute la durée de la conjonction qu'il suppose donc postérieure à 1803. En 1795, W. Herschel, sans pouvoir prendre aucune mesure, assigne néanmoins pour le lieu de la petite étoile, le premier quadrant, tandis que nous la plaçons à cette époque dans le quadrant opposé. La distance étant alors 0″,7, les deux étoiles n'auront-elles pas pu se confondre pour l'observateur, et celui-ci, n'aurait-il pas pris pour la petite étoile, une fausse image, s'il n'existe d'ailleurs aucune erreur de rédaction ou de transcription de l'observation? En 1802 et 1803, les distances 1″,17 et 1″,18 étant encore faibles, sans avoir varié sensiblement; Herschel qui trouvait toujours le disque de l'étoile principale un peu déformé, a pu croire que le passage au périhélie n'avait pas encore eu lieu. Il est à regretter qu'il n'ait pas suivi ζ d'Hercule depuis cette époque.

Quand aux indications fournies par M. Struve, elles se bornent à ce qu'en 1829 et 1831, époques antérieure et postérieure à celle du passage au périhélie apparent, il n'a pu voir la petite étoile. Les distances 0″,51 et 0″,61 jointes à l'éclat de l'étoile principale, expliquent suffisamment ces circonstances.

Nous soumettons les faits qui précèdent à l'appréciation des astronomes et principalement à l'illustre fils (Sir J. Herschel) du grand observateur auquel nous devons la découverte du mouvement des étoiles doubles. La connaissance qu'il possède des moyens d'observation dont se servait son père, et la possibilité de consulter ses notes manuscrites, le mettront probablement à même d'éclaircir les faits que nous venons de signaler, s'ils lui paraissent dignes de quelqu'intérêt.

Nous terminerons cette note, en montrant, par un exemple que nous a présenté l'orbite dont nous nous occupons, combien l'indétermination des éléments peut-être considérable, lorsque les observations n'embrassent pas un assez long espace de temps, ou ne sont pas convenablement reparties sur la trajectoire apparente. Nous avons trouvé que si l'on ne cherche à représenter que les douze observations comprises de 1828 à 1847, et embrassant plus de la moitié de la durée de la re-

volution, on peut y satisfaire au moyen de systèmes d'éléments dans lesquels l'excentricité varie de 0,44 à 1,63; l'orbite d'elliptique devenant hyperbolique, et la durée de la révolution croissant jusqu'à l'infini, pour devenir imaginaire ensuite. Les autres éléments subissent des variations correspondantes, mais moins prononcées. Encore n'avons-nous pas la prétention de donner ici les limites hors desquelles les 12 observations ci-dessus cesseraient d'être représentées.

Paris, le 1 février 1849.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No. 2.*)

$\frac{6}{18}$ Octobre 1848.

Sur les intégrales des équations générales de la Dynamique; par M. OSTROGRADSKY.

Les équations du mouvement dérivent de la définition géométrique du système que l'on considère et du principe général et purement dynamique des moments.

On possède la définition du système, quand on en connaît tous les déplacements virtuels ou possibles, c'est-à-dire tous ceux dont le système est capable à chaque instant. Ayant ces déplacements, on en connaîtra, en même temps, tous les autres, savoir : ceux que le système ne saurait acquérir, parce qu'ils sont contraires à sa nature, ou bien, parce que des obstacles extérieurs empêchent qu'ils puissent avoir lieu. Les mouvements dont il s'agit s'appellent impossibles; en les réunissant aux mouvements virtuels, on aura tous les déplacements instantanés que l'on peut concevoir dans le système.

On distingue les déplacements instantanés virtuels des déplacements instantanés impossibles, par des conditions que les premiers remplissent, et auxquelles les seconds ne satisfont point. Les conditions dont nous parlons sont des relations, équations ou inégalités, linéaires, entre les projections des déplacements virtuels, sur certaines directions désignées dans chaque cas particulier, mais qu'on ne saurait indiquer en général pour nn usystème quelconque. Tout déplacement qui satisfait à ces équations et à ces inégalités, est virtuel; au contraire, celui qui n'y satisfait pas, est impossible. Or, la connaissance des déplacements virtuels et, par suite, celle des déplacements impossibles, entraînant, comme nous l'avons dit tout-à-l'heure, la définition géométrique du système, on dit

que celui-ci est donné ou défini par ces mêmes relations qui en font distinguer les déplacements virtuels de ceux qui ne le sont pas.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait réduit à zéro les secondes parties des relations, c'est-à-dire des équations et des inégalités dont il est question; leurs premières parties seront fonctions des *coordonnées du système*, du temps et de leurs différentielles, ou des variations du premier ordre. Les dernières, différentielles ou variations, y remplaceront les déplacements des points du système, et, comme ces déplacements, elles n'y seront jamais que sous la forme linéaire. Ainsi, en désignant par

$$t, x, y, z, \ldots$$

le temps et les coordonnées quelconques qui fixent, à chaque instant, la position du système, nous aurons pour sa définition géométrique certain nombre de formules, comme celles-ci

$$(1) \qquad T dt + A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \ldots,$$

dont quelques-unes auront zéro pour valeur, d'autres seront plus grandes et d'autres enfin plus petites que zéro; mais aucune n'excluant la valeur zéro, et ne pouvant être tantôt plus grande, tantôt plus petite que zéro. Toute formule qui ne remplissant pas la dernière condition, pourrait acquérir des valeurs positives et négatives, ne gênerait en rien le système.

Les quantités

$$T, A, B, C, \ldots$$

sont fonctions connues, dans chaque cas particulier, du temps et des coordonnées, et les variations

$$dt, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$$

représentent, la première, l'élément du temps, et les autres les différentielles du premier ordre des coordonnées, — différentielles relatives à tout déplacement instantané que l'on puisse imaginer dans le système. Comme les déplacements auxquels elles répondent, les différentielles dont il s'agit ne sont limitées que par leur petitesse excessive, du même ordre que dt; mais, du reste, elles sont absolument arbitraires. Quand elles

satisfont à la définition du système, elles se rapportent alors aux déplacements virtuels, et elles appartiennent aux déplacements impossibles dans le cas contraire.

Pour plus d'uniformité et pour fixer les idées, il convient de changer le signe de chaque formule capable de valeurs négatives, dans la définition du système; en sorte que, si l'on avait par exemple

$$(1) \qquad Tdt + A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z \ldots < 0,$$

on prendrait

$$- Tdt - A\Delta x - B\Delta y - C\Delta z - \ldots > 0.$$

Des changements semblables n'altèrent en rien la nature du système et sont visiblement permis. De cette manière le système ne sera défini que par des équations et des inégalités aux secondes parties positives. Soient, pour abréger,

$$(2) \qquad \Delta L > 0, \quad \Delta M > 0, \quad \Delta N > 0, \ldots$$

les formules relatives à cette définition, dont quelques-unes peuvent être des équations, et dont aucune n'exclut l'égalité. Les différentielles

$$\Delta L, \ \Delta M, \ \Delta N, \ldots$$

sont des expressions semblables à celle qui est marquée du no. (1).

Le déplacement actuel du système est, sans doute, compris parmi ses déplacements possibles, et, par conséquent, il doit satisfaire aux conditions (2); ainsi, en désignant par

$$dx, \ dy, \ dz, \ldots$$

les différentielles, relatives au temps, des coordonnées x, y, z, ... et changeant la caractéristique des variations Δ en caractéristique différentielle d, nous aurons les inégalités

$$dL > 0, \quad dM > 0, \quad dN > 0, \ldots$$

qui non seulement peuvent être des équations, mais elles le seront nécessairement, d'après une discussion établie ailleurs[1]).

[1]) Voyez « Sur les déplacements des systèmes aux conditions

En effet, nous y avons prouvé que toute inégalité, comprise parmi les (2), qui ne devienne pas équation, quand on passe des déplacements virtuels au déplacement effectif, peut être supprimée comme ne gênant pas le système, ou plutôt, comme se rapportant à une liaison qui n'en empêche en rien le mouvement. On affranchira donc le système de semblables liaisons, et, par conséquent, des conditions qui s'y rapportent. Il en sera de ces conditions comme des fonctions linéaires des différentielles

$$dt,\ dx,\ dy,\ dz,\ \ldots.$$

fonctions prises en dehors de la question, et ayant des valeurs positives; elles resteraient, sans doute, positives pendant un certain intervalle de temps; mais leur considération serait entièrement étrangère à la question.

De cette manière, les équations du mouvement qui dérivent de la définition du système seront les mêmes, soit que cette définition ne s'exprime que par des équations, soit qu'elle dépend aussi des inégalités. A cela près pourtant que, dans le dernier cas, quelques unes des équations du mouvement peuvent disparaître soit les unes après les autres, soit simultanément, comme elles peuvent aussi reparaître après une absence d'une certaine durée. Donc, en ne considérant le système que pendant l'intervalle de temps, ou aucune équation ne disparaît et ne reparaît, nous aurons pour toute la durée de cet intervalle

$$(3) \qquad dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots$$

La durée dont il s'agit sera celle du mouvement total, si la définition du système ne dépendait que des équations; mais il en sera autrement dans le cas contraire, c'est-à-dire, quand la définition du système comporterait des inégalités. Alors, à différentes époques, quelques-unes des équations (3) pourraient disparaître, d'autres reviendraient pour assujettir les systèmes, et, par suite, la durée en question sera l'intervalle de temps compris entre deux époques consécutives dont il vient d'être question. Pendant cet intervalle la définition du système fournira les mêmes équations

---

variables" dans les Mémoires de l'Académie des sciences, Tome II, pag. 389.

$$dL = 0,\quad dM = 0,\quad dN = 0,\ldots$$

que si elle ne renfermait point d'inégalités.

2. Les équations (3) seront, généralement, insuffisantes pour déterminer le mouvement du système; on trouvera celles qui manquent par le principe des moments. Mais avant d'en parler, distinguons deux cas qui peuvent avoir lieu. Ou toutes les premières parties des équations (3), soit chacune en particulier soit les unes à l'aide des autres, seront des différentielles exactes, ou il y en aura qui ne rempliront pas les conditions d'intégrabilité, quelles combinaisons qu'on en fasse. Nous ne considérons, dans ce qui va suivre, que le cas le plus simple qui est le premier. Ce qui reviendra à supposer que les quantités

$$L,\ M,\ N,\ldots$$

ou leurs certaines combinaisons, en même nombre que ces quantités elles-mêmes, seront fonctions finies du temps t et des coordonnées x, y, z,... Ainsi, par la nature du système et par celle des obstacles extérieurs, il y aura des fonctions, que nous continuerons à désigner par

$$L,\ M,\ N,\ldots.$$

qui, satisfaisant aux équations

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ldots,$$

ne varieront pas avec le temps. Appelons en A, B, C,.... les valeurs relatives à un instant donné quelconque de l'intervalle du temps que nous considérons, intervalle pour lequel subsistent toutes les équations (3) et aucune autre. Nous aurons

$$L = A,\ M = B,\ N = C,\ldots.$$

Si donc nous désignons les différences

$$L - A,\ M - B,\ N - C,\ldots$$

respectivement par

$$L,\ M,\ N,\ldots.$$

les nouvelles quantités L, M, N,... satisferont évidemment aux équations

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots$$

et à celles-ci

$$(4) \qquad L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ \ldots$$

Les quantités L, M, N, ... étant fonctions des variables t, x, y, z, ... les équations précédentes établiront des relations entre ces variables, et pourront servir pour en trouver les valeurs de quelques-unes en fonctions des autres et du temps. Mais pour plus de commodité et de symétrie, il convient d'introduire d'autres inconnues

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,$$

fonctions, convenablement choisies dans chaque cas particulier, des mêmes variables t, x, y, z, ... et en nombre suffisant pour déterminer, à l'aide des équations

$$f_1(t, x, y, z, \ldots) = \xi_1,\ f_2(t, x, y, z, \ldots) = \xi_2,\ f_3(t, x, y, z, \ldots) = \xi_3, \ldots$$
$$\varphi(t, x, y, z, \ldots) = L,\ \psi(t, x, y, z, \ldots) = M,\ \chi(t, x, y, z, \ldots) = N, \ldots$$

toutes les coordonnées x, y, z, ... en fonctions du temps, des ξ_1, ξ_2, ξ_3, et des quantités L, M, N, ... ou plutôt, à cause que ces dernières quantités sont zéro, en fonctions du temps et des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... Les fonctions dont il s'agit seront connues, en sorte qu'il ne restera qu'à déterminer les quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... Or, la considération des moments fournira les équations nécessaires pour cette détermination, mais nous ne ferons que citer ces équations, en renvoyant pour leur démonstration aux traités de dynamique.

Nous nous servirons de la caractéristique δ pour représenter une différentielle ou une variation relative à des changements

$$\delta\xi_1,\ \delta\xi_2,\ \delta\xi_3, \ldots$$

infiniment petits, mais, du reste, quelconques des quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... et en supposant t invariable. La caractéristique δ se rapportera donc à tout ce qui dépend d'une manière quelconque de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... On la distinguera soigneusement de la caractéristique Δ précédemment employée, cette dernière est relative à un changement absolument arbitraire, possible ou non, de la position du système, et elle suppose le temps

variable, tandis que δ ne se rapporte qu'aux déplacements, satisfaisant à la définition du système, et de plus

$$\delta t = 0.$$

3. Désignons par T la demi-force vive du système, demi-force que l'on appelle aussi, et assez souvent, la force vive entière; et soit δU le moment virtuel de toutes les forces motrices appliquées au système. Exprimons tant la quantité T que le moment δU, en fonction des variables t, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ...; T et δU renfermeront, avec ces variables, la première les dérivées

$$\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \ldots$$

relatives au temps, et la dernière les variations

$$\delta\xi_1, \delta\xi_2, \delta\xi_3, \ldots$$

mais sous la forme linéaire. Nous admettrons qu'après l'introduction des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... le moment δU deviendra une variation exacte

$$\delta U$$

d'une fonction finie des ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... et qui peut aussi contenir le temps t. Cette hypothèse n'embrasse assurément pas tous les cas des systèmes et des forces motrices, mais elle est indispensable; et si elle ne subsistait pas, la théorie que nous allons exposer n'aurait pas lieu.

Ainsi, le système que nous considérons et les forces motrices qui s'y trouvent appliquées, doivent être limités par deux conditions.

1°. Que la définition du système conduise aux formules intégrables.

2°. Que le moment virtuel des forces motrices, exprimées en quantités que la définition du système n'assujettit à aucune liaison mutuelle, soit une variation exacte par rapport à ces quantités.

Cela posé, nous aurons pour le mouvement du système l'équation connue

$$\Sigma\left(\frac{dT}{d\xi_i} - \frac{d\frac{dT}{d\xi'_i}}{dt}\right)\delta\xi_i + \delta U = 0.$$

ou celle-ci

$$\frac{d\Sigma\frac{dT}{d\xi'_i}\delta\xi_i}{dt} = \delta T + \delta U$$

le signe Σ se rapporte au numéro i, lequel doit avoir autant de valeurs 1, 2, 3, 4,... qu'il y a de variables ξ.

En faisant

$$T + U = V$$

et remarquant que les dérivées ξ' ne se trouvent pas dans U, nous aurons

$$\frac{d\Sigma\frac{dV}{d\xi'_i}\delta\xi_i}{dt} = \delta V. \qquad (5)$$

Les variations $\delta\xi'$ des dérivées ξ' n'entrent dans cette équation qu'en apparence; car les termes qui les contiennent sont identiquement les mêmes dans les deux parties. Mais il en sera autrement par rapport aux variations $\delta\xi$, à cause de leur indétermination absolue, la formule (3) se décomposera et fournira autant d'équations

$$\frac{d\frac{dV}{d\xi'_i}}{dt} = \frac{dV}{d\xi_i}$$

que le nombre i a de valeurs. Ces équations sont du second ordre, mais rien n'est plus facile que de les réduire au premier, en doublant leur nombre. Parmi un grand nombre de réductions de cette espèce, celle qui paraît la plus simple et qui se présente la première, consiste à supposer

$$\frac{dV}{d\xi'_i} = p_i$$

pour toute valeur de i, la lettre p_i représentant une nouvelle variable, nous aurons alors

$$p'_i = \frac{dV}{d\xi_i}$$

et les équations

$$p_i' = \frac{d\xi_i}{dV}, \quad \frac{dV}{d\xi'_i} = p_i$$

sont visiblement du premier ordre.

Par la nature de la fonction V, ou plutôt par celle de la fonction T, les dérivées partielles

$$\frac{dV}{d\xi'}$$

ne renfermeront les quantités $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \ldots$ qu'à la première puissance, ainsi il sera facile d'en exprimer les valeurs en fonction des variables ξ et p_i, puis en introduisant ces valeurs dans les dérivées

$$\frac{dV}{d\xi_i}$$

on exprimera aussi les P' par les mêmes variables ξ et p, en sorte qu'on aura pour toutes les valeurs de i,

$$\xi'_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots p_1, p_2, p_3, \ldots)$$
$$p'_i = F_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots p_1, p_2, p_3, \ldots)$$

Les seconds membres de ces équations sont susceptibles d'une forme assez remarquable que nous allons faire connaître.

La quantité V étant fonction du second degré par rapport aux dérivées ξ', distinguons y les termes à deux dimensions, à une seule et à la dimension zéro, et, en conséquence, supposons

$$V = V_0 + V_1 + V_2,$$

où V_0 ne renferme point les dérivées ξ'_i; V_1 et V_2 en sont fonctions homogènes d'une seule et de deux dimensions. Nous aurons

$$\frac{dV}{d\xi'_i} = p_i = \frac{dV_1}{d\xi'_i} + \frac{dV_2}{d\xi'_i}$$

d'où en multipliant par ξ'_i, prenant la somme Σ et ayant égard à la nature de V_1 et V_2

$$\Sigma p_i \xi'_i = V_1 + 2 V_2$$

savoir

$$\Sigma P_i \xi'_i = V + V_2 - V_0$$

donc, en différentiant avec la caractérique δ et remplaçant $\frac{dV}{d\xi'_i}$ par p_i

$$\Sigma (p_i \delta \xi'_i + \xi'_i \delta p_i) = \Sigma (p_i \delta \xi'_i + \frac{dV}{d\xi_i} \delta \xi_i) + \delta V_2 - \delta V_0$$

c'est-à-dire

$$\Sigma \xi'_i \delta p_i = \Sigma \frac{dV}{d\xi_i} \delta \xi_i + \delta V_2 - \delta V_0$$

ou, en faisant pour abréger

$$V_2 - V_0 = \Theta \tag{6}$$

$$\Sigma \xi'_i \delta p_i = \Sigma \frac{dV}{d\xi_i} \delta \xi_i + \delta \Theta \tag{7}$$

En considérant Θ comme fonction des ξ et des p, et comparant les coefficients des différentielles arbitraires $\delta\xi$ et δp, il viendra

$$\xi'_i = \frac{d\Theta}{dP_i}$$

$$\frac{dV}{d\xi_i} + \frac{d\Theta}{d\xi_i} = 0, \tag{8}$$

c'est-à-dire

$$\xi'_i = \frac{d\Theta}{dP_i}, \quad P'_i = -\frac{d\Theta}{d\xi_i} \tag{9}$$

telles sont les valeurs de ξ'_i et P'_i ci-dessus mentionnées.

4. Remplaçons dans l'équation (5) la dérivée partielle $\frac{dV}{d\xi'_i}$ par sa valeur P_i, puis multiplions la par dt et intégrons, à partir d'un instant à volonté, par exemple, à partir de $t = 0$, nous aurons

$$\Sigma [p_i \delta \xi_i - (P_i \delta \xi_i)_0] = \delta \int_0^t V dt$$

ou bien, en faisant

$$\int_0^t V dt = S \tag{10}$$

$$\Sigma [p_i \delta \xi_i - (p_i \delta \xi_i)_0] = \delta S \tag{11}$$

$(p_i \delta \xi_i)_0$ est la valeur de $p_i \delta \xi_i$ pour $t = 0$.

En considérant S comme fonction de ξ et de ξ_0, la dernière équation se décomposera en celles-ci

$$P_i = \frac{dS}{d\xi_i}, \quad (p_i)_0 = \frac{-dS}{d(\xi_i)_0}$$

qui seront les intégrales des équations différentielles du mouvement. Mais sans nous y arrêter, différentions par rapport à t l'expression intégrale de S, en y faisant varier tout ce qui varie avec le temps, nous aurons

$$\frac{dS}{dt} + \Sigma \frac{dS}{d\xi_k} \xi'_k = V \tag{12}$$

k étant susceptible des mêmes valeurs que i. Remplaçons $\frac{dS}{d\xi_k}$ par p_k et ayant égard à ce que

$$\Sigma p_k \xi'_k = 2V_2 + V_1$$
$$V = V_2 + V_1 + V_0$$
$$V_2 - V_0 = \Theta$$

nous aurons

$$\frac{dS}{dt} + \Theta = 0 \tag{13}$$

Si l'on remplace les quantités P qui se trouvent dans Θ par les valeurs correspondantes $\frac{dS}{d\xi}$, l'équation (13) sera à différences partielles, les variables indépendantes en seront t, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... et elle ne contiendra que les dérivées partielles

$$\frac{dS}{dt}, \frac{dS}{d\xi_1}, \frac{dS}{d\xi_2}, \frac{dS}{d\xi_3}, \ldots$$

sans la variable principale S elle-même. Nous en conclurons que, si une fonction φ de t, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... vérifie cette équation,

$$\varphi + \text{const.}$$

la vérifiera aussi, et, par conséquent, si, satisfaisant à l'équation (13), φ renfermait autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables ξ,

$$S = \varphi + \text{const.}$$

serait l'intégrale de la solution complète de l'équation (13).

Or, si l'on connaissait une semblable fonction φ, c'est-à-dire une fonction qui contiendrait autant de constantes arbitraires

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

qu'il y a de variables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ et qui prise pour S dans l'équation (13) satisferait à cette équation, on trouverait sur le champ les intégrales des équations différentielles

$$\xi'_i = \frac{d\Theta}{dP_i}, \quad P'_i = \frac{d\Theta}{d\xi_i} \tag{9}$$

de la dynamique. Les intégrales dont il s'agit seront

$$P_i = \frac{d\varphi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\varphi}{da_i} = \beta_i \tag{14}$$

β_i étant une nouvelle constante arbitraire et i le même numéro variable que précédemment.

Pour démontrer cette assertion, nous remarquerons d'abord que les formules précédentes renferment le nombre requis des constantes arbitraires, savoir autant qu'il y a d'équations différentielles; il ne reste donc qu'à s'assurer que ces mêmes formules satisfont aux équations différentielles (9).

En différentiant relativement au temps les intégrales (14), nous trouvons

$$P'_i = \frac{d^2\varphi}{dt\,d\xi_i} + \Sigma \frac{d^2S}{d\xi_k\,d\xi_i}\,\xi'_k$$

$$P = \frac{d_2\varphi}{dt\,da_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi_k da}\,\xi'_k$$

ou bien, en remplaçant les dérivées P'_i et ξ'_i par leurs valeurs

$$-\frac{d\Theta}{d\xi_i} \text{ et } \frac{d\Theta}{dP_i}$$

fournies par les équations différentielles (9),

$$0 = \frac{d\Theta}{d\xi_i} + \frac{d^2\varphi}{dt\,d\xi_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi_k\,d\xi_i}\frac{d\Theta}{dP_k}$$

$$0 = \frac{d_2\varphi}{dt\,da_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi_k da_i}\frac{d\Theta}{dP_k}.$$

La différentiation ayant fait disparaître les constantes arbitraires β, les dernières équations ne renferment que les va-

riables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ et les constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Ces équations doivent devenir identiques, si l'on en élimine la troisième partie des quantités qu'elles renferment, à l'aide des intégrations (14). Or, les intégrales dont nous parlons fournissent immédiatement les valeurs de p_i si donc on remplace ces valeurs respectivement par les dérivées $\frac{d\varphi}{d\xi}$, on doit avoir identiquement

$$0 = \frac{d\Theta}{d\xi_i} + \frac{d_2\varphi}{dt\,d\xi_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi_k\,d\xi_i}\frac{d\Theta}{dp_k}$$

$$0 = \frac{d_2\varphi}{dt\,d\alpha_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi\,d\alpha_i}\frac{d\Theta}{dp_k}$$

c'est de quoi il est facile de s'assurer.

En effet, la fonction φ étant une solution de l'équation (13), nous aurons identiquement

$$\frac{d\varphi}{dt} + \Theta = 0.$$

Dans la fonction Θ de cette équation, les dérivées $\frac{d\varphi}{d\xi}$ remplacent les dérivées $\frac{dS}{d\xi}$ contenues dans Θ de l'équation (13); or, les dernières dérivées remplacent elles-mêmes les quantités p qui entrent dans Θ marquées du no. (6). Ainsi Θ de l'équation

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} + \Theta$$

vient de la substitution des $\frac{d\varphi}{d\xi}$ au lieu des P dans Θ contenus dans les équations différentielles (9). Cependant, nous sous-entendrons seulement la substitution dont il s'agit, pour ne pas nous servir, en différentiant, de la notation incommode

$$\frac{d\Theta}{d\frac{d\varphi}{d\xi}}$$

ou plutôt, nous écrirons

$$\frac{d\Theta}{dp}$$

au lieu de cette notation, mais à charge de remplacer les p par les dérivées $\frac{d\varphi}{d\xi}$, après la différentiation.

Différentions l'équation identique

$$\frac{d\varphi}{d\xi} + \Theta = 0$$

d'abord par rapport à ξ_i, puis par rapport à α_i, mais faisons attention à ce que la constante α_i n'y entre que parce qu'elle est contenue dans les dérivées

$$\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{d\xi_1}, \frac{d\varphi}{d\xi_2}, \frac{d\varphi}{d\xi_3}, \ldots$$

et que la variable ξ_i entre non seulement dans les mêmes dérivées, mais se trouve aussi explicitement dans Θ, savoir dans les coefficients des différentes puissances des dérivées dont il s'agit, dérivées qui, ne l'oublions pas, sont momentanément remplacées par $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Nous aurons

$$0 = \frac{d_2\varphi}{dt\,d\xi_i} + \Sigma \frac{d\Theta}{dp_k}\frac{dp_k}{d\xi_i} + \frac{d\Theta}{d\xi_i}$$

$$0 = \frac{d_2\psi}{dt\,da_i} + \Sigma \frac{d\Theta}{dp_k}\frac{dp_k}{da_i}$$

k étant un numéro variable, susceptible des mêmes valeurs que i. Ces équations deviendront visiblement identiques, quand on y remplacera les p pour les $\frac{d\varphi}{d\xi}$, ainsi, en supposant que le remplacement dont il est question soit fait dans

$$\frac{d\Theta}{dp_k} \text{ et } \frac{d\Theta}{d\xi_i}$$

nous aurons identiquement

$$0 = \frac{d_2\varphi}{dt\,d\xi_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi_k\,\delta\xi_i}\frac{d\Theta}{dp_k} + \frac{d\Theta}{d\xi_i}$$

$$0 = \frac{d_2\varphi}{dt\,da_i} + \Sigma \frac{d_2\varphi}{d\xi_k\,da_i}\frac{d\Theta}{dp_k}$$

donc les équations différentielles de la dynamique

$$(9) \qquad \xi'_i = \frac{d\Theta}{dP_i}, \quad P_i = -\frac{d\xi_i}{d\Theta}$$

ont pour intégrales

$$(14) \qquad P_i = \frac{d\varphi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\varphi}{da_i} = \beta_i$$

On voit par l'analyse précédente que les théories que M. Hamilton et l'illustre géomètre M. Jacobi ont données pour les systèmes définis par des équations qui ne varient pas avec le temps, s'étendent aux systèmes dont la définition dépend, tant d'équations que d'inégalités, variables à chaque instant.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém.* T. VIII. No. 3.)

$\frac{13}{25}$ April 1849.

Ueber Bessels Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni aus Beobachtungen am Heliometer der Königsberger Sternwarte.

Von C. A. F. PETERS, Dr.

Als Bessel das Heliometer der Königsberger Sternwarte zum ersten Male auf die Untersuchung der Parallaxe eines Fixsterns anwandte, wusste er sogleich, wie es von diesem grossen Beobachter auch nicht anders zu erwarten war, die Beobachtungen so anzuordnen, dass jeder competente Richter das höchste Zutrauen zu dem gewonnenen Resultate erlangen musste. Dieses Zutrauen zu der so berühmt gewordenen Parallaxe von 61 Cygni beruhte nicht allein auf einer richtigen Würdigung der von Bessel angewandten Beobachtungsmethoden, sondern auch noch darauf, dass die Beobachtungen jeder einzelnen von zwei Abtheilungen in welche sie zerfallen, die Vergleichungen mit zwei verschiedenen Sternen, und die von zwei verschiedenen Beobachtern, Bessel und Schlüter, ausgeführten Messungen, sämmtlich sehr nahe gleiche Werthe für die Parallaxe gegeben hatten.

Zwar hielt Bessel, als er seine Untersuchungen über diesen Gegenstand publicirte, den bei der Berechnung seiner Beobachtungen für den Einfluss der Wärme auf die Messungen angenommenen Werth noch nicht für so genau bestimmt, dass er ihn als definitiv ansehen konnte. Allein die Unvollkommenheit in der Kenntniss jenes Einflusses berücksichtigte er dadurch, dass er die in der Berechnung angewandte Grösse

mit einem Factor $1 + k$ multiplicirte und k vors Erste unbestimmt liess. Er erhielt daher für die Parallaxe einen Ausdruck, der aus zwei Gliedern bestand: einer Zahl, welche die Parallaxe angiebt, wenn $k = o$, und einem in k multiplicirten Gliede. Eine genaue Bestimmung von k, durch eine neue und vollständige Untersuchung, versprach er später zu liefern. Indess machten zwei, wenn gleich wenig sichere Werthe jener Grösse, welche aus den Beobachtungen von 61 Cygni selbst hervorgingen, es schon sehr wahrscheinlich, dass die Unsicherheit, welche durch die Annahme von $k = o$ entstanden, so geringe sei, dass ihr Einfluss auf die Parallaxe nur ein Paar Hundertheile einer Secunde betragen würde. Dieses hat sich später auch bestätigt. Die versprochene Festsetzung des Werthes für den Einfluss der Wärme auf die Messungen hat Bessel im ersten Bande seiner astronomischen Untersuchungen geliefert. Substituirt man den daraus für k hervorgehenden Werth in die frühern Ausdrücke für die Parallaxe, so erhält man diese nur um etwa den vierzigsten Theil einer Secunde anders, und zwar um so viel grösser, als wenn $k = o$ angenommen wird. Die Genauigkeit des für k gefundenen Werthes ist so gross, dass die noch übrig gebliebene Unsicherheit desselben, den mittlern Fehler der Parallaxe, der, wenn k absolut genau bestimmt wäre, $0''{,}014$ betragen würde, noch nicht um den tausendsten Theil einer Secunde vermehrt.

Das Vertrauen zu der Sicherheit der Parallaxe von 61 Cygni, welches so sehr begründet schien, ist indess bei Manchem später etwas wankend geworden, nachdem die Untersuchungen über die Parallaxe eines zweiten Sterns publicirt sind, welche auf Beobachtungen, die dasselbe Instrument geliefert hatte, beruhen.

Der Stern 61 Cygni war von Bessel hauptsächlich deshalb für die Untersuchung der jährlichen Parallaxe gewählt worden, weil er die stärkste unter den damals bekannten eigenen Bewegungen hatte, und es daher zu vermuthen war, dass er uns verhältnissmässig nahe sein würde. Als Argelander später einen andern Stern fand, der eine noch stärkere eigene Bewegung hat, liess Bessel auch diesen, in der Absicht zur Kenntniss seiner Parallaxe zu gelangen, am He-

liometer beobachten. Jede Beobachtung dieses Sterns bestand darin, dass Abstände von zwei andern Sternen gemessen wurden, von denen der eine *a* von der 10ten, der andere *b* von der 9ten Grösse ist. Der Argelanderschе Stern lag fast genau auf dem grössten Kreise, der *a* und *b* mit einander verbindet, und ist von jedem nahezu gleich weit, um etwa 27 Minuten, entfernt. Diese Distanzen waren also bedeutend grösser, als die Abstände zwischen 61 Cygni und seinen Vergleichsternen, die nur 7,8 und 11,7 Minuten betrugen. Die neue Reihe von Beobachtungen wurde von Wichmann in Rechnung genommen, der darüber zuerst eine kurze Notiz in den *Astronomischen Nachrichten No.* 610, und später eine mehr ausführliche Abhandlung unter dem Titel: *de parallaxi Stellae Argelandriae* (1830 Groombr.) geliefert hat. Wichmann suchte anfänglich, ähnlich wie Bessel bei der Berechnung der Beobachtungen von 61 Cygni verfahren war, die wahrscheinlichsten Werthe, welche die Vergleichungen mit jedem einzelnen der Sterne *a* und *b* für die Parallaxe geben. Nachdem diese und die Werthe der übrigen aus den Beobachtungen abgeleiteten Grössen in die Bedingungsgleichungen substituirt worden, zeigte sich, dass die für die einzelnen Beobachtungen übrig bleibenden Fehler erheblich grösser waren, als Bessel sie für die Beobachtungen von 61 Cygni gefunden hatte. Der mittlere Fehler einer gemessenen Entfernung des Sterns 61 Cygni von *a* war $0''{,}155$, der einer Entfernung von $b = 0''{,}184$ gefunden; dagegen ergab sich für den mittlern Fehler einer Messung des Argelanderschen Sterns ein nahezu doppelt so grosser Werth $0''{,}365$. Dass der Fehler etwas grösser ausfallen würde, als für die Beobachtungen von 61 Cygni, war, der grössern Abstände der Vergleichsterne wegen, zu erwarten; denn das Heliometer kann, bei der Construction, die ihm bis jetzt gegeben worden, grössere Distanzen nicht mit derselben Genauigkeit angeben, als kleinere, wie solches von Bessel, in seinen Untersuchungen über den optischen Theil des Instruments, nachgewiesen ist. Dieses hätte indess nur den wahrscheinlichen Fehler des für die Parallaxe des Argelanderschen Sterns gefundenen Werthes vergrössern können, ohne das Vertrauen, welches man

allgemein in die Parallaxe von 61 Cygni gesetzt hatte, zu schwächen, wenn die Fehler der Beobachtungen des Argelanderschen Sterns die Eigenschaften zufälliger Fehler gezeigt hätten, und also an jedem Beobachtungstage positive Fehler eben so wahrscheinlich gewesen wären, als gleich grosse negative. Allein dieses war nicht der Fall. Auf eine ganz unverkennbare Weise zeigte es sich, dass die an demselben Abende von beiden Vergleichsternen gemessenen Abstände immer entweder beide zu gross oder beide zu klein waren. Hieraus geht hervor, dass ein Theil der Fehler alle an einem Abende gemessenen Distanzen in gleichem Sinne afficirt hat. Und nicht allein an einem Abende waren die Messungen mit demselben Fehler behaftet, sondern dieser Fehler wiederholte sich zuweilen mehrere Tage nach der Reihe immer in demselben Sinne und nahezu in gleicher Grösse; änderte dann Grösse und Zeichen und hielt in letzterm Sinne wieder eine Zeitlang an. Indem die Fehler auf solche Art gewissermassen periodisch wurden, konnten sie auf die aus den Beobachtungen abzuleitende Parallaxe einen viel nachtheiligern Einfluss ausüben, als wenn sie, bei sonst gleicher Grösse, wie zufällige Fehler gewirkt hätten. Wichmann machte sie übrigens, nachdem er sie entdeckt hatte, dadurch unschädlich, dass er die Parallaxen aus den Unterschieden der an jedem Beobachtungstage gemessenen Distanzen ableitete. Denn indem durch dieses Verfahren die Fehler, welche auf beide an einem Abende gemessene Distanzen in gleichem Sinne eingewirkt hatten, aus den Bedingungsgleichungen verschwanden, musste die Parallaxe frei von dem Einflusse jener Fehler gefunden werden.

Wenn gleich die periodischen Fehler für die Beobachtungen von 61 Cygni, wie erwähnt, kleiner sein mussten, als für die des Argelanderschen Sterns, so konnte man doch nicht voraussetzen, dass ihr Einfluss auf die Parallaxe nothwendig verschwindend gewesen, indem Bessel die Berechnung vor der Entdeckung jener Fehler, und daher nicht auf solche Art geführt hatte, dass sie aus den einzelnen Bedingungsgleichungen eliminirt wurden. Ich habe mich daher um so mehr veranlasst gefunden eine Untersuchung darüber anzustellen, ob

ein solcher Einfluss auf die von Bessel gegebene Parallaxe von 61 Cygni wirklich Statt gefunden, da ich in der Uebereinstimmung derselben mit demjenigen Werthe, den der Pulkowaer Verticalkreis durch Anwendung von mir angeordneter Beobachtungsmethoden geliefert hatte, eine Bestätigung der Richtigkeit der übrigen von mir gefundenen Parallaxen sah. Da das von mir gefundene Resultat vielleicht auch ein allgemeineres Interesse haben könnte, so habe ich mich entschlossen es in gegenwärtigem Aufsatze mitzutheilen.

Vorher werde ich den Werth von k, wie er aus Bessels definitiver Bestimmung des Einflusses der Wärme auf die Messungen hervorgeht, in die Besselschen Ausdrücke für die Parallaxe substituiren, welches, so viel mir bekannt, noch nicht geschehen ist.

Bei der Berechnung der Beobachtungen von 61 Cygni hatte Bessel angenommen, dass an die bei der Temperatur f gemessene Distanz s, die Corr. $c = -0'',0003912 . s . (f - 49{,}2)\,(1+k)$ hinzugefügt werden müsse. Aus Abständen der Alcyone von 10 andern Plejadensternen, die bei verschiedenen Temperaturen gemessen waren, fand er später (*Bessel, Astronomische Untersuchungen, 1ster Band, S.* 125):

$$c = -(0{,}0000037765 \pm \text{mittl. f. } 0{,}000000667)\, 52'',89329 . s . (f - 49^0{,}2)$$
$$= -(0'',0001998 \pm \text{mittl. f. } 0'',0000353) . s . (f - 49^0{,}2).$$

Aus der Vergleichung dieses Werthes von c mit dem vorhergehenden, folgt

$$k = -\frac{3912-1998}{3912} \pm \text{m . f . } \frac{353}{3912} = -0{,}4893 \pm \text{m.f. } 0{,}0903.$$

Setzt man diesen Werth von k in die von Bessel für die Parallaxe gefundenen Ausdrücke, so erhält man, wenn bei der Bestimmung der mittlern Fehler der Parallaxe auch der mittlere Fehler von k berücksichtigt wird,

Parallaxe von 61 Cygni aus den Vergleichungen
mit dem Sterne $a = 0'',3954$, mit dem mittl. Fehler $0'',0205$,
" " " $b = 0,3424$, " " " " $0,0208$,
mit beiden Sternen $= 0,3754$, " " " " $0,0149$.

Diese Werthe sind um $0''{,}0370$, $0''{,}0135$, $0''{,}0261$ grösser, als diejenigen, welche aus der Annahme, dass $k = o$ sei, folgen würden. Den letzten Werth, nämlich $0''{,}3744 \pm 0''{,}0149$, welcher aus der Vergleichung mit beiden Sternen folgt, wird man, aus Gründen die Bessel schon angegeben hat, und die hier zu wiederholen überflüssig sein würde, als den genauesten ansehen können, der sich, ohne Berücksichtigung der periodischen Fehler, aus den Beobachtungen ableiten lässt.

Bis zu welcher Grösse der periodische Fehler in den Messungen von 61 Cygni gestiegen sein könne, hängt von der Grösse, welche er in den Beobachtungen des Argelanderschen Sterns erreichte und von dem Gesetze ab, nach welchem diese mit der Grösse der gemessenen Distanz sich ändert. Das Maximum des Betrags für die Beobachtungen des Argelanderschen Sterns lässt sich auf folgende Art schätzen. Da dieser Stern fast genau auf dem grössten Kreise lag, der die Vergleichsterne *a* und *b* mit einander verbindet, so giebt die Summe der an jedem Abend von *a* und *b* gemessenen Abstände, bis auf eine sehr kleine Quantität, die für alle Beobachtungen als gleich anzusehen ist, den Abstand der Sterne *a* und *b* von einander. Die Veränderungen, welche in den wahren Werthen des letztern Abstandes vor sich gehen, lassen sich, unter der Voraussetzung, dass die Parallaxen der Vergleichsterne Null seien, mit der grössten Schärfe bestimmen. Wenn man also die beobachteten Abstände von diesen Veränderungen befreiet, so wird jeder derselben von einem als fehlerfrei angesehenen Mittelwerthe um die Summe der Fehler abweichen, mit welchen die Abstände von *a* und *b* einzeln behaftet sind. Diese Fehler sind aus den zufälligen Messungsfehlern und aus den periodischen Fehlern zusammengesetzt. Faye hat in seinem Aufsatze: *Discussions relatives aux parallaxes de la* 1830^{r} *Groombridge et de la* 61^{r} *du Cygne* diese zu trennen versucht, und gefunden, dass sich die letztern durch die Formel $0''{,}924 \sin (\odot - 52^{0}\,49')$, in welcher $\odot$ die Länge der Sonne zur Zeit der Beobachtung bezeichnet, so nahe darstellen lassen, dass die noch übrig bleibenden Fehler kein Gesetz mehr zu befolgen scheinen, und folglich als zufällige betrachtet werden können. Da der Argelandersche

Stern nahezu in der Mitte zwischen a und b liegt, so wird hiernach der periodische Fehler für einen Abstand von 27 Minuten, $= 0''{,}462 \cdot \sin(\odot - 52^0\ 49')$ sein. Der Fehler kann also für diese Distanz im Maximo $0''{,}46$ betragen, und im ungünstigsten Falle Veranlassung werden, dass die jährliche Parallaxe eines Sterns, wenn man sie aus den Abständen von einem 27 Minuten entfernten Stern ableitet, um dieselbe Grösse fehlerhaft wird. Dieses würde nämlich dann der Fall sein, wenn der Fehler um das Maximum der Parallaxe einige Zeit hindurch jenen grössten Werth beibehielte, und zur Zeit des Minimum denselben Werth mit entgegengesetztem Zeichen.

Wichmann hat die Beobachtungen des Argelanderschen Sterns mit Bessels neuesten Werthen für den Einfluss der Wärme auf die Messungen reducirt. Der periodische Gang der nachgebliebenen Fehler kann demnach durch eine Ungenauigkeit in dem Thermometer-Coefficienten der Skale nicht erklärt werden. Wirklich scheinen auch jene Fehler von der Temperatur beinahe unabhängig zu sein. Zwar fallen fünf der grössten Distanzen für a und b auch mit der grössten Wärme vom 3ten Juni bis zum 26sten August zusammen, allein die Zahl dieser Beobachtungen ist viel zu geringe, um ein solches Zusammentreffen für mehr als zufällig halten zu können; überdies finden sich gleich grosse Fehler in demselben Sinne bei Temperaturen, die um 12° R. niedriger sind; und bei einer Wärme, die nur 4° geringer ist, als in den Sommermonaten, sind am 28sten und 29sten April die Distanzen zu klein gemessen. Ein Paar Mal zeigen sich bedeutende Unterschiede zwischen den an zwei auf einander folgenden Tagen gemessenen Distanzen, obgleich die Temperaturen nahezu dieselben geblieben sind. Am 2ten Januar sind z. B. beide Distanzen um etwa $0''{,}5$ zu gross gemessen, am folgenden Tage um $0''{,}35$ zu klein, während der Unterschied der Temperaturen nur 3° R. betrug. Wenn es hiernach wohl keinem Zweifel unterliegen kann, dass die Incongruenzen in den Beobachtungen nicht von der Temperatur abhängen, so dürfte es, der plötzlichen Uebergänge wegen, die sich in diesen Fehlern bisweilen zeigen, auch noch sehr zweifelhaft sein, ob die jährliche Periode, welche Faye für diese Fehler gefunden, eine

allgemeine Gültigkeit hat. Man würde dieses nur dann als erwiesen annehmen können, wenn in mehreren auf einander folgenden Jahren dieselbe Periode sich gezeigt hätte. Allein die Beobachtungen des Argelanderschen Sterns umfassen nicht einmal ein einziges volles Jahr.

Durch eine Abweichung der Temperatur des Objectifs und der Mikrometerschraube von derjenigen, welche das Thermometer anzeigte, lassen sich die Differenzen auch nicht erklären; denn wenn man auch annehmen wollte, dass diese Abweichungen bis 5° R. sollten betragen haben, was ohne Zweifel zu viel ist, so würde dadurch in der Reduction der Distanzen auf eine constante Temperatur nur ein Fehler von 0″,07 entstehen, welches kaum der 6te Theil der zu erklärenden Differenz ist.

Wahrscheinlich ist die Ursache der periodischen Fehler eine optische. Ich erinnere mich, dass Herr Professor Hansen, bevor Bessel noch seine Messungen von 61 Cygni angefangen hatte, zwischen den an verschiedenen Abenden mit dem Heliometer der Seeberger Sternwarte gemessenen Abständen zweier Fixsterne Differenzen fand, welche die zufälligen Beobachtungsfehler nicht unerheblich überstiegen. Er stellte für diese Abweichungen die Erklärung auf, dass man die Bilder der Sterne nicht immer in gleichem Abstande vom Objectiv nehme, da sie nicht neben einem im Brennpuncte des Objectivs angebrachten Faden beobachtet würden. Hiernach würden die Fehler weniger von Veränderungen im Instrumente, als von solchen abhängen, die in dem Schwirren der Bilder des Sterns und im Auge des Beobachters vor sich gehen. Die Erklärung, welche Herr Staatsrath Struve in seinem Aufsatze: *Remarque sur la critique de M. Faye, relativement au travail de M. Wichmann sur la parallaxe de l'étoile Groombridge* 1830, als die wahrscheinlichste aufstellt, ist mit der Hansenschen übereinstimmend. Er nimmt den Fehler der gemessenen Distanz den Aenderungen im Abstande des Oculars vom Objective proportional, und schreibt einen Theil des Fehlers der Unsicherheit zu, die in dem nach Bessels Formel berechneten Einfluss der Wärme auf die Messungen noch liegen könne. Unter beiden Voraussetzungen müssten die

Fehler der an einem Abende gemessenen Distanzen diesen Distanzen proportional sein. Der Fehler, der für einen Abstand von 27 Minuten im Maximo 0″,46 betrug, würde demnach auf einen Abstand zwischen 61 Cygni und den Vergleichsternen a und b resp. $0'',46 \cdot \frac{7,8}{27} = 0'',13$ und $0'',46 \cdot \frac{11,7}{27} = 0'',20$ im Maximo betragen, und könnte also auf die Parallaxe von 61 Cygni einen Einfluss erlangt haben, dessen Betrag gegen den ganzen Werth der Parallaxe nicht als unerheblich anzusehen ist. Der Fehler lässt sich aber in diesem Falle eliminiren. Wenn man nämlich die Bedingungsgleichung, welche aus der an einem Abende vom Sterne a gemessenen Distanz folgt, mit der Zahl multiplicirt, die man erhält, wenn die Entfernung zwischen 61 Cygni und b durch die zwischen 61 Cygni und a dividirt wird, so wird der periodische Fehler in der vergrösserten Gleichung denselben Werth erlangen, den er in der Bedingungsgleichung des Sterns b hat, und da, der Annahme nach, beide Distanzen in gleichem Sinne von diesem Fehler afficirt sind, so muss er verschwinden, wenn die letztere Bedingungsgleichung von der, auf die angegebene Art, vergrösserten ersten subtrahirt wird. Diese Rechnung habe ich für alle Beobachtungstage, an welchen beide Sterne mit 61 Cygni verglichen sind, ausgeführt.

Da der Abstand 61 Cygni von $a = 466'',1$, von $b = 703'',6$, so ist die Zahl, mit welcher ich die Bedingungsgleichungen für a multiplicirte, $= \frac{703,6}{466,1} = 1,51$. Meistens ist, wenn beide Sterne verglichen sind, für jeden Vergleichstern nur eine Distanz gegeben; doch kommen ein Paar Mal für einen Stern 2 Distanzen an einem Abende vor. In solchen Fällen nahm ich ein Mittel aus beiden Distanzen und gab diesem Mittel das doppelte Gewicht einer einfachen Messung. Es sind hier zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Entweder ist a zweimal beobachtet und b einmal, oder a einmal und b zweimal. Nennt man den mittlern Fehler einer einzelnen von Bessel gegebenen Bedingungsgleichung α, und die Zahl 1,51, mit welcher die Bedingungsgleichungen multiplicirt sind, welche die Vergleichungen mit a gegeben, f, so ist der mittlere Fehler einer

von mir gebildeten Bedingungsgleichung, wenn nur eine Distanz von jedem der Sterne a und b gemessen ist, $= \alpha\sqrt{1+f^2}$, wenn a zweimal und b einmal gemessen ist, $= \alpha\sqrt{1+\frac{1}{4}f^2}$, und wenn a einmal und b zweimal gemessen ist, $= \sqrt{\frac{1}{2}+f^2}$. Die Gewichte solcher drei Bedingungsgleichungen verhalten sich demnach wie $1, \frac{1+f^2}{1+\frac{1}{4}f^2}, \frac{1+f^2}{\frac{1}{2}+f^2}$, oder wenn man für f seinen Werth 1,51 substituirt, wie 1, 1,53, 1,18. Diese Gewichte habe ich bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen angewandt. Wenn an einem Abende nur Abstände von einem der beiden Sterne a oder b gemessen sind, so habe ich die Beobachtung unberücksichtigt gelassen. Dadurch sind 8 Beobachtungen des Sterns a, und 34 des Sterns b weniger von mir benutzt worden, als von Bessel.

Bezeichnet man, ähnlich wie Bessel, die mittlere Entfernung für 1839,0, so wie sie zwei Abtheilungen der Beobachtungen entsprechen, zwischen welchen das Heliometer auseinander genommen war,

$$\text{für } a \text{ durch } 466'',1 + \alpha \pm \Delta\alpha,$$
$$\text{„ } b \text{ „ } 703,6 + \beta \pm \Delta\beta,$$

und die um 466″,1 und 703″,6 verminderten auf 1839,0 reducirten beobachteten Entfernungen, mit Berücksichtigung der in Bessels Berechnung noch unbestimmt gebliebenen Grösse k, durch $n + \Delta n \,.\, k$ für a, und mit $n_{,} + \Delta n_{,} \,.\, k$ für b, so sind die Bedingungsgleichungen, welche die Beobachtungen eines Abends ergeben, nach Bessel,

$$\text{für } a,\ n + \Delta n \,.\, k = a \,.\, \Delta\alpha + b \,.\, \alpha + c \,.\, \alpha' + d \,.\, \alpha'' \ldots . \quad (1)$$
$$\text{„ } b,\ n_{,} + \Delta n_{,} \,.\, k = a \,.\, \Delta\beta + b \,.\, \beta + c \,.\, \beta' + d_{,} \,.\, \beta'' \ldots . \quad (2)$$

a ist für die Beobachtungen bis zum 10ten Oct. 1838, $= +1$, für die folgenden $= -1$, b ist immer $= 1$, c ist die von 1839,0 an gezählte Zeit, d, $d_{,}$ sind die Coefficienten der jährlichen Parallaxe für die Abstände zwischen 61 Cygni und den Sternen a und b.

Wird die Gleichung (1) mit f multiplicirt und vom Product die Gleichung (2) subtrahirt, so entsteht die von mir benutzte Bedingungsgleichung

$$fn - n_{,} + (f \,.\, \Delta n - \Delta n_{,})\, k = a\,(\Delta\alpha \,.\, f - \Delta\beta) + b\,(\alpha f - \beta) + c\,(\alpha' f - \beta') + (df - d_{,})\,\alpha''; \quad . \quad (3)$$

wenn man annimmt, dass $\alpha'' = \beta''$.

Die zur Reduction der Beobachtungen angewandten Werthe für den Einfluss der Wärme auf die gemessenen Distanzen, Δn und $\Delta n_{,}$, verhalten sich wie diese Distanzen, oder wie 1 zu f. Hieraus folgt, dass der Coefficient, $f.\Delta n - \Delta n_{,}$, von k in Gl. (3), $= 0$ wird. Setzt man, um abzukürzen, $fn - n_{,} = N$, $f.\Delta\alpha - \Delta\beta = \Delta A$, $\alpha f - \beta = A$, $\alpha' f - \beta' = A'$, $df - d_{,} = D$, so verwandelt sich Gl. (3) in diese:

$$N = a \,.\, \Delta A + b \,.\, A + c \,.\, A' + D \,.\, \alpha''.$$

Folgende Tabelle enthält die Werthe von c, D und N für sämmtliche Bedingungsgleichungen. a ist für die ersten 84 Gleichungen $= +1$, für die folgenden $= -1$, und b für alle $= +1$. Die Gleichungen, deren Gewicht $= 1{,}53$, sind mit *, diejenigen, deren Gewicht $= 1{,}18$, mit ** bezeichnet. Die Gewichte der übrigen Gleichungen sind $= 1$.

No.	No. bei Bessel.				
	a	b	c	D	N
1	1	2	— 1,37	+ 0,50	+ 0″,49
2	2	3	— 1,37	+ 0,47	— 0,52
3	3	4	— 1,36	+ 0,44	— 0,30
4	4	5	— 1,34	+ 0,19	+ 0,28
5	5	6	— 1,34	+ 0,13	+ 0,35
6	6	7	— 1,32	— 0,03	+ 0,34
7	8	8	— 1,31	— 0,18	— 0,41
8	9	9	— 1,30	— 0,24	— 0,01
9	10	10	— 1,30	— 0,34	— 0,06
10	11	11	— 1,28	— 0,52	— 0,50
11	12	12	— 1,27	— 0,61	+ 0,05
12	13	13	— 1,27	— 0,64	— 0,13
13	14	14	— 1,25	— 0,84	— 0,28
14	15	15	— 1,25	— 0,86	+ 0,04
15	16	16	— 1,21	— 1,23	— 0,06
16	17	17	— 1,18	— 1,48	— 0,10
17	18	18	— 1,11	— 1,77	— 0,25
18	19	19	— 1,08	— 1,80	— 0,55
19	20	21	— 1,00	— 1,60	— 0,71
20	21	22	— 1,00	— 1,59	— 0,39
21	22	25	— 0,98	— 1,44	— 0,65
22	23	26	— 0,97	— 1,41	— 0,45

No.	No. bei Bessel. a	b	e	D	N
23	25	28	— 0,95	— 1,25	— 0,11
24	26	29	— 0,94	— 1,18	— 0,80
25	27	30	— 0,91	— 0,87	— 0,12
26	28	31	— 0,90	— 0,75	+ 0,15
27	29	32	— 0,89	— 0,61	— 0,72
28	30	37	— 0,66	+ 1,63	+ 0,29
29	31	38	— 0,66	+ 1,65	+ 0,46
30	32	39	— 0,66	+ 1,68	+ 0,27
31	33	40	— 0,64	+ 1,75	+ 0,08
32	34	41	— 0,63	+ 1,78	+ 0,46
33	35	42	— 0,63	+ 1,80	+ 0,78
34	36	43	— 0,62	+ 1,81	+ 0,28
35	37	44	— 0,61	+ 1,83	+ 0,56
36	38	45	— 0,61	+ 1,83	+ 0,46
37	39	46	— 0,61	+ 1,84	+ 0,48
38	40	47	— 0,58	+ 1,86	+ 0,37
39	41	48	— 0,58	+ 1,86	+ 0,64
40	42	49	— 0,55	+ 1,83	+ 0,32
41	43	50	— 0,55	+ 1,83	+ 0,41
42	44	51	— 0,53	+ 1,75	— 0,30
43	45	52	— 0,52	+ 1,71	+ 0,35
44	46	53	— 0,51	+ 1,70	+ 0,50
45	47	54	— 0,51	+ 1,68	+ 0,56
46	48	55	— 0,51	+ 1,67	+ 0,62
47	49	56	— 0,50	+ 1,65	+ 0,68
48	50	57	— 0,50	+ 1,64	— 0,06
49	51	58	— 0,48	+ 1,53	— 0,05
50	52	59	— 0,48	+ 1,49	+ 0,50
51	53	60	— 0,47	+ 1,42	— 0,14
52	54	61	— 0,46	+ 1,35	+ 0,24
53	55	62	— 0,43	+ 1,07	+ 0,21
54	56	64	— 0,41	+ 0,91	+ 0,14
55	57	65	— 0,39	+ 0,71	+ 0,07
56	58	66	— 0,36	+ 0,44	— 0,36
57	59	67	— 0,36	+ 0,42	— 0,07
58	60	68	— 0,35	+ 0,29	— 0,24
59	61	69	— 0,35	+ 0,26	— 0,08
60	62	70	— 0,34	+ 0,16	+ 0,04
61	63	71	— 0,33	0,00	+ 0,29
62	64	73	— 0,32	— 0,06	0,00
63	65	75	— 0,32	— 0,12	— 0,02
64	66	76	— 0,31	— 0,15	0,00
**65	67	77. 78	— 0,30	— 0,28	+ 0,12
66	68	79	— 0,30	— 0,31	— 0,58
67	69	80	— 0,30	— 0,34	— 0,47

No.	No. bei Bessel. a	b	c	D	N
68	70	81	— 0,29	— 0,37	— 0″,61
69	71	82	— 0,29	— 0,40	— 0,26
70	72	83	— 0,29	— 0,43	— 0,60
71	73	84	— 0,29	— 0,46	— 0,78
72	74	86	— 0,28	— 0,52	— 0,65
73	75	87	— 0,28	— 0,55	— 0,06
74	76	88	— 0,27	— 0,58	— 0,06
75	77	89	— 0,27	— 0,61	— 0,36
76	78	90	— 0,27	— 0,64	— 0,57
77	79	91	— 0,27	— 0,67	— 0,09
78	80	92	— 0,26	— 0,70	— 0,37
79	81	93	— 0,26	— 0,73	— 0,68
80	82	94	— 0,26	— 0,76	— 0,63
81	83	95	— 0,26	— 0,78	— 0,33
82	84	96	— 0,25	— 0,81	— 0,33
83	85	97	— 0,25	— 0,84	— 0,71
84	86	100	— 0,23	— 1,08	— 0,12
85	87	101	— 0,13	— 1,70	— 0,07
86	88	102	— 0,12	— 1,75	+ 0,03
87	89	103	— 0,12	— 1,76	— 0,30
88	90	105	— 0,11	— 1,77	— 0,50
89	91	106	— 0,11	— 1,78	+ 0,25
90	92	107	— 0,10	— 1,78	— 0,11
*91	93. 94	108	— 0,05	— 1,79	+ 0,23
92	95	109	— 0,05	— 1,77	0
93	96	111	— 0,04	— 1,76	— 0,60
94	97	112	— 0,04	— 1,75	— 0,41
95	98	113	— 0,03	— 1,72	— 0,06
96	99	115	— 0,01	— 1,65	— 0,01
**97	100	118. 119	+ 0,13	— 0,39	+ 0,66
98	101	120	+ 0,14	— 0,33	+ 0,58
99	102	122	+ 0,15	— 0,24	+ 0,56
100	103	123	+ 0,25	+ 0,97	+ 1,08
101	104	124	+ 0,26	+ 0,99	+ 0,30
102	105	125	+ 0,27	+ 1,13	+ 0,56
103	106	126	+ 0,29	+ 1,31	+ 0,96
104	108	127	+ 0,33	+ 1,59	+ 0,29
105	109	128	+ 0,33	+ 1,60	+ 0,72
106	110	130	+ 0,35	+ 1,67	+ 0,72
**107	111	131. 132	+ 0,35	+ 1,71	+ 0,96
108	112	133	+ 0,35	+ 1,72	+ 1,05
109	113	135	+ 0,36	+ 1,76	+ 1,05
110	114	136	+ 0,40	+ 1,85	+ 1,12
111	115	137	+ 0,42	+ 1,86	+ 1,21
112	116	138	+ 0,44	+ 1,85	+ 1,20

No.	No. bei Bessel.		c	D	N
	a	b			
113	117	139	+ 0,44	+ 1,84	+ 0″,46
114	118	140	+ 0,45	+ 1,83	+ 1,35
115	119	142	+ 0,46	+ 1,80	+ 0,83
116	120	143	+ 0,46	+ 1,79	+ 1,13
117	121	144	+ 0,47	+ 1,78	+ 1,02
118	122	145	+ 0,48	+ 1,74	+ 0,54
119	123	146	+ 0,49	+ 1,68	+ 1,12
120	124	147	+ 0,51	+ 1,59	+ 0,42
121	125	148	+ 0,51	+ 1,58	+ 1,20
122	126	149	+ 0,51	+ 1,54	+ 0,42
123	127	150	+ 0,52	+ 1,53	+ 0,76
124	128	151	+ 0,52	+ 1,51	+ 0,43
125	129	152	+ 0,53	+ 1,45	+ 0,30
126	130	153	+ 0,53	+ 1,41	+ 0,69
127	131	154	+ 0,54	+ 1,39	+ 0,94
128	132	155	+ 0,55	+ 1,28	+ 0,23
129	133	156	+ 0,56	+ 1,21	+ 0,74
130	134	157	+ 0,57	+ 1,09	+ 0,88
131	135	158	+ 0,58	+ 1,01	+ 0,99
132	136	159	+ 0,61	+ 1,73	+ 0,73
133	137	160	+ 0,61	+ 0,70	+ 0,28
134	138	161	+ 0,62	+ 0,59	+ 0,85
135	139	162	+ 0,63	+ 0,47	+ 0,53
136	140	163	+ 0,65	+ 0,25	— 0,06
137	141	165	+ 0,66	+ 0,16	+ 0,38
138	142	166	+ 0,66	+ 0,13	+ 0,21
139	143	168	+ 0,68	— 0,09	0,00
140	144	169	+ 0,69	— 0,22	+ 0,42
141	145	172	+ 0,70	— 0,31	— 0,24
142	146	173	+ 0,70	— 0,34	— 0,04
143	148	174	+ 0,71	— 0,46	— 0,10
144	149	175	+ 0,72	— 0,52	— 0,38
145	150	176	+ 0,72	— 0,55	+ 0,13
146	151	177	+ 0,74	— 0,75	— 0,60
147	152	179	+ 0,77	— 1,05	+ 0,08
148	153	180	+ 0,77	— 1,08	— 0,22
149	154	182	+ 0,78	— 1,15	— 0,63
150	155	183	+ 0,79	— 1,18	— 0,71
151	157	184	+ 0,79	— 1,22	— 0,52
152	158	185	+ 0,79	— 1,25	— 0,53
153	159	186	+ 0,80	— 1,27	— 0,85
154	160	187	+ 0,80	— 1,29	— 0,76
155	161	188	+ 0,80	— 1,31	— 0,55
156	162	189	+ 0,80	— 1,34	— 0,51
157	163	190	+ 0,82	— 1,48	— 0,67

No.	No. bei Bessel. a	b	c	D	N
158	164	191	+0,83	−1,49	−0″,63
159	165	192	+0,83	−1,51	−0,45
160	166	193	+0,83	−1,55	−0,84
161	167	194	+0,84	−1,56	−0,45
162	168	195	+0,85	−1,63	−0,61
163	169	196	+0,86	−1,68	−0,82
164	170	197	+0,86	−1,69	−0,65
165	171	198	+0,87	−1,70	−0,79
166	172	199	+0,92	−1,81	−0,90
167	173	200	+0,93	−1,81	−1,16
168	174	201	+0,94	−1,80	−1,17
169	175	203	+1,03	−1,42	−0,62
170	176	204	+1,04	−1,31	−0,82
171	177	205	+1,05	−1,29	−0,44
172	178	206	+1,09	−0,81	−0,68
173	179	207	+1,12	−0,48	+0,19
174	180	208	+1,13	−0,45	−0,76
175	181	209	+1,16	−0,03	+0,81
176	182	210	+1,17	+0,07	+0,32
177	183	211	+1,17	+0,10	+0,24
178	184	212	+1,19	+0,29	+0,08
179	185	213	+1,19	+0,32	−0,11
180	188	214	+1,23	+0,72	+0,13

Aus den vorhergehenden 180 Bedingungsgleichungen erhält man, mit Berücksichtigung der Gewichte:

$(aa) = 180{,}7700$, $(bb) = 180{,}7700$, $(cD) = -10{,}2822$,
$(ab) = -12{,}6100$, $(bc) = 0{,}2679$, $(cN) = 1{,}8831$,
$(ac) = -110{,}8159$, $(bD) = 5{,}0345$, $(DD) = 285{,}6444$,
$(aD) = 25{,}1806$, $(bN) = 7{,}6511$, $(DN) = 97{,}0265$,
$(aN) = -17{,}3119$, $(cc) = 92{,}5524$, $(NN) = 56{,}9941$.

Hieraus folgt:

$\Delta A = -0''{,}4084$, mit dem mittlern Fehler $0''{,}0438$,
$A = +0''{,}0044$, „ „ „ „ $0''{,}0225$,
$A' = -0''{,}4286$, „ „ „ „ $0''{,}0608$,
$\alpha'' = +0''{,}3602$, „ „ „ „ $0''{,}0179$.

Für den mittlern Fehler einer Bedingungsgleichung, deren Gewicht = 1, erhält man $0''{,}299$. Nun ist, wenn der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung α genannt wird, wie schon

erwähnt worden, der mittlere Fehler, $= \varepsilon$, einer Bedingungsgleichung, deren Gewicht $= 1$, $= \alpha \sqrt{1 + f^2}$, woraus $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+f^2}}$ folgt. Setzt man hierin für ε und f ihre Werthe $\varepsilon = 0''{,}299$, $f = 1{,}51$, so wird $\alpha = 0''{,}165$.

Der aus den hier mitgetheilten Bedingungsgleichungen hervorgehende Werth für die Parallaxe von 61 Cygni,

$$= 0''{,}3602, \text{ mit dem mittl. Fehler } 0''{,}0179,$$

ist, wie vorhin auseinandergesetzt worden, völlig frei von allen Fehlern, die der gemessenen Entfernung proportional sein können, also auch unabhängig von dem Thermometer-Coefficienten des Winkelwerths einer Schraubendrehung. Er weicht, wie man sieht, von dem Werthe, welcher aus der ursprünglichen Besselschen Untersuchung als der wahrscheinlichste hervorging, nämlich

$$0''{,}3744, \text{ mit dem mittl. Fehler } 0''{,}0149,$$

noch nicht um die Grösse des mittlern Fehlers desselben ab. Man ersieht also, dass die periodischen Fehler auf den von Bessel für die Parallaxe abgeleiteten Werth fast keinen Einfluss gehabt haben. Sind also solche Fehler in den Messungen von 61 Cygni vorhanden gewesen, so muss der mittlere Fehler einer Beobachtung, wie er aus Bessels Untersuchung hervorgeht, grösser sein, als ihn meine Berechnung giebt, da kein erheblicher Theil dieser Fehler sich mit dem neuen für die Parallaxe gefundenen Werth vereinigt hat.

Für den mittlern Fehler einer einzelnen Beobachtung gab die gegenwärtige Untersuchung $0''{,}165$. Bessel findet den mittlern Fehler einer Distanz zwischen 61 Cygni und $a = 0''{,}155$, und den einer Distanz zwischen 61 Cygni und $b = 0''{,}184$. Im Mittel aus den Vergleichungen mit beiden Sternen wird er $= 0''{,}170$. Dieser Werth ist zwar etwas grösser als der von mir gefundene, welches mit der Voraussetzung, dass die Beobachtungen periodische Fehler enthalten, übereinstimmt; allein der Unterschied von $0''{,}005$ zwischen beiden Werthen ist so geringe, dass es wohl kaum noch einem Zweifel unterliegt, dass die periodischen Fehler für die Beobachtungen von

61 Cygni viel kleiner sind, als die Annahme, sie seien den gemessenen Distanzen proportional, ergeben würde. Es wird also wenigstens ein Theil dieser Fehler schneller abnehmen, als in dem einfachen Verhältnisse der Entfernungen. Hiefür lässt sich auch eine Erklärung geben. Die Strahlen, welche vom Puncten ausserhalb der Achse der Objectivhälfte ausgehen, vereinigen sich auf einer zur Achse senkrechten Ebene nicht in Puncten, sondern verbreiten sich dort in Flächen, die um so grösser werden, je weiter sie von der Achse abliegen. Die Unsicherheiten, welche hiedurch in den Messungen entstehen, sind den Würfeln der Winkel proportional, den die durch den optischen Mittelpunct des Objectivs gehenden Strahlen mit der Achse bilden. Es sind also Fehler möglich, die sich nicht wie die ersten Potenzen der gemessenen Entfernungen, sondern wie die Würfel derselben verhalten. Der Theil der periodischen Fehler, der sich wie die ersten Potenzen verhält, ist durch die jetzt geführte Rechnung eliminirt. Der zweite kann auf die Parallaxe von 61 Cygni nur einen sehr geringen Einfluss gehabt haben. In der That, wenn der periodische Fehler, wie er bei der Berechnung der Beobachtungen des Argelanderschen Sterns sich herausstellte, seinem ganzen Werthe nach, sich wie der Würfel der Distanz verhalten sollte, so könnte er für einen Abstand 61 Cygni von *a* nicht mehr als $0''{,}46 \cdot \left(\frac{7{,}8}{27}\right)^3 = 0''{,}0111$, und für einen Abstand von *b* nicht mehr als $0''{,}46 \cdot \left(\frac{11{,}7}{27}\right)^3 = 0''{,}0374$ betragen. Die Parallaxe, welche von Bessel aus der Vergleichung mit dem Sterne *a* abgeleitet ist, könnte demnach im allerungünstigsten Falle nur um $0''{,}0111$, also etwa um die Hälfte des mittlern Fehlers dieser Parallaxe, unrichtig geworden sein, und folglich von $0''{,}3954$ nur bis auf $0''{,}4065$ zu erhöhen, oder bis auf $0''{,}3843$ zu verringern sein. Etwas grösser ist der Einfluss auf den Werth, welchen *b* gegeben, doch würde auch hier die Parallaxe, abgesehen von ihrem mittlern Fehler, innerhalb der Gränzen $0''{,}3850$ und $0''{,}3798$ bleiben. Wollte man den Fehler, der sich wie der Würfel der Distanz verhält, auf ähnliche Art eliminiren, wie den der ersten Potenz proportiona-

len, so müsste man die Gleichung für a mit einer grössern Zahl multipliciren, als vorhin geschehen ist. Diese Rechnung auszuführen hat mir indess unnöthig geschienen, weil der Einfluss jener Fehler auf die Parallaxe, welche die Vergleichungen mit a gegeben, jedenfalls schon so geringe ist, dass er kaum noch Berücksichtigung verdient. Ich bemerke nur, dass wenn man die Zahl, mit welcher die Bedingungsgleichungen des Sterns a multiplicirt werden, bevor man die Bedingungsgleichungen des Sterns b davon abzieht, bis unendlich vergrössert, man diejenige Parallaxe erhält, welche der Stern a allein giebt. Wir haben also:

wenn das Gewicht der Gl. für

$a, = 1{,}51$, Parall. von 61 Cygni $= 0''{,}3602$, m. d. m. F. $0''{,}0179$,

$a, = \infty$, » » » $= 0{,}3954$, » $0{,}0205$.

Zwischen diesen Gewichten liegt dasjenige, welches man anwenden müsste, wenn die periodischen Fehler sich wie die Würfel der Distanzen verhalten. Es lässt sich daher übersehen, dass der dem letztern Gewichte entsprechende Werth der Parallaxe nur wenig von den Werthen $0''{,}3602$ oder $0''{,}3954$ abweichen wird. Die Parallaxe von 61 Cygni, welche aus Bessels Untersuchung als die wahrscheinlichste hervorging, liegt zwischen den zuletzt genannten beiden Zahlen. Berücksichtigt man jetzt, dass bevor sich in den Beobachtungen des Argelanderschen Sterns periodische Fehler zeigten, kein Astronom dergleichen Fehler in Bessels Beobachtungen von 61 Cygni für möglich hielt, und dass wenn man diese Fehler, die sich dennoch später zeigten, unter den Voraussetzungen ihrer Ursachen eliminirt, die als die einzig möglichen erscheinen, fast genau dieselben Werthe für die Parallaxe gefunden werden, die schon Bessel fand, so kann wohl an der Realität der Besselschen Parallaxe und zwar sehr nahe in der von Bessel angegebenen Grösse nicht mehr gezweifelt werden.

Es würde mich freuen, wenn ich durch diese Erörterung etwas dazu beigetragen haben sollte, die Zweifel, welche in der neuesten Zeit gegen die Zuverlässigkeit der Besselschen Parallaxe von 61 Cyni erhoben sind, zu beseitigen.

Bei Gelegenheit der Revision der Besselschen Bedingungsgleichungen für 61 Cygni, in No. 401 der *Astronomischen Nachrichten*, habe ich folgende Druckfehler gefunden:

In den Bed. Gl. für den Stern *a*:

In der Ueberschrift über den Gl. 86 bis 144, statt e lies n.

Gl. 44, n	statt	+ 0,042	lies — 0,042
» 140, n	»	+ 0,035	» — 0,035
» 148, c	»	+ 0,711	» + 0,714
» 170, n	»	+ 0,258	» — 0,258

In den Bed. Gl. für den Stern *b*:

Gl. 10, n	statt	+ 0,168	lies + 0,186
» 28, d	»	+ 0,035	» — 0,035
» 29, d	»	+ 0,093	» — 0,083
» 30, d	»	+ 0,267	» — 0,267
» 31, d	»	+ 0,326	» — 0,326
» 32, d	»	+ 0,398	» — 0,398
» 154, n	»	— 0,095	» — 0,195

Ausserdem muss es Seite 271, in dem Werthe von (an), statt — 12,709, heissen — 12,907.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No. 4.*)

$\frac{13}{25}$ Avril 1849.

Note sur la comète découverte par M. Schweizer de Moscou.

Le 5 (17) avril j'ai reçu une lettre de M. Schweizer de Moscou dans laquelle il annonce la découverte d'une petite comète télescopique. Il avait trouvé cette comète, le 11 avril (30 mars) à $9^h\ 30'''$ du soir, sur la frontière des constellations du Bouvier et de la Couronne boréale, tout près de l'étoile χ du Bouvier. Malgré les indications très vagues, sur les mouvements de la comète, fournies dans la lettre, je fus assez heureux pour l'attraper, le soir même de l'arrivée de la nouvelle, à l'aide du chercheur du grand réfracteur. Depuis, j'ai pu déterminer trois fois le lieu de cet astre. Voici les positions approximatives:

1849	17 avril	$11^h59^m51^s$	temps sid.	$\mathrm{A\!R} = 14^h23^m7^s$	Décl. $= +26^\circ\ 4'\ 9''$
	19 —	15 23 49		13 57 57	$+24\ 7\ 30$
	23 —	11 57 51		12 58 22	$+17\ 59\ 34.$

Je ne donne les positions qu'en nombres ronds de secondes, parce que les positions employées des étoiles de comparaison ne peuvent prétendre à un plus haut degré d'exactitude.

La comète ayant un mouvement apparent très rapide, il parût nécessaire de déduire les éléments de son orbite le plus tôt possible, pour y baser le calcul d'une éphéméride, afin de retrouver la comète, dans des occasions futures, avec plus de facilité. Je viens d'achever, conjointement avec M. Lindhagen, la première ébauche des éléments paraboliques,

calculés sur les positions précédemment données. Nous avons trouvé:

Passage par le périhélie 1849 juin 8,246 temps moyen de Poulkova.

Longitude du périhélie 267° 1′.
Longitude du noeud ascendant 30° 31′.
Inclinaison 67° 0′.
Log. de la distance au périhélie 9,95184.
Mouvement direct.

Ces éléments ont quelque ressemblance avec les éléments déduits de plusieurs anciennes apparitions de comètes; mais pour le moment, il serait encore trop hardi d'en conclure l'identité avec une de ces comètes.

La comète se présente comme une nébuleuse ronde sans queue, mais avec un noyau très distinct. Par son mouvement rapide en Æ, joint au décroissement considérable de sa déclinaison, elle disparaîtra probablement bientôt dans les rayons du soleil. Par cette raison les observations de cet astre ne pourront être continuées chez nous que quelques jours encore; mais nous devons espérer d'obtenir des séries d'observations considérablement plus longues des observatoires de l'hémisphère austral, où la comète se présentera dans des conditions beaucoup plus favorables.

Poulkova ce 12 (24) avril 1849.

Otto Struve.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No. 4.*)

25. Mai / 6. Juni 1849.

Ueber einige Grundformeln der Geodäsie.

Von FERDINAND MINDING.

Im ersten Bande der astronomischen Nachrichten, S. 36 und 37, giebt Bessel unter Anderem auch Formeln, um aus den auf dem Erdsphäroid beobachteten Winkeln die wahren Werthe der Winkel geodätischer Dreiecke abzuleiten. Da sich nämlich die Richtung des ersten Elementes der doppelt gekrümmten geodätischen Linien nicht unmittelbar beobachten lässt, so muss man sich begnügen, den Winkel zwischen zwei durch den Ort des Beobachters gelegten Verticalebenen zu messen. Zwar sind für sehr kurze Strecken beiderlei Winkel als völlig gleich anzusehen, nicht blos auf dem Umdrehungs-Ellipsoide, sondern auf jeder krummen Fläche; bei den heutigen Messungen aber, wo Dreieckseiten vorkommen, welche einen vollen Grad sogar noch überschreiten, bedarf es der analytischen Entwickelung, um sich ein sicheres Urtheil über den Betrag des begangenen Fehlers zu verschaffen.

Bessels Formel beruht auf den von ihm im vierten Bande d. astr. N. (St. 86) entwickelten Ausdrücken für die kürzeste Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoide. Da jedoch an genanntem Orte ihre Herleitung nicht gegeben ist, so gedenke ich zuerst auf diese einzugehen, dann aber den Gegenstand allgemeiner zu betrachten. Man nenne α das Azimuth der geodätischen Linie AB bei A, u' und u die reducirten Breiten der Puncte A und B, ω ihren Längenunterschied, und führe noch mit Bessel die Hülfsgrössen Ω und φ ein, welche einem sphä-

rischen Dreiecke abc angehören, worin $ab = \sigma$, $ac = \frac{\pi}{2} - u'$, $bc = \frac{\pi}{2} - u$, $\angle cab = \alpha$, $\angle acb = \Omega$; so gelten folgende Gleichungen:

$$\sin u = \sin u' \cos\sigma + \cos u' \sin\sigma \cos\alpha \qquad 1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos u \sin\Omega}{\cos u' \sin u - \sin u' \cos u \cos\Omega} \qquad 2.$$

$$\omega = \int_0^{\Omega} \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}\, d\Omega$$

oder, weil hier nur die erste Annäherung gebraucht wird:

$$\omega = \Omega - \frac{1}{2} e^2 \sigma \cos u' \sin\alpha. \qquad 3.$$

Werden ferner die Coordinaten von A und B in bekannter Weise ausgedrückt durch

$$x' = a\cos u'; \qquad y' = b \sin u'; \; z' = o \qquad (A)$$

$$x = a\cos u \cos\omega; \; y = b \sin u; \; z = a\cos u \sin\omega \qquad (B)$$

wo $b = a\sqrt{1 - e^2}$ die halbe Umdrehungsaxe bezeichnet; so ergibt sich für die Neigung i einer durch die Normale in A und durch B gelegten Ebene gegen den Meridian in A:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\cos u \sin\omega \sqrt{1 - e^2 \cos u^2}}{\sin u \cos u' - \cos u \sin u' \cos\omega - e^2 \cos u' (\sin u - \sin u')}. \qquad 4.$$

Setzt man in diesen Ausdruck anstatt ω seinen genäherten Werth aus 3., entwickelt nach e^2 mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen dieser Grösse, schafft mittels der Gleichungen

$$\cos u \sin\Omega = \sin\alpha \sin\sigma,$$

$$\cos u' \cos u \cos\Omega = \cos\sigma - \sin u \sin u'$$

und der obigen unter 1. Ω und u hinweg, so dass nur noch u', α und σ zurückbleiben, und geht von den Tangenten auf die Winkel über; so kommt

$$\alpha = i - \qquad 5.$$

$$\frac{1}{2} e^2 \cos u' \sin\alpha \left\{ \left(1 - \frac{\sigma}{\operatorname{tg}\sigma}\right) \cos u' \cos\alpha - \left(2\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} - \alpha\right) \sin u' \right\}$$

oder nach σ entwickelt, wobei das erste Glied in der Anwendung schon allein ausreicht:

$$\alpha = i - \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \cos w'^2 \sin 2\alpha - \ldots .$$

Obgleich hiernach die Verbesserung des beobachteten Winkels i in wirklich vorkommenden Fällen nur die Hunderttel der Secunde treffen kann, so würde doch eine störende Dunkelheit in den Grundlagen der Rechnung obwalten, wenn man ihre Entwickelung überginge. Diese wird aber beträchtlich abgekürzt, wenn man sie allgemein für jede krumme Fläche vollzieht. Bringt man nämlich die Gleichung der Fläche oder vielmehr ihres zunächst um einen Punct A liegenden Theiles auf die bekannte Reihenform:

$$z = \alpha \frac{x^2}{2} + \beta \frac{y^2}{2} + \ldots .$$

und benutzt die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + p \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + q \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

wo $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$; so ergeben sich für eine von A ausgehende kürzeste Linie, deren erstes Element mit x den Winkel φ bildet und deren Bogen s ist, Reihen nach Potenzen von s, von welchen ich hier nur die ersten Glieder hersetze, nämlich:

$$x = s \cos\varphi - \alpha\varrho \cos\varphi \frac{s^3}{6} \ldots \quad y = s \sin\varphi - \beta\varrho \sin\varphi \frac{s^3}{6} \ldots$$

$$z = \varrho \frac{s^2}{2} \ldots ;$$

$\varrho = \alpha \cos\varphi^2 + \beta \sin\varphi^2$ ist die Krümmung der Fläche in der Richtung des ersten Elementes der kürzesten Linie. Bezieht man nun $x\,y\,z$ und s auf einen bestimmten Punct B dieser Linie, und setzt $y = x \operatorname{tg} i$, so kommt:

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}\varphi \left\{ \frac{1 - \beta\varrho \frac{s^2}{6} \ldots}{1 - \alpha\varrho \frac{s^2}{6} \ldots} \right\}$$

$$\text{oder } i = \varphi + (\alpha - \beta)\varrho \sin\varphi \cos\varphi \frac{s^2}{6} \ldots .$$

Allgemein hängt daher die Abweichung der Anfangsrichtung eines kleinen Bogens der kürzesten Linie von der nach sei-

nem Endpunkte gerichteten durch den Anfangspunkt gelegten Verticalebene hauptsächlich ab von dem Unterschiede der grössten und kleinsten Krümmung der Fläche im Anfange der kürzesten Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoide hat man für den Punkt, wo $x = a \cos u$, $y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u$, $z = 0$, die Krümmung im Meridian

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{a(1 - e^2 \cos u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und im Breitenkreise

$$\beta = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{a(1 - e^2 \cos u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

mithin $$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot e^2 \cos u^2}{a(1 - e^2 \cos u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man sich mit der ersten Potenz von e^2 begnügt:

$$\varphi = i - \frac{1}{12} e^2 \cos u^2 \sin 2\varphi \frac{s^2}{a^2} \ldots.$$

wie vorhin, da φ dem obigen α entspricht und näherungsweise $a\alpha = s$ ist.

Im Allgemeinen dürfte es für die Darstellung der Geodäsie erspriesslich sein, die Rechnung wenigstens in ihren Grundlagen von jeder bestimmten Voraussetzung über die Gestalt der Erde frei zu halten. Diese Absicht, welche mich auch im Vorstehenden leitete, veranlasst mich noch zu den folgenden Entwickelungen, an welche sich einige in rein geometrischer Hinsicht vielleicht bemerkenswerthe Folgerungen anknüpfen. Dabei werde ich mich der Buchstaben $p\ q\ r\ s\ t$ stets in der Bedeutung bedienen, dass:

$$dz = pdx + qdy,\ dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy.$$

Dreht sich ein Körper von beliebiger Gestalt um eine in ihm und im Raume feste Axe, welche die der z sei, so ist bekanntlich $q = kp$ die Gleichung einer Meridiancurve auf seiner Oberfläche. Z. B. für $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist $y = \frac{kb^2}{a^2} x$ diese Gleichung. Dieselbe umfasst nämlich alle Puncte der Fläche, deren Normalen der Meridian-Ebene $y = kx$ parallel

sind, oder deren Zenithpuncte an der Himmelskugel in einerlei Meridian liegen. Für ein im Puncte xyz anfangendes Element der Meridiancurve hat man daher $dq = kdp$ oder $pdq = qdp$, mithin:

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

wo $A = pt - qs$, $B = qr - ps$, $C = Ap + Bq$.

Bezeichnet nun $d\sigma$ das Bogenelement einer kürzesten Linie im Puncte xyz, und dx, dy, dz seine Projectionen auf die Axen; so erhält man das Azimuth α desselben aus der Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{Adx + Bdy + Cdz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\,d\sigma}$$

und die Polhöhe P aus:

$$\sin P = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \text{ oder } \operatorname{cotg} P = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Sind daher die Coordinaten einer kürzesten Linie nach Potenzen ihres Bogens σ entwickelt, deren Coefficienten von dem Anfangspuncte der Linie und der Richtung ihres ersten Elementes abhängen werden; so lassen sich mittels vorstehender Ausdrücke auch Azimuth und Polhöhe in Reihen nach Potenzen von σ darstellen.

Für die Curven gleicher Polhöhe ist nach Obigem:

$$p^2 + q^2 = \text{Const.}, \text{ oder } pdp + qdq = 0; \text{ daher:}$$

$$dx : dy : dz = A' : B' : C',$$

wo $A' = ps + qt$, $B' = -(pr + qs)$, $C' = A'p + B'q$.

Nur auf den abwickelbaren Flächen findet die Unterscheidung der Curven gleicher Zeit — wie man die Meridiancurven auch nennen könnte — und der Curven gleicher Polhöhe nicht Statt, da auf diesen, wegen $p = \text{funct. } q$, beide Arten von Curven in den geraden Linien der Fläche zusammenfallen, oder in leicht erkennbaren besonderen Fällen eine von ihnen unbestimmt wird. Ohne hierbei zu verweilen, schliesse ich die abwickelbaren Flächen sammt der Ebene von der folgenden Untersuchung aus.

Im Allgemeinen ist in Betreff dieser beiden Arten von Curven zu erinnern, dass sie stets in Beziehung auf eine Axe ge-

dacht werden müssen, welche die der z sein soll; dass aber parallele Axen völlig gleichgeltend sind. Die zu einer Axe gehörigen Meridiane durchkreuzen sich da, wo die Normale der Axe parallel oder die Polhöhe ein rechter Winkel ist.

Die obigen Werthe von $A\ B\ A'\ B'$ geben:

$$AA' + BB' = (r + t)\,\{(p^2 - q^2)\,s + pq\,(t - r)\} = (r + t)\,C'$$

so wie auch: $AB' - A'B = (p^2 + q^2)\,(s^2 - rt)$.

Sucht man nun den Winkel λ, unter welchem auf einer beliebigen Fläche die Meridiancurven von den Curven gleicher Polhöhe geschnitten werden, so kommt:

$$\pm \cos\lambda = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\,\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

und es ist: $AA' + BB' + CC' = (r + t + C)\,C'$,
also $\cos\lambda = 0$ für $r + t + C = 0$ und für $C' = 0$.

Es gibt also zwei Arten von Flächen, auf welchen die Meridiancurven die Curven gleicher Polhöhe überall senkrecht schneiden. Betrachten wir sie einzeln.

Nach Einsetzung des Werthes von C verwandelt sich die Gleichung $r + t + C = 0$ in

$$(1 + p^2)\,t + (1 + q^2)\,r - 2pqs = 0.$$

Diese Gleichung ist längst bekannt; sie ist die der kleinsten Fläche innerhalb eines gegebenen Umfanges, und wir sind daher zu folgender Eigenschaft dieser Fläche gelangt:

Wird eine solche Fläche auf eine beliebige Axe als auf ihre Drehungsaxe bezogen, so schneiden die Meridiancurven die Curven gleicher Polhöhe überall rechtwinklig.

Die Axe, auf welche die Fläche bezogen wird, kann jede beliebige sein, da die Form der obigen Differentialgleichung der Fläche von der Richtung der rechtwinkligen Coordinaten unabhängig ist.

Werden in einer Ebene mehrere Axen angenommen, so gibt es eine Meridiancurve M, welche allen diesen Axen zugleich angehört, nämlich diejenige, in deren Puncten die Normalen jener Ebene parallel sind. Zieht man nun durch einen Punct von M die diesen Axen entsprechenden Curven glei-

cher Polhöhe, so folgt, dass diese einander in jenem Puncte sämmtlich berühren, da sie alle die Curve M senkrecht schneiden.

Die zweite Art von Flächen, auf welchen überall $\cos \lambda = 0$, wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$C' = 0 \text{ oder } pq\,(r - t) = (p^2 - q^2)\,s.$$

Das Integral dieser Gleichung folgt durch Wegschaffung von ε aus:

$$fz = x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon + \psi\varepsilon$$
$$0 = y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon + \psi'\varepsilon$$

wo f und ψ willkürliche Functionen sind. Die geometrische Deutung dieser Formeln ist folgende:

Legt man an einen Cylinder, dessen Seiten der Axe z parallel sind, eine Berührungs-Ebene, zeichnet auf dieser eine beliebige krumme Linie C, und wickelt hierauf die Ebene vom Cylinder ab; so beschreibt die Curve C die verlangte Fläche. Auf dieser sind die Queerschnitte von gleichem z die Curven gleicher Polhöhe, und die darauf senkrechten Curven von constantem ε, welche nichts anderes sind als die Curve C in ihren verschiedenen Lagen, stellen die Meridiane dar; beiderlei Curven sind also eben; auch sind sie die Krümmungslinien der Fläche, deren Verwandtschaft mit den Umdrehungsflächen nicht zu verkennen ist, in welche sie für $\psi\varepsilon = \text{const.}$ übergeht.

Wenn die willkürliche Linie C eine gerade ist, so wird die Fläche abwickelbar, und die Polhöhe in allen ihren Puncten dieselbe.

Eine andere Art von Meridiancurven als die bisher betrachteten geben, auf einer beliebigen Fläche, diejenigen Curven, welche die auf der Drehungsaxe z senkrechten Queerschnitte überall unter rechten Winkeln schneiden. Die Differentialgleichung dieser Curven ist allgemein: $q\,dx = p\,dy$. Für $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ folgt hieraus $\frac{y\,dx}{b^2} = \frac{x\,dy}{a^2}$, also $y^{b^2} = k.x^{a^2}$.

Sucht man die Flächen, auf welchen diese zweiten (geodätischen) Meridiancurven die Curven gleicher Polhöhe überall

senkrecht schneiden, so folgt, dass letztere mit den Queerschnitten von gleichem z zusammenfallen, also der Gleichung $p^2 + q^2 =$ funct. z unterworfen sein müssen. Diese Gleichung ist aber ein erstes Integral der obigen Differentialgleichung $C = 0$, und in der That fallen auch auf der oben betrachteten zweiten Art von Flächen einerseits die Curven gleicher Polhöhe mit denen von constanten z, so wie andererseits die astronomischen Meridiancurven mit den geodätischen zusammen.

Dorpat den 30sten Januar 1849.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No.* 6.)

$\frac{25.\ \text{Mai}}{6.\ \text{Juni}}$ 1849.

Ueber die Bahn des im August 1847 in Moskau entdeckten Kometen. Von GOTTFR. SCHWEIZER, Observator an der Sternwarte in Moskau.

Der Komet, der von mir im August 1847 entdeckt wurde, ist der erste, und bisher einzige, dessen primäre Entdeckung Russland angehört. Aus diesem Grunde hoffe ich, dass einige von mir über die Bahn dieses Kometen angestellte Rechnungen der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften von Interesse sein dürften, und wage deshalb einen kurzen Bericht über dieselben hiermit vorzulegen.

In Betreff meiner ersten Versuche, die Bahn des Kometen zu bestimmen, erwähne ich nur folgende Elemente:

$T = 1847.\ \text{Aug.}\ 9{,}498465$ .... Berlin. mittl. Zeit.
$\Pi = 21^0\ 11'\ 54''{,}9$
$\Omega = 76\ \ 47\ \ 47{,}2$ } Mittl. Aequinoct Sept. 24.
$i = 32\ \ 39\ \ 19{,}0$
$\lg. q = 0{,}1719916$. Bewegung ..... rückläufig,

welche aus den Beobachtungen Septb. 11, Sept. 27. Altona, und Octobr. 14. Berlin berechnet sind, und diese 3 zu Grunde gelegten Beobachtungen folgendermassen darstellen:

	Beobachtung — Rechnung.	
	In Länge.	In Breite.
Septb. 11	$+ 6''{,}0$	$- 0''{,}9$
27	$-40{,}2$	$-28{,}8$
Octb. 14	$- 1{,}0$	$- 0{,}8$

Nachdem ich von Herrn O. von Struve die von demselben der Academie mitgetheilten Pulkowaer elliptischen Elemente und Beobachtungen des Kometen erhalten hatte, hielt ich mich bei meinen ferneren Untersuchungen lediglich an letztere; einerseits, weil es die umfassendste Beobachtungsreihe ist, indem sie einige Tage früher anfängt als die früheste, und 21 Tage später endet als die letzte auswärtige Beobachtung; anderseits, weil sie der Kraft des benutzten Instrumentes und der Genauigkeit der Positionen der Vergleichsterne wegen die andern unstreitig übertrifft. — Was die Pulkowaer elliptischen Elemente anbelangt, so stellen sie die Beobachtungen vom 8. bis 30. September ganz gut dar, weichen dagegen von da ab immer mehr und mehr ab, so dass es nothwendig war Elemente zu suchen, die sich der ganzen Beobachtungsreihe gleichmässiger anschliessen.

Zu dem Behufe wählte ich zur Bearbeitung die Pulkowaer Beobachtungen: Sept. 8., Octb. 7., Nov. 4. aus, und suchte streng nach der *Theoria motus corporum coelestium* von Gauss, unter gehöriger Anwendung aller Controllrechnungen, diejenige Bahn, welche diese 3 Beobachtungen genau darstellt, und zwar ohne irgend welche Voraussetzung über die Natur des Kegelschnittes. Es ergab sich folgende Ellipse

$T = 1847.$ Aug. 9,296358 .... mittl. Berlin. Zeit.
$\Pi = 21^\circ\ 26'\ 40''{,}87$ } Bezogen auf das mittlere Aequinoct.
$\Omega = 76\ \ 42\ \ 10\ ;25$ } des 7ten Octobr.
$i = 32\ \ 38\ \ 24{,}46$
lg. $a = 2{,}7623942$
lg. $e = 9{,}9988845$. Bewegung . . . . rückläufig,

mit einer Umlaufszeit von etwa 14000 Jahren.

Mit diesen elliptischen Elementen wurden nun für die Beobachtungszeiten derjenigen Pulkowaer Beobachtungen, für welche die Vergleichsterne schon bestimmt sind, die Positionen des Kometen berechnet, dieselben mit den direct aus den Beobachtungen hervorgegangenen verglichen und folgende Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung gefunden:

	Beobachtung —		Rechnung
	Δl	$\Delta l \cdot \cos b$	Δb
Sept. 8	— 0″,11	— 0″,05	— 0″,06
10	— 1,86	— 0,80	— 3,70
13	+ 6,00	+ 2,27	+ 0,02
14	+17,37	+ 6,41	— 1,06
15	+11,37	+ 4,14	+ 0,40
25	+ 8,23	+ 3,90	+ 0,14
30	+ 5,93	+ 3,38	+ 3,60
Octb. 7	— 0,14	— 0,09	— 0,03
26	— 1,54	— 1,30	—11,24
Nov. 3	+ 1,27	+ 1,12	—11,48
4	— 0,01	— 0,01	+ 0,01

Vergleicht man diese Differenzen mit denjenigen, welche aus der Pulkowaer Ellipse hervorgingen, so zeigt es sich, dass die neue elliptische Bahn sich der Wahrheit allerdings bedeutend mehr nähert, und folglich, dass unser Komet keiner mit verhältnissmässig kurzer Umlaufszeit sein kann. Dass übrigens aus den Beobachtungen vom 8., 15., 25. Septb. eine Ellipse von kleiner Umlaufszeit gefunden wurde, erklärt sich durch den Umstand, dass in diesem speziellen Falle kleine Fehler in den Positionen sehr wesentliche Veränderungen in den Elementen hervorrufen.

Es erschien mir nun interessant zu untersuchen, wie eine auf die nämlichen 3 Beobachtungen Septb. 8., Octb. 7., Nov. 4. gegründete parabolische, sich so genau als möglich anschliessende Bahn die 11 Pulkowaer Beobachtungen im Vergleiche mit der neuen Ellipse darstellt; deswegen scheute ich die kleine Mühe nicht, die früher gefundene Parabel nach der Verbesserungsmethode von Olbers vermittelst Hypothesen über die curtirten Distanzen zu verbessern, und fand nach mehreren Versuchen folgende neue Parabel:

$T =$ 1847. Aug. 9,358100 . . . mittl. Berlin. Zeit.
$\Pi =$ 21° 18′ 35″,9
$\Omega =$ 76 42 31,0 } mittl. Aequin. Octbr. 7.
$i =$ 32 38 41,5
lg. $q =$ 0,1716030. Bewegung . . . . rückläufig,

welche nachstehende Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung übrig lässt:

		Beobachtung — Rechnung.		
		Δl	$\Delta l . \cos b$	Δb
Septb.	8	0	0	+ 0,″1
	10	+ 2,″2	+ 0,″9	— 3,9
	13	+14,9	+ 5,6	+ 0,4
	14	+27,9	+10,3	— 0,3
	15	+23,3	+ 8,4	+ 1,7
	25	+13,9	+ 6,5	+ 6,4
	30	+ 7,9	+ 4,5	+10,1
Octbr.	7	0	0	+ 5,4
	26	— 2,2	— 1,9	— 9,6
Nov.	3	+ 1,0	+ 0,9	—11,2
	4	— 0,1	— 0,1	0

Unterschiede, welche, indem sie durchschnittlich etwas grösser ausfallen, als für die Ellipse, deutlich zeigen, dass die letztere der wahren Bahn des Kometen sich etwas mehr nähert. Eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung ist es, dass 3 Längen und 2 Breiten der zu Grunde gelegten 3 Positionen genau dargestellt werden.

Die Resultate der bisherigen Rechnungen zeigten deutlich, dass die wahren Elemente nur wenig von einer parabolischen Bahn abweichen können; ich fühlte mich dadurch veranlasst, noch einen Schritt weiter zu gehen, und zu untersuchen, ob nicht vielleicht eine Parabel statt findet, die die Beobachtungen noch genauer, als die gefundene Ellipse darstellt.

Zu diesem Behufe behandelte ich mit Zugrundlegung der letzten Parabel die Beobachtungen: Septb. 8., Octb. 7., Nov. 4. — Septb. 14., Sept. 30., Octob. 26. nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar gerade diese, weil den ersten 3 durch die parabolische Bahn sehr gut entsprochen wird, dagegen den 3 letztern am ungenausten, so dass sich hier die Fehler der Elemente am entschiedensten äusserten.

Es ergab sich folgende Parabel:

$T =$ 1847. August 9,3822630 . . . mittl. Berlin. Zeit.
$\Pi =$ 21° 17′ 30″,17 } Bezogen auf das mittlere Aequinoctium des 7ten Octb.
$\Omega =$ 76 43 22,47 }
$i =$ 32 38 47,37
lg. $q =$ 0,1716651. Bewegung . . . . rückläufig,

vermittelst welcher aufs Neue die Positionen des Kometen berechnet, und nachstehende Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung gefunden wurden:

		Beobachtung — Rechnung.		
		Δl	Δl. cos b	Δb
Septb.	8	−3″,7	−1″,7	−0″,4
	10	− 7,5	− 3,2	− 3,2
	13	− 5,6	− 2,1	+ 1,1
	14	+ 3,3	+ 1,2	− 0,1
	15	− 2,8	− 1,0	+ 1,1
	25	− 4,2	− 2,0	− 2,8
	30	− 2,0	− 1,1	+ 0,9
Octb.	7	− 3,8	− 2,6	− 0,7
	26	+ 0,1	+ 0,1	− 7,1
Nov.	3	+ 2,5	+ 2,2	− 6,3
	4	+ 3,7	+ 3,3	+ 5,6

Diese Differenzen, welche geringer ausfallen, als alle früheren, beweisen uns einerseits die Präponderanz der zuletzt gefundenen Elemente über die früher abgeleiteten, selbst die elliptischen, und zugleich anderseits, wie sehr wenig der für uns sichtbar gewesene Theil der Kometenbahn von einer Parabel abgewichen ist.

Mit den nämlichen Elementen wurden auf ähnliche Weise die an auswärtigen Sternwarten angestellten Beobachtungen verglichen, und folgende Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung gefunden:

			Beobachtung		Rechnung.
			Δl	$\Delta l \cos b$	Δb
Altona	Septbr.	11	+10″,7	+ 4″,3	+ 1″,7
Hamburg	»	12	+ 9,4	+ 3,7	— 7,6
»	»	12	+43,4	+16,9	+ 7,8
Altona	»	13	— 30,0	—11,4	+ 3,1
Hamburg	»	13	— 4,0	— 1,5	+18,7
Altona	»	15	— 26,7	— 9,7	+ 8,7
Hamburg	»	15	— 8,0	— 2,9	— 3,4
Altona	»	18	— 32,6	—12,0	— 1,5
Hamburg	»	18	+ 12,3	+ 4,6	— 7,4
Berlin	»	18	+ 6,8	+ 2,5	+ 3,2
Hamburg	»	19	+ 16,4	+ 6,2	— 2,6
»	»	20	+ 13,4	+ 5,3	— 0,1
»	»	21	+ 24,3	+ 9,8	— 6,7
Berlin	»	21	+ 5,6	+ 2,3	+ 1,0
»	»	24	— 6,4	— 2,9	— 2,1
Altona	»	27	+ 18,1	+ 9,2	+ 7,3
Hamburg	»	27	+ 13,1	+ 6,7	+ 8,1
»	»	28	+ 21,6	+11,5	+ 1,2
Hamburg	Octb.	2	+ 15,7	+ 9,5	+17,0
»	»	4	+ 0,5	+ 0,3	+10,5
Berlin	»	9	+ 2,6	+ 1,8	+ 1,0
»	»	11	— 2,9	— 2,1	+ 5,0
»	»	12	+ 2,1	+ 1,6	+ 9,7
»	»	14	— 0,9	— 0,7	+ 6,9

Es wurden hier alle mir zu Gesichte gekommenen Beobachtungen berücksichtigt, mit Ausnahme zweier unvollständiger vom Septb. 11. Altona, und der Hamburger Beobachtung vom 14. Septbr., welche eine Differenz von 4 Minuten in Länge zeigt, der wohl nur ein Irrthum in der Position des Vergleichsternes zu Grunde liegen kann.

Hiemit ist übrigens die Arbeit noch nicht geschlossen. Sobald für die noch unvollständigen Pulkowaer Beobachtungen die Oerter der Vergleichsterne bestimmt sein werden, sollen alle Pulkowaer Beobachtungen, mit der zuletzt gefundenen Parabel als Grundlage, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, und auf diese Weise die wahrscheinlichste Bahn des Kometen bestimmt werden.

Soviel ist jetzt schon klar, dass die definitive Bahn nicht erheblich von der letzten Parabel abweichen kann.

Was die an auswärtigen Sternwarten angestellten Beobachtungen betrifft, so sollen sie ebenfalls gehörig berücksichtigt werden.

Zu dem Behufe wird noch eine zweite definitive Bahn berechnet werden, die auf allen vorhandenen Beobachtungen beruht, und wo den Altonaer, Hamburger und Berliner, in Vergleich mit den Pulkowaer Beobachtungen eher ein etwas zu grosses, als zu kleines Gewicht beigelegt wird, um ganz vorurtheilsfreie Resultate zu erhalten.

Nach dem Schlusse der Rechnungen werde ich mir abermals die Freiheit nehmen, die Resultate derselben der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften mitzutheilen.

Aus dem *Bullet. phys.-math. T. VIII. No.* 6.

$\frac{8.}{20.}$ Juin 1849.

Etoiles doubles. 2e Note par M. YVON VILLARCEAU.

η De la Couronne boréale.

Ce système est l'un de ceux qui présentent en ce moment le plus d'intérêt. Il se compose de deux étoiles de 5e à 6e grandeur, presqu'égales, et de couleur à peu près la même. W. Herschel estimait leur couleur bleuâtre : M. Struve l'estime jaunâtre. Le lieu moyen de η de la Couronne est en 1826,0 : $\mathrm{AR} = 15^h\ 16^m,1$, $\mathrm{D} = +30°\ 56'$.

Sir John Herschel indique dans le voisinage de ce système, l'existence d'une petite étoile de 15e grandeur, distante de $30''$ environ de l'une des deux étoiles précédentes, et dont l'angle de position est $33°\ 59'$. (L'époque de cette observation n'est pas donnée). Ne possédant aucun renseignement qui me permette de distinguer si cette petite étoile participe ou non au mouvement commun du système ; et d'ailleurs les distances des étoiles principales ne devant pas excéder $1'',3$ ou $1'',6$; j'ai dû faire complétement abstraction de la 3e étoile, dans l'étude que j'ai faite du mouvement de η de la Couronne.

L'égalité approchée, tant de l'éclat que de la couleur des deux étoiles, rend très difficile l'interprétation des deux observations faites par W. Herschel à des époques éloignées, en 1781 et 1802. Lorsque les étoiles sont de grandeurs notablement différentes, on rapporte toujours le lieu apparent

de la plus petite à la plus belle des deux : aucune confusion n'est possible. Lorsqu'il y a à peu près égalité entre elles, on est exposé à prendre pour fixe relativement, tantôt l'une, tantôt l'autre ; et, à cela, il n'y a aucun inconvenient, si les observations ne sont pas séparées par un trop long intervalle de temps. On reconnait bien vite les positions qu'il faut renverser, c'est à dire auxquelles il faut ajouter 180°, pour les rendre comparables aux positions voisines. Mais, si, comme dans le cas actuel, il s'est écoulé 21 années entre les deux observations primitives, puis 21 autres années de 1802 à 1823, époque à laquelle commence la série des nouvelles observations, on est très exposé à se tromper dans l'interprétation des deux anciennes, quand il s'agit de les relier soit entre elles, soit avec les nouvelles.

Il est effectivement possible d'interpreter de deux manières différentes, les observations de 1781 et 1802, tout en maintenant l'accord entre ces observations et 16 autres observations complètes jointes à deux incomplètes, qui s'étendent de 1823 à 1847 inclusivement. De là deux solutions très distinctes du problème qui consiste à déterminer les circonstances du mouvement elliptique de η de la Couronne. Je ne sache pas que cette double solution ait été entrevue.

M. Struve, dans son grand ouvrage sur les *Mesures micrométriques*, etc. dit : «Ces étoiles offrent un système dans lequel la durée de la révolution est d'environ 43 ans. Cela me paraissait déjà probable en 1829, comme résultant de la comparaison des angles observés par Herschel I. en 1781 et 1802, et était devenu pour moi une certitude en 1831. Herschel II. arrive à la même conséquence, et l'établit le premier publiquement dans son livre remarquable : *Micrometrical Measures of 364 double stars*. 1832.»

Sir John Herschel, dans une notice sur les orbites elliptiques de ξ du Bouvier, η de la Couronne, etc., 1833, donne des éléments de l'orbite de cette dernière étoile : la durée de la révolution, entr'autres, y est fixée à 44,242 ans. Il a fait usage pour cela des deux observations de 1781 et 1802, d'une observation de 1819 communiquée par M. Struve, puis de 7 autres positions s'étendant de 1823 à 1833. (Il faut remar-

quer que l'observation de 1819 n'est pas rappelée dans le grand ouvrage de M. Struve. Cette observation me paraît inconciliable avec l'ensemble de celles dont j'ai moi-même fait usage ; et cette circonstance m'explique suffisamment pourquoi Sir John Herschel n'a pu lui même concilier son observation de 1823 avec les autres).

M. Mädler s'est aussi occupé de la même étoile : il en a donné successivement deux orbites peu différentes, et est parvenu en dernier lieu à une durée de la révolution égale à 43,2459 ans. (Mädler, *Astronomie populaire*, édition de 1846.) Il n'a point fait usage de l'observation de 1819. Les observations dont il disposait, n'allaient pas au delà de 1842.

Les astronomes que je viens de citer, s'accordent donc à attribuer à la révolution une durée de 43 à 44 ans. J'ai entrepris l'étude du mouvement de η de la Couronne, sans me préoccuper de ce qui avait été fait déjà sur ce sujet, en me basant sur les anciennes observations de W. Herschel et sur une série d'observations que MM. Struve ont bien voulu me communiquer, et qui vont de 1826 jusqu'à 1847. Pour cet objet, j'ai fait usage des formules que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie (*Séance du 6 Décembre* 1847). Ces formules me permettent, en me fondant sur le principe des aires et l'ellipcitité de l'orbite apparente, de déterminer au moyen d'un nombre d'observations aussi grand qu'on voudra, les éléments de cette orbite et de passer ensuite aux éléments de l'orbite réelle. Les résultats auxquels je suis parvenu, m'obligent à dire brièvement la marche que j'ai suivie : les observations de MM. Struve sont complètes et au nombre de 15. J'en ai d'abord laissé quatre de côté, à cause des erreurs manifestes qui affectent les distances, ce sont celles de 1835,41 ; 1837,47 ; 1838,44 et 1839,82. Je suis arrivé à déduire des onze autres observations, de certaines relations entre les éléments, qui font dépendre ces derniers, d'une indéterminée restant arbitraire entre des limites très étendues. La durée de la révolution, par exemple, peut y varier de 38 à 150 ans, sans que l'ensemble des observations de MM. Struve, auxquelles on peut joindre celle de Sir John Herschel en 1823, cesse d'être représenté dans la limite d'erreurs admissibles.

Ainsi, ces observations qui embrassent 24 années et comprennent un déplacement angulaire apparent de 176°, ne suffisent pas pour déterminer même approximativement, les éléments de l'orbite. Il devint indispensable de recourir aux anciennes observations, et comme il ne restait qu'une arbitraire, j'en disposai de manière à satisfaire à l'observation de 1802, celle des deux anciennes, la plus voisine. J'admis la position 359° 40′ publiée deux fois *) par Sir John Herschel, quoique la position 89° 40′, *north following*, donnée dans les transactions philosophiques par W. Herschel, soit équivalente à 0° 20′; d'où incertitude de 40′ sur cette position. J'ai dû supposer que Sir John Herschel avait reconnu l'existence d'une erreur et l'avait corrigée. Or, il se trouve que la valeur de l'indéterminée qui satisfait à l'observation de 1802, satisfait en même temps à celle de 1781, si l'on renverse cette dernière; ce qui est admissible, d'après les remarques présentées plus haut sur les observations. Le problème semble donc résolu, ou du moins, il ne reste plus qu'à faire subir aux éléments approchés, de legères corrections, de manière à répresenter mieux, s'il est possible, l'ensemble des observations. Je fis cette correction, et j'obtins ainsi une première solution dans laquelle la durée de la révolution est fixée très approximativement à 66,257 ans.

Je ne me suis point arrêté à ce résultat, et j'ai cru devoir essayer de montrer qu'une autre solution était impossible. A cet effet, je renverse l'observation de 1802; et je détermine une nouvelle valeur de l'indéterminée ci-dessus mentionnée, de manière à satisfaire à cette observation renversée. J'en déduis de nouveaux éléments d'où je tire la position en 1781, et je trouve que cette position coïncide à très peu près avec celle qui a été observée, sans qu'il soit nécessaire de la renverser comme la première fois. J'ai, de cette manière, une nouvelle solution, à laquelle répond une durée de la révolution, de 42,501 ans.

Les données géométriques du problème admettent donc une double solution, différente de celles que l'on rencontre

*) Observations of 380 double and triple stars. 1825. Micrometical measures of 364 double stars. 1832. page 25.

A la p. 63: *Mélanges math. et astron.*

Eléments de l'Orbite	Seconde Solution
	dimettant { 1781,69, position 30°41′ ; 1802,69 « 179 40 }
Passage au périhélie	1805,666: 1848,167
Moyen mouvement	8,°4702
Angle (sin = excentr	28°19,′2
Longitude du noeud app. en 1835. 0	10 31, 1
Distance du Périhéli	227 9, 5
Inclinaison	± 65 39, 2
Demi grand axe (obs	1″,0125
Durée de la révoluti	42,501 ans
Excentricité	0,47441

	Dates	position	distance
Plus petit périhélie	07,237; 1849,738	274° 4′	0″,239
Plus grand aphélie ap	20,227; 1862,728	20 27	1, 293
Plus grand périhélie	96,398; 1838,899	116 6	0, 483
Plus petit aphélie ap	02,343; 1844,844	178 42	0, 632

Date	de	stance c.—obs.	Seconde Solution. Angle de position calculé — observé, dièdre	en arc	Distance calc.—obs.
1781,69	210° 41′	—	—2° 11′	—0″,046	—
1802,69	359° 40′	—	+1 56	+0,021	—
23,27	25	—	+0 26	+0,009	—
26,77	35	0″,042	—1 7	—0,023	+0″,043
29,55	43	0,010	—1 1	—0,017	—0,003
30,303	44	0,083	+0 26	+0,007	+0,096
31,63	50	0,065	—0 14	—0,003	—0,053
32,76	56	0,044	—0 46	—0,010	—0,035
35,41	74	0,137	+0 42	+0,007	—0,140
36,52	88	0,019	—2 41	—0,025	—0,027
37,47	95	0,128	+1 49	+0,016	+0,117
38,44	107	0,130	+2 50	+0,024	+0,119
39,82	127	0,088	+1 21	+0,011	—0,095
40,52	137	0,008	—0 31	—0,005	—0,012
41,50	151	0,012	—2 35	—0,024	+0,016
43,30	165	0,012	+1 5	+0,012	+0,034
45,61	183	0,017	+1 36	+0,017	+0,045
46,61	193	0,011	—0 27	—0,004	+0,014
46,88	196	—	—0 34	—0,005	—
47,64	201	0,028	+3 40	+0,030	—0,028

dans la théorie des planètes et des comètes, et tenant principalement à la double interprétation qu'on peut se permettre, des deux anciennes observations. Avant de chercher à distinguer laquelle de ces deux solutions est la vraie, je crois devoir les présenter, ainsi que leur comparaison avec les observations : on sera mieux à même de reconnaître qu'il faut chercher ailleurs que dans des considérations purement géométriques, la solution de la difficulté qui se présente ici. (V. les tableaux).

Tableau complémentaire du précédent.

Dates.	Distances calculées.	
	1ère solution.	2me solution.
1781,69	0″,507	1″,224
1802,69	1,493	0,631
23,27	1,299	1,251
46,88	0,558	0,549

Les erreurs qui subsistent dans l'une et l'autre solution sont toutes très faibles, sauf celles qui se rapportent aux quatre distances que nous avons mentionnées ci-dessus comme défectueuses. On ne doit pas avoir égard à l'erreur relative à la distance observée en 1830 par Sir John Herschel ; le demi grande axe ayant été déduit des seules observations de MM. Struve. Les deux suites d'erreurs de mêmes signes qui terminent la série des erreurs de position, dans la 1ère solution, une autre suite d'erreurs positives qui termine la série des erreurs de distance, indiqueraient tout au plus que les premiers éléments admettraient encore de légères corrections ; mais elles sont tellement faibles que l'on n'en pourrait conclure le choix à faire entre ces deux solutions. Pour nous convaincre qu'il n'y aurait guère possibilité de réduire ces erreurs, nous pouvons nous reporter aux déterminations des erreurs probables des observations micrométriques, données par M. Struve dans son grand ouvrage. Il déduit de ses observations, les nombres suivants applicables aux étoiles brillantes.

Distance moyenne.	Erreur probable d'une observation.		
	Sur l'angle de position.		Sur la Distance.
	Dièdre.	En arc.	
0″,70	2° 30′,9	0″,031	0″,074
1,48	1 52,4	0,048	0″,086
	Erreur probable de la moyenne de trois mesures.		
0″,70	1° 27′,1	0″,018	0″,042
1,48	1 3,6	0,028	0,050

Dans le cas qui nous occupe, les distances varient de 0″,5 à 1″,5 à peu près. Les erreurs probables des observations de M.M. Struve fondées sur la moyenne de trois mesures, peuvent être prises ici de 0″,02 à 0″,03, pour les angles de position; et 0″,04 à 0″,05 pour les distances. Or dans la première solution, le plus grand nombre des erreurs de position sont au dessous de 0″,02; deux seulement s'élévent à 0″,04 et 0″,03. Les erreurs des distances, sauf les cinq que nous avons exceptées tout à l'heure, restent au dessous de l'erreur probable. Dans la deuxième solution, la première observation de W. Herschel est la seule qui donne une erreur de position s'écartant un peu de l'erreur probable; et les erreurs des distances sont tout aussi admissibles que celles aux quelles donne lieu la première solution. Nous ne voyons donc jusqu'ici, aucun motif sérieux de préférer l'un des systèmes d'éléments à l'autre.

Examinons maintenant si l'on ne pourrait pas tirer parti d'une indication extraite des manuscrits de W. Herschel, et à laquelle, du reste, Sir John Herschel n'attribue pas une grande importance. En 1794,58, W. Herschel aurait vu le compagnon, dans le quadrant Nord suivant que nous pouvons interpréter Sud précédent. A cette époque, la position tirée de la première solution, est 344° 8′ avec une distance de 1″,083; elle donnerait: nord précédent. Cette position ne s'accorderait avec l'indication de W. Herschel, qu'en admettant qu'il aurait fait l'erreur d'écrire n. f. au lieu de n.

p., ce qui du reste n'aurait rien d'impossible. (D'après les chiffres que nous avons rapportés, une semblable erreur affecterait, soit l'observation de 1802, soit les publications de cette observation par Sir John Herschel). Si nous passons à la 2e solution, nous trouverons pour la même époque : position, 92° 14′; distance, 0″,504; ce qui donne sud suivant; cela ne s'accorde pas d'avantage avec l'indication d'Herschel. On devra remarquer d'ailleurs, combien cette position est voisine du parallèle de déclinaison passant par l'étoile centrale, et qu'il devait, dès lors, être difficile de décider, vu la faible distance, si elle était effectivement dans le quadrant sud suivant, plutôt que dans le quadrant nord suivant. D'ailleurs, cette circonstance remarquable, des deux étoiles situées sur le même parallèle, aurait nécessairement été notée par W. Herschel, de préférence à la vague indication n. p. ou n. f. La discussion à laquelle nous venons de nous livrer, semble moins favorable à la 2e solution qu'à la première. Néanmoins nous ne pouvons rien en induire de concluant.

Ayant épuisé les diverses considérations géométriques fournies par le sujet lui-même; il devient indispensable d'avoir égard aux circonstances physiques des observations de 1781 et 1802. Or, je lis dans les *Transactions philosophiques*, tome 72, page 119. «1781; 9 Sept. η *Coronæ*. Double, un peu inégales, blanchâtres. Elles paraissent en contact avec un grossissement de 227 fois; et quoique je puisse les voir avec ce grossissement, je ne les aurais certainement pas découvertes avec lui. Avec 460 fois, elles sont séparées d'un intervalle moindre que le $^1/_4$ du diamètre. Avec 932 fois, elles sont parfaitement séparées, et leur intervalle, un peu plus grand qu'avec 460 fois.» Herschel ajoute qu'il trouve le grossissement de 2010 fois, trop fort pour ces étoiles. Je lis encore dans le même recueil, volume de 1803, page 349. «1802; 6 Sept. η *Coronæ*. Position 89° 42′ nord suivant; 2e mesure 89° 38′. Moyenne des deux mesures, 89° 40′, Erreur avec la moyenne, 2′. En considérant ces observations, nous ne nous tromperons pas, si nous admettons que, dans des circondances favorables et avec des soins convenables, on pourra est déduire la moyenne de deux mesures micrométriques, la

position d'une étoile double, à un degré près». Rapprochons maintenant de ces documents, les distances des étoiles, tirées de nos éléments, nous aurons :

Dates.	Distances.	
	1ère solution.	2e solution.
1781,69	0″,507	1″,224
1802,69	1,493	0,631

Le récit que fait W. Herschel, de ses observations montre que la première a été difficile, à cause de la faible distances des étoiles. Avec 227 fois elles lui ont paru en contact; il a employé ensuite, des grossissements de plus en plus forts, jusqu'à celui de 2010 fois au quel il a été obligé de renoncer. Ces circonstances sont mieux en rapport avec la distance 0″,407, qu'avec la distance 1″,224 donnée par la 2e solution. Herschel aurait, en effet, plus facilement séparé les deux étoiles, avec un grossissement de 460 fois, si la distance s'était trouvée de 1″,2. La discussion de cette observation rend donc le premier système d'éléments plus probable que le second.

Quant à l'observation de 1802, nous voyons W. Herschel se borner a deux mesures, qui sont d'ailleurs très concordantes. L'observation ne semble lui présenter aucune difficulté. Ceci se conçoit dans la circonstance favorable qu'il rappelle, si la distance des étoiles est de 1″,49 ou environ; mais on aurait de la peine à s'en rendre compte, s'il s'agissait de la distance 0″,631, qui repond à la 2e solution.

Nous sommes donc conduits à regarder la première solution comme plus probable que la 2e, sinon comme la véritable. Nos prévisions à cet égard, seront confirmées ou détruites d'ici à quatre années au plus. En effet, je trouve, pour l'époque 1853,677.

1853,677	1ère Solution	2e Solution
Position	302°44′	356°30′
Distance	0″,512	0″,767

Les angles de position différeront à cette époque, de 53° environ; tandis que la différence des distances ne s'élèvera qu'à $0''{,}15$, quantité dont les observations ne permettent pas de répondre en toute rigueur, quand les distances sont si faibles. La comparaison de l'angle de position observé avec ceux que nous venons de présenter, suffira donc pour décider laquelle des deux solutions doit être rejetée. Très probablement on pourra se prononcer avant cette époque; mais n'ayant jamais observé l'étoile η de la Couronne, avec un instrument aussi puissant que la grande lunette de l'Observatoire de Poulkova, je ne puis prévoir si les deux étoiles seront séparées pour cet instrument, lorsque le compagnon sera dans le voisinage du plus petit périhélie apparent de l'une ou de l'autre des deux orbites. Si l'on conçoit qu'il faille en outre tenir compte des erreurs des éléments, on reconnaîtra qu'il ne convient pas de fixer un délai trop rapproché, pour se prononcer définitivement.

Paris le 25 Mars 1849.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No.* 7.)

$\frac{8}{20}$ Juin 1849.

Troisième Note sur les Étoiles Doubles; par M. YVON VILLARCEAU.

ξ de la grande Ourse.

M. Savary qui, le premier, à abordé le problème de la détermination du mouvement elliptique des étoiles doubles a fait, comme on le sait, l'application de ses formules au système binaire ξ de la grande Ourse.

M. Savary n'a présenté son résultat que comme un exemple de calcul, en indiquant la possibilité d'une grande différence entre ses éléments et les véritables. Les observations dont il disposait, n'allant que jusqu'à 1827, il est remarquable que les déterminations qu'il en a déduites, ne s'écartent pas d'avantage de celles auxquelles on arrive en employant des observations qui comprennent 20 années de plus. Les plus grandes difficultés qui se sont présentées à M. Savary, ont dû se trouver dans le passage des positions observées à celles qu'il leur substitue, et qui servent de base à ses calculs. Il est seulement à regretter que le savant académicien n'ait pas cru devoir entrer dans quelques détails à cet égard.

M. Mädler s'est depuis occupé de la même etoile, et en faisant usage d'observations qui s'étendent jusqu'à 1841, il a obtenu des éléments qui ne diffèrent pas notablement de ceux que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Le système de ξ de la grande Ourse se compose de deux étoiles de 4^e et de 5^e grandeur suivant M. Struve; MM. J. Herschel et South les taxent de 6^e et 6$^1/_4$ grandeur.

La plus ancienne des observations que l'on en possède date de 1781,97; elle est due à Herschel. On lui doit en outre deux observations faites en 1802 et 1804; celles-ci au point de vue de la détermination des éléments, n'équivalent qu'à une seule position distincte. — Depuis 1819 jusqu'à l'époque actuelle, de nombreuses observations ont été faites par divers astronomes entre lesquels il faut surtout citer MM. Struve et Sir John Herschel. La suite de ces observations est presque non interrompue.

J'ai obtenu une première approximation en fesant l'application de la nouvelle méthode que j'ai présentée à l'Académie dans la séance du 26 mars. A cet effet, et pour simplifier les calculs, j'ai réuni en six groupes, tant pour les angles de position que pour les distances, 20 observations de position et 17 de distance, s'étendant de 1819 à 1847. Une construction graphique préparatoire m'avait montré la possibilité d'opérer ce groupement, sans que le défaut d'uniformité dans le mouvement apparent dût entraîner de notables erreurs, eu égard à celles des observations elles-mêmes. J'ai reconnu, ainsi que je l'avais pensé d'abord, que ces observations seules, embrassant 28 années et comprenant un déplacement angulaire apparent de 152°, sont néanmoins insuffisantes pour la détermination même approchée des éléments: par exemple, on peut y satisfaire, dans la limite d'erreurs tolérables, en élevant la durée de la révolution à 166 ans; très probablement on pourrait encore la porter au delà de ce chiffre, comme en-deça du véritable qui est 61,5 ans environ. Il y a plus: dans cette circonstance, le problème est doublement indéterminé, en ce sens que deux des constantes d'où dépendent les éléments, peuvent recevoir des variations indépendantes. Les anciennes observations sont nécessaires et suffisantes pour lever la double indétermination. En composant celle de 1781,97 aux observations modernes, on obtient immédiatement, pour valeur approchée de la durée de la révolution 62 ans. Le moyen mouvement s'en déduit; il en résulte une équation de condition entre les deux constantes

indéterminées, propre à fournir aisément l'une de celles-ci en fonction de l'autre. De cette manière, il ne reste plus qu'une arbitraire dont on fixe la valeur par la condition de satisfaire à un angle de position unique résultant de la combinaison des deux observations de 1802 et 1804. Le degré d'approximation du résultat auquel je suis parvenu de la sorte, est assez satisfaisant malgré l'emploi d'observations un peu défectueuses comprises de 1819 à 1823, qui a pour effet d'altérer les angles de position calculés dans cet intervalle. (Plusieurs de ces observations ont été faites aux instruments méridiens).

S'il ne s'était agi que d'obtenir une orbite de ξ de la grande Ourse, j'aurais pu m'arrêter à cette première détermination. Mais il est important pour la discussion des observations et le perfectionnement des procédés micrométriques auxquels cette discussion peut conduire, d'obtenir le plus grand dégré de précision possible. Aussi me suis-je proposé de corriger mes premiers éléments, en fesant usage de toutes les observations connues d'angles de position, deux seules exceptées; et de toutes mesures de distances obtenues par M. M. Struve postérieurement à 1825. J'ai aussi employé une observation de 1848 que M. Otto Struve a eu l'obligeance de m'envoyer, et que j'ai reçue depuis l'achévement de la première partie de mon travail. Au moyen des erreurs, résultant de la comparaison des observations avec les éléments approchés, j'ai formé huit groupes pour les angles de positions et cinq pour les distances. J'en ai déduit des positions dites normales que j'ai substituées aux observations. Les éléments corrigés, en fesant usage de ces positions *normales*, et comparés aux observations, m'ont donné, pour chacun des groupes ci-dessus, des erreurs dont les moyennes, coïncident à très peu près avec les erreurs qui résultent de la comparaison avec les positions *normales*. De ceci résulte la preuve que je n'aurais pas obtenu sensiblement plus de précision en opérant sur toutes les observations, au lieu d'opérer sur les positions normales. Je présente ici les éléments approchés et corrigés, puis leur comparaison avec les observations. (Voir les tableaux.)

Ces deux systèmes d'éléments ne présentent pas de notables

Eléments de l'orbite relative de ξ de la grande Ourse en 1826, 0 $\left\{ \begin{array}{l} AR = 11^h\,8,^m8 \\ D = +32^0\,30' \end{array} \right\}$ 4^e et 5^e gr.							Première approximation.			Seconde approximation.			
Passage au Périhélie vrai							1847,426. 1870,496			1846,950. 1870,495			
31,34	201	55	—	—	—	Dawes	+0 11	+0, 000					
31,44	203	49	1, 706	600	5	W. Struve	−2 22	−0, 071	+0, 002	−2 10	−0, 065	+0, 013	
32,16	198	10	—	—	—	J. Herschel	−1 18	−0, 039	—	−1 6	−0, 033	—	
32,27	196	43	—	—	—	Dawes	−0 32	−0, 016	—	−0 20	−0, 010	—	
32,41	195	56	1, 750	600	5	W. Struve	−0 37	−0, 019	−0, 011	−0 25	−0, 013	−0, 006	
33,14	189	58	—	—	—	J. Herschel	+0 53	+0, 027	—	+1 3	+0, 032	—	
33,23	189	50	—	—	—	Dawes	+0 28	+0, 014	—	+0 39	+0, 020	—	
33,84	188	25	1, 762	1000	5	W. Struve	−1 43	−0, 054	+0, 037	−1 34	−0, 049	+0, 036	
35,41	180	11	1, 764	920	5	id.	−2 12	−0, 073	+0, 119	−2 10	−0, 071	+0, 112	
36,44	174	12	1, 972	800	4	id.	+1 31	+0, 051	−0, 025	+1 26	+0, 048	−0, 034	
37,47	165	19	1, 927	—	3	Voir Additam.	+2 28	+0, 087	+0, 089	+2 18	+0, 080	+0, 078	
37,53	167	23	—	—	—	Encke	+0 7	+0, 004		−0 3	−0, 002	—	
38,43	160	23	2, 260	—	9	Voir Additam.	+3 6	+0, 113	− 0, 176	+2 50	+0, 102	−0, 188	
39,47	157	58	—	—	—	Galle	+1 11	+0, 045	—	+0 50	+0, 031	—	
40,25	152	14	—	—	—	Kaiser	+3 51	+0, 149	—	+3 26	+0, 132	—	
40,40	155	24	2, 286	858	7	W. et Otto Struve	+0 7	+0, 005	−0, 055	−0 18	−0, 012	−0, 069	
41,29	150	14	—	—	—	Mädler	+2 4	+0, 083	—	+1 34	+0, 062	—	
41,402	152	8	2, 282	858	6	Otto Struve	−0 16	−0, 011	+0, 025	−0 47	−0, 031	+0, 012	
42,40	148	47	2, 410	858	4	id.	−0 20	−0, 014	−0, 027	−0 55	−0, 038	−0, 040	
44,788	140	52	2, 526	858	5	id.	+0 14	+0, 010	+0, 033	−0 29	−0, 021	+0, 022	
46,365	138	49	2, 620	858	4	id.	−2 3	−0, 096	+0, 047	−2 51	−0, 132	+0, 038	
47,407	131	50	2, 700	858	3	id.	+2 15	+0, 107	+0, 034	+1 25	+0, 067	+0, 025	
48,406	128	43	2, 752	858	5	id.	+2 55	+0, 142	+0, 042	+2 2	+0, 099	+0, 034	

différences; cependant la correction des premiers a eu pour résultat d'atténuer sensiblement les écarts entre le calcul et l'observation. Dans la 2e approximation, les plus fortes erreurs des distances sont relatives à 1835 et 1838; la dernière atteint presque 0″,2; il est manifeste d'après la comparaison des observations voisines, que la plus forte partie de ces erreurs doit être attribuée aux observations elles-mêmes. Les autres distances sont assez bien représentées. Quant aux angles de position, ils offrent des écarts de 0″,10 à 0″,13 qui sont au nombre de quatre seulement, et imputables en grande partie aux observations. En prenant la moyenne des écarts que laissent subsister les éléments corrigés, on trouve, tant pour les angles de position, que pour les distances, le même nombre 0″,046. Ce résultat montre le parti avantageux que l'on peut tirer des distances observées par MM. Struve. (Je n'ai point comparé les distances observées par d'autres astronomes, attendu qu'elles ne sont pas assez nombreuses pour qu'on puisse déduire la valeur du demi-grand axe correspondant à chaque observateur.) M. Struve estime que l'erreur probable d'une détermination fondée sur la moyenne de trois mesures, les distances étant peu différentes de celles consignées dans le tableau précedent, est de 0″,05 pour les distances et de 0″,03 pour les angles de position. L'erreur moyenne ci-dessus est plus faible dans le cas des distances et de moitié plus forte dans le cas des angles de position. La concordance n'est pas ici tout à fait aussi satisfaisante relativement aux positions, que celles que j'ai obtenue, dans mes recherches sur η de la Couronne. Les écarts dans la 2e approximation présentent des permanences de signe que la correction des éléments elliptiques ne peut faire disparaître. Quant à la cause, il ne saurait être question actuellement de la rechercher dans l'action perturbatrice d'une étoile qui échappe à la puissance des instruments astronomiques, ou dans un phénomène d'observation, puisque les observations suffisent à peine pour déterminer les constantes du mouvement elliptique.

Paris, le 18 mai 1849.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No.* 7.)

$\frac{8}{20}$ Juin 1849.

Extrait d'une lettre de M. YVON VILLARCEAU à M. O. Struve.

Paris, le 22 mai 1849.

Monsieur.

.... Je venais de terminer la première approximation de l'orbite de ξ de la Grande Ourse lorsque j'ai reçu votre lettre; j'ai profité de l'observation de 1848 pour corriger les éléments; mais je n'ai pu, malgré tout le soin possible, amener les écarts entre le calcul et l'observation à ne pas excéder quelque fois le nombre 0″,05 ainsi que vous l'espériez. Les distances, sauf trois ou quatre d'entr'elles, sont représentées d'une manière fort satisfaisante. Les angles de position sont affectés d'erreurs qui conservent le même signe pendant 3 à 4 ans. Lorsque cette étoile aura été observée pendant une partie plus considérable de sa révolution, de manière que les éléments puissent s'en déduire sans erreurs sensibles dépendant des observations, il y aura lieu de rechercher si un phénomène d'observation ou des perturbations produites par un astre invisible de ce système ne pourraient pas rendre compte de cette permanence des signes des erreurs. Pour le moment, je ne crois pas qu'il soit utile de s'en occuper. Quoiqu'il en soit, le me permettrai d'attirer votre attention sur ces erreurs.

Les observations nouvelles que vous m'annoncez, me mettront à même d'entreprendre l'étude de l'une des plus intéres-

santes étoiles binaires 42 Comae. Je vous prierais à ce sujet de vouloir bien m'indiquer quel est le maximum de la distance des centres lorsque, sans pouvoir la mesurer, vous indiquez que l'étoile est allongée.

Quant à ζ Cancri, j'ai de la peine à croire que les données de l'observation soient suffisantes pour déterminer tous les éléments de l'orbite de *B* par rapport à *A:* et je pense que c'est cette détermination qu'il convient d'effectuer tout d'abord. Cependant à l'aide de l'observation de 1849, je pourrai essayer. Les soins minutieux que vous apportez dans les mesures relatives à ce système, hâteront, je l'espère, le moment où il sera possible d'entreprendre utilement le calcul des perturbations des deux premières par la 3^e des étoiles de ce groupe.

Permettez moi, Monsieur, de vous confesser une pensée qui m'est venue à l'esprit, par suite de vos recherches sur les mouvements des étoiles doubles. Voici cette idée qui devra, au premier abord, vous paraître une hérésie scientifique: Bien qu'il résulte des recherches des astronomes, que le mouvement observé dans les systèmes binaires ne se soit jusqu'ici nulle part montré en opposition avec la loi de la pesanteur; nous n'avons cependant pas encore le droit de conclure que cette loi régit effectivement les mouvements des étoiles doubles, comme elle régit les mouvements planétaires. L'analogie a fait soupçonner l'extension de la loi de la gravitation aux mondes différents du notre; mais la preuve de son universalité ne me paraît pas encore acquise à la science. Je dois me hâter de dire que je n'ai aucun doute sur l'universalité de la pesanteur; mais je pense que quand il s'agit d'un fait aussi capital, qui intéresse à un aussi haut degré la philosophie des sciences, il convient de distinguer une probabilité d'une preuve acquise. Eh bien, la preuve n'est point encore faite, et ce n'est guère qu'à partir de l'époque actuelle que cette preuve pourra commencer à se produire! Voici ce sur quoi je me fonde. Les étoiles dont je me suis occupé, sont celles qui se prêtent le mieux à la détermination de tous les éléments. Malgré le plus ou moins grand nombre d'observations assez précises dont on dispose actuellement, grâce aux

précieuses mesures de MM. Struve, ces observations n'équivalent pas à autant de données distinctes pour chaque étoile. J'ai montré, dans chacun des cas, combien le problème reste indéterminé lorsque l'on n'utilise que les observations modernes (angles et distances), et comment les anciennes observations sont nécessaires pour lever l'indétermination. L'ensemble des observations, pour chaque étoile n'équivaut pas, selon moi, à plus de 7 à 8 données réellement distinctes. Or on sait que 7 données sont nécessaires pour déterminer tous les éléments y compris le $^1/_2$ grand axe. Considérons le nombre des données distinctes comme étant seulement égal à sept. Les éléments elliptiques pourront être calculés de manière à représenter ces données.

Or d'une autre part, supposons que l'intégration des équations différentielles d'un mouvement produit par une loi différente de la loi de la pesanteur, amène aussi sept constantes arbitraires; on pourra généralement déterminer ces constantes de manière à satisfaire aux données de l'observation. Il en résulte donc qu'une loi du mouvement, différente de la loi de la pesanteur, pourra généralement représenter, comme cette loi, sept données fournies par l'observation, et qu'il sera dès lors impossible de se prononcer entre les deux. Pour conclure en faveur de la loi de la pesanteur, il faudra au moins que les éléments elliptiques, déterminés par les sept données, représentent, en les corrigeant s'il y a lieu, une huitième donnée distincte. Et pour que la preuve puisse être mise hors de toute contestation, on avouera qu'une neuvième donnée satisfaite, ne serait pas superflue. Or, je le répète, c'est tout au plus, si actuellement l'ensemble des observations d'une même étoile représente huit données réellement distinctes. Je crois donc avoir raison de dire que la preuve commence seulement maintenant.

Je vous aurais fait connaître plus tôt la méthode pour la détermination des orbites des étoiles doubles, que j'ai déposée à l'Académie (de Paris) le 7 décembre 1847, si j'avais cru quelle pût vous intéresser. Aujourd'hui je m'empresse, selon le désir que vous m'en exprimez, de vous transmettre les formules sur lesquelles elle repose.

Je pense que cette méthode donnerait du premier coup les éléments très approchés, si non les plus probables, si l'on disposait d'observations complètes embrassant toute l'orbite. Comme il n'en est pas ainsi généralement, je ne l'emploie que pour obtenir une première approximation que je corrige ensuite.

Admettons que l'on possède un nombre quelconque d'observations, supérieur au nombre théoriquement nécessaire; je dirai en son lieu, comment il faudrait s'y prendre pour résoudre le problème théorique de la détermination des éléments au moyen de 4 observations complètes.

La méthode exige que l'on emploie les angles de position et les distances. Les premiers sont supposés corrigés de l'effet de la précession. Si l'on n'a pas de distances observées, on pourra déduire du mouvement angulaire, par interpolation, des nombres proportionnels à ces distances.

Désignant les angles de position par α,
les distances . . . . . par ϱ, [1])

on aurait
$$\varrho = \sqrt{\frac{\text{constante}}{\frac{d\alpha}{dt}}}$$

une seule distance observée donnerait à la rigueur la valeur absolue de la constante.

Soient x et y les coordonnées rectangulaires de l'ellipse projetée ou apparente, on aura

$$x = \varrho \cos \alpha, \; y = \varrho \sin \alpha.$$

Désignons par
$$F = o$$

l'équation de l'ellipse apparente qui sera d'ailleurs

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex - 1 = 0.$$

---

1) L'application de ces formules exige que les mesures des distances soient du même observateur ou ramenées à un même observateur. Je n'ai fait usage que de celles qui ont été données par MM. Struve.

F désignera le premier membre de cette équation. La substitution de cinq systèmes de valeurs x et y donnera le moyen de déterminer a, b, c, d, e. Pour en employer un plus grand nombre, il semble qu'il suffise ici d'appliquer la méthode des moindres carrés; mais j'avoue que la considération du minimum de la somme ΣF^2 ne me satisfait pas. Je la remplace par la condition que la somme des carrés des distances normales entre les points donnés et la courbe cherchée, soit un minimum. Lorsque la fonction F est quelconque, cette condition conduit à autant d'équations de la forme

$$\Sigma \frac{F\frac{dF}{da}}{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}=0$$

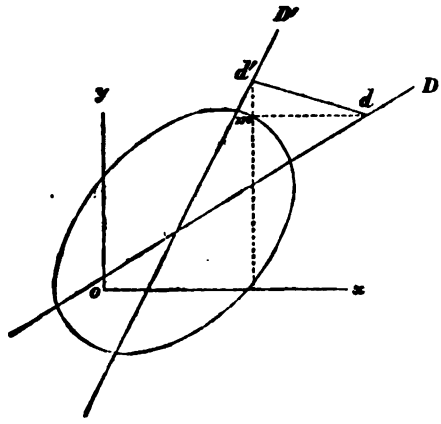
qu'il y a de paramètres distincts a, b, c.. dans la fonction F. Soit ici p' le poids d'une observation; cette formule conduit aux équations

$$\Sigma \frac{p'y^2F}{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}=0;\ \Sigma \frac{p'xyF}{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}=0;\ \Sigma \frac{p'x^2F}{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}=0;$$

$$\Sigma \frac{p'yF}{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}=0;\ \Sigma \frac{p'xF}{\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}}=0;$$

j'ai quelquefois pris pour valeur de p' le produit du nombre des mesures multiplié par le millième du grossissement.

Quant au dénominateur $\frac{dF^2}{dx^2}+\frac{dF^2}{dy^2}$, il suffit d'en avoir une valeur approchée, comme de p'. Or voici une construction très simple qui donne cette valeur, ou mieux une valeur proportionnelle.



Ayant construit à vue une courbe elliptique qui passe le plus près possible des points observés, je trace les deux diamètres conjugués D et D' des axes y et x.

Soit m le point pour lequel je veux avoir la valeur $\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2}$; je mène les droites md, md', parallèles à ox et oy, et je joins dd' (Notons que cette droite est parallèle à la tangente en m). On a alors

$$\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} = b^2 \cdot (\overline{dd'})^2$$

Le facteur b^2 se trouvant commun à tous les dénominateurs dans les sommes Σ', on peut en faire abstraction et substituer à chacun des dénominateurs le carré de la ligne $\overline{dd'}$.

Pour aller plus loin maintenant, il faut substituer aux points observés qui ne se trouvent pas généralement sur la courbe $F = 0$, des points situés sur cette courbe. Cela peut se faire de deux manières.

1° En les remplaçant par les pieds des normales menées des points donnés à la courbe. Désignant spécialement par x' et y' les coordonnées observées et par x et y celles de la courbe, on a

$$x = x' - \frac{F}{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2}} \frac{dF}{dx},$$

$$y = y' - \frac{F}{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2}} \frac{dF}{dy}$$

2° En conservant les angles de position observés, comme étant un peu plus exacts que les distances, et tirant celles-ci de l'équation de la courbe transformée, en remplaçant x et y par $\rho \cos \alpha$ et $\rho \sin \alpha$: on arrive au même résultat plus simplement au moyen des formules suivantes

$$x = x' - \frac{F}{x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy}} x'$$

$$y = y' - \frac{F}{x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy}} y'$$

Disons ici quelques mots du problème théorique. Étant donnés seulement quatre systèmes de coordonnées x et y, on ne pourra pas déterminer les cinq constantes a, b, c, d, e; mais on obtiendra seulement la valeur de quatre d'entr'elles en fonction de la cinquième. Voici maintenant comment on déterminerait cette cinquième constante, par des tâtonnements. Au moyen d'une valeur arbitraire de cette quantité, on calculerait, par les formules qui vont être données ci-dessous, les trois secteurs compris entre les quatre rayons vecteurs projetés; et les quotients de ces secteurs divisés par les temps correspondants, donneraient trois valeurs de la constante des aires généralement différentes. On ferait varier l'indéterminée ci-dessus, jusqu'à ce que les valeurs de la constante des aires déduites de deux seulement des secteurs, deviennent égales. La valeur de l'indéterminée satisfaisant à cette condition serait la valeur cherchée, et l'on aurait en même temps celle de la constante des aires. Mais les données devront en outre satisfaire à la condition que le troisième secteur attribue à la constante des aires la valeur commune déduite des deux au-

tres. On devait en effet rencontrer une équation de condition entre les données, puisque celles-ci sont au nombre de 8, alors que 7 suffisent théoriquement. La surface de l'ellipse divisée par la constante des aires, donnerait ensuite la durée de la révolution, et le reste s'achèverait comme ci-dessous.

Reprenons le problème pratique.

Les observations complètes n'embrassant pas actuellement toute la circonférence de l'ellipse, ne suffiront généralement pas pour déterminer les cinq inconnues a, b, c, d, e. Il faudrait même se garder actuellement d'accepter comme racine du système des équations proposées celle qui résulte de l'équation finale, attendu que les coefficients des deux dernières équations à 2 inconnues seront généralement proportionnels. Le problème sera presque complètement indéterminé. Alors il faudra se contenter d'exprimer quatre des inconnues en fonctions de la cinquième, les anciennes observations serviront à fixer la valeur de celle-ci, par la condition des aires proportionnelles au temps. Notons en passant, que la variation de la cinquième inconnue n'aura pas pour résultat d'altérer sensiblement l'étendue du secteur limité aux observations modernes qui se suivent presque sans interruption; cela se voit à priori. On en pourra donc déduire une valeur de la constante des aires à peu près indépendante de la valeur du coefficient inconnu ou indéterminé entre certaines limites. Or une ancienne observation suffira généralement. Comme l'angle de position seul est donné, on tirera de l'équation $F = 0$, en attribuant une valeur arbitraire au coefficient inconnu, la valeur de la distance, et par suite les coordonnées relatives à l'ancienne observation. Il sera facile d'en déduire le secteur limité par les rayons vecteurs correspondants à cette observation et à la plus ancienne des observations modernes par exemple, ou en déduire, en divisant par le temps écoulé entre ces observations, la valeur de la constante des aires; et il faudra faire varier l'inconnue, jusqu'à ce que cette constante coïncide avec celle que fournissent les observations modernes.

Voici les formules que j'emploie pour calculer les secteurs elliptiques.

Soient X, Y les coordonnées du centre de l'ellipse projetée,

S la surface de cette ellipse, π le nombre 3.1415926,

posant . . . . $p^2 = 4ac - b^2$ . . . . . .

j'ai d'abord

$$X = \frac{1}{p^2}(bd - 2ae);\ Y = \frac{1}{p^2}(be - 2cd);$$

$$\frac{S}{2\pi} = \frac{1}{p^2}(ae^2 - bed + cd^2 + p^2).$$

Soient x_o et y_o les coordonnées correspondant au temps t_o

x_i et y_i . . . . . t_i

S_i l'aire du secteur décrit pendant le temps $t_i - t_o$

supposée positive, lorsque le rayon vecteur marche dans le sens de x à y ou direct; je fais

$$x'' = x_i - x_o,\ y'' = y_i - y_o \text{ et j'ai ensuite}$$

$$S_i = \frac{1}{2}(Xy'' - Yx'') +$$

$$\frac{S}{2\pi}\,\text{angle}\left\{\text{tang} = \frac{\frac{1}{2}(x_o y'' - y_o x'') - \frac{1}{2}(Xy'' - Yx'')}{\frac{S}{2\pi} - \left(\frac{a}{2p}y''^2 + \frac{b}{2p}y''x'' + \frac{c}{2p}x''^2\right)}\right\}$$

Pour appliquer cette formule, on doit prendre l'angle donné par sa tangente, de manière que son sinus et son cosinus aient respectivement pour signes, ceux du numérateur et du dénominateur de la tangente. Dans le cas où $t_i - t_o$ est positif, et dans l'hypothèse du mouvement direct, si S_i se trouvait négatif, il faudrait ajouter 2π à l'angle obtenu, ou S à S_i, de manière que cette dernière quantité soit positive. Il faudrait, au contraire, retrancher, dans le cas du mouvement rétrograde si elle était positive. On doit, en un mot, opérer de manière que S_i ait le signe de $t_i - t_o$ dans le mouvement direct, et le signe contraire dans le mouvement rétrograde.

Les quantités a, b, c, d, e étant déterminées par les conditions précédentes, j'emploie les formules suivantes pour calculer les éléments indépendants du temps.

Soient Ω la longitude du noeud ascendant comptée de l'axe des x,

I l'inclinaison de l'orbite réelle sur le plan de l'orbite apparente,

$E = \sin \eta$, l'excentricité de l'orbite réelle,

II le demi paramètre,

A le demi grand'axe,

$\varpi - \Omega$ la distance du périhélie au noeud,

ou ϖ la longitude du périhélie dans l'orbite;

$2B$ étant une auxiliaire qu'on pourra toujours supposer comprise entre $+90°$ et $-90°$.

$$\operatorname{tang} 2B = -\frac{b}{a-c}$$

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{d}{e}$$

Pour plus de commodité on prendra ψ de manière que son sinus et son cosinus aient respectivement les signes de d et de e.

$$\operatorname{tang} 2\gamma = \frac{\sin 2(\psi - B)}{\cos 2(\psi - B) - \frac{4\cos^2 \psi}{e^2} \cdot \frac{a-c}{\cos 2B}}$$

Dans la formule précédente, 2γ doit être choisi de manière que $\sin 2\gamma$ soit de signe contraire à $\sin 2(\psi - B)$.

$$\Omega = B + \gamma$$

$$K' = -\left(1 + 4\frac{\cos^2 \psi}{e^2}(a+c)\right)\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2(\psi - B)}$$

$$\operatorname{tang}^2 I = \frac{2}{K' - 1}$$

I doit être pris aigu dans le mouvement direct, et obtus dans le mouvement rétrograde.

$$\operatorname{tang} g = \operatorname{tang}(\psi - \Omega)\cos I; \quad g = (\varpi - \Omega)$$

[prendre g de sorte que son cos . ait le signe de $\cos(\psi - \Omega)$].

On peut se servir, pour vérification, de l'équation suivante

$$\text{tang } 2\gamma = -\frac{\sin 2\gamma \cos I}{(1 - \frac{1}{2}\sin^2 I)\cos 2\gamma - \frac{1}{2}(a+c)\frac{\cos 2B}{a-c}\sin^2 I}$$

$$e''' = \frac{e}{\cos\psi}\,\frac{\cos(\psi - \Omega)}{\cos g}$$

$$\left.\begin{aligned} a''' + c''' &= a + c - \frac{1}{2}\left(a + c + \frac{a-c}{\cos 2B}\cos 2\gamma\right)\sin^2 I \\ a''' - c''' &= \frac{1}{4}e'''^2 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } a''' \text{ et } c'''$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{a'''}};\ E \text{ ou } \sin\eta = \frac{1}{2}e'''\Pi;\ A = \frac{1}{c'''\Pi}$$

pour vérification $\dfrac{S}{\pm\cos I} = \pi A^2 \cos\eta$. [2])

Il reste maintenant à déterminer le moyen mouvement de la longitude moyenne de l'époque. Soit K la constante des aires, on a d'abord $K = \dfrac{S_i}{t_i - t_o}$

T la durée de la révolution, $T = \dfrac{\pm S}{K}$

N le moyen mouvement, $N = \dfrac{2\pi}{T}$

En partant d'un angle de position α supposé assez exact, on remontera par les formules connues à la longitude de l'époque ε.

$$\text{tg}(v - \Omega) = \frac{\text{tg}(\alpha - \Omega)}{\cos I},\ V = v - \Omega - (\tilde{\omega} - \Omega),\ \text{tg}\tfrac{1}{2}u = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}V}{\text{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\eta)}$$

$$Nt + \varepsilon - \tilde{\omega} = u - E\sin u;\ \text{d'où } \varepsilon.$$

---

2) Dans ces formules, quelques facteurs peuvent, dans certains cas, se trouver mal déterminés; il sera toujours possible, tant que les inclinaisons ne seront pas très fortes, de les remplacer par leurs valeurs bien déterminées que l'on tirera des formules qui donnent les valeurs des tangentes des angles, $2B$, ψ, 2γ et g.

Si l'on voulait faire concourir tous les angles de position à la détermination de ϵ et de K, ce qui changerait un peu les valeurs précédentes de T et de N, mais de manière à mieux représenter l'ensemble des observations modernes, voici comment on pourra s'y prendre:

Soit α_o la valeur de α correspondant à t_o; $\delta\alpha_o$ l'erreur de cette position, de sorte que $\alpha_o + \delta\alpha_o$ soit la véritable valeur de α; S_o le petit secteur correspondant à $\delta\alpha_o$ de telle sorte que l'on ait

$$S_o = \frac{1}{2}\rho_o\left(\rho_o + \delta\rho_o\right)\delta\alpha_o.$$

On posera

$$S_i - S_o = K(t_i - t_o).$$

(En donnant à i deux valeurs distinctes, on aura deux équations propres à fournir les valeurs de K et de S_o.) Passons tous les termes dans le 1er membre

$$S_i - S_o - K(t_i - t_o) = 0$$

et si l'on emploie plus de deux équations de cette forme, le premier membre exprimera l'erreur superficielle, que l'on transformera en erreur d'arc en divisant par $\frac{1}{2}\rho_i$. Écrivant donc plusieurs équations de la forme

$$\frac{2}{\rho_i}[S_i - S_o - K(t_i - t_o)] = 0$$

on pourra faire l'application de la méthode des moindres carrés qui donnera les meilleurs valeurs de K et S_o. On aura ensuite

$$\delta\alpha_o = \frac{S_o}{\frac{1}{2}\rho_o\left(\rho_o + \delta\rho_o\right)},$$

on négligera d'abord $\frac{1}{2}\delta\rho_o$; la valeur de $\delta\alpha_o$ permettra de calculer la nouvelle valeur de ρ_o d'où $\delta\rho_o$; autrement on aurait

$$\delta\varrho = \frac{y\dfrac{dF}{dx} - x\dfrac{dF}{dy}}{x\dfrac{dF}{dx} + y\dfrac{dF}{dy}}\,\varrho\delta\alpha.$$

Ce procédé pourrait être employé à la première détermination de K ou de la constante des aires.

Cette méthode présente beaucoup d'analogie avec celle que Sir John Herschel a présentée sommairement à l'Académie des Sciences, il y a quelques mois. Je lui ai communiqué mes formules et néanmoins il considère sa méthode et la mienne comme distinctes, surtout à cause des détails d'application. J'en ai fait usage pour obtenir les orbites de η Coronae et γ Virginis.

J'ai présenté, le 26 mars dernier, à l'Académie une autre méthode fondée sur l'interpolation. Les formules en lesquelles elle se traduit, sont exposées dans les comptes rendus de l'Académie. Elles sont d'une assez grande simplicité; la seule difficulté de l'application de cette méthode est dans l'interpolation, ou mieux la détermination des dérivées par rapport au temps, de l'angle de position ou du rayon vecteur projeté. Je ne vois pas de formules d'interpolation que l'on puisse préférer à celles de M. Cauchy pour cet objet. Seulement, j'ai été obligé de les compléter en donnant le moyen simple de calculer certaines fonctions implicites que M. Cauchy a laissé au calculateur le soin de développer. Je considère cette méthode comme étant d'une application plus rapide que la précédente. Je m'en suis servi pour obtenir les orbites de ζ d'Hercule et ξ de la Grande Ourse.

Enfin j'ai une 3^e méthode qui a l'avantage de s'appliquer aux orbites inclinées d'une manière quelconque, tandisque les précédentes tombent en défaut lorsque l'inclinaison est voisine de 90°. J'essaierai de l'appliquer à 42 Comae.

Agréez etc....

Yvon Villarceau.

P. S. Les formules par lesquelles je passe de l'orbite projetée à l'orbite réelle, commençant à tang $2B$ et finissant à $\frac{S}{\pm \cos I}$, ne donnent lieu à aucune ambiguïté, autre que l'ambiguïté inévitable $\pm I$, lorsque l'on se conforme aux prescriptions qui les accompagnent. Je les ai déduites par la transformation des coordonnées, de la condition que l'orbite réelle ait pour projection l'orbite apparente et que son foyer coïncide avec l'étoile centrale.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. VIII. No.* 12.)

28 Septembre
10 Octobre 1849.

SUR LES RACINES ÉGALES DES POLYNOMES ENTIERS, PAR M. OSTROGRADSKY.

1) Désignons par la lettre P un polynome entier

$$ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

dans lequel x représente une quantité variable, et a, a_1, a_2,... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n sont des coefficients numériques.

Il s'agit de trouver les facteurs égaux, s'il y en a, du polynome P.

La détermination de ces facteurs résulte, comme corollaire fort simple, d'un théorème très connu dont on trouve la démonstration dans la plupart de traités d'algèbre. Par ce théorème, le plus grand commun diviseur d'un polynome entier et de sa dérivée est composé des mêmes facteurs simples que le polynome lui même, seulement chaque facteur y entre une fois de moins. Ainsi, tout facteur qui divise le polynome une seule fois, n'appartient pas au diviseur. Ceux qui dans le polynome sont doubles, triples, quadruples etc., deviennent respectivement dans le diviseur, simples, doubles, triples, etc. Il s'en suit qu'en divisant un polynome par le plus grand diviseur commun à ce polynome et à sa dérivée le quotient représentera le produit de tous les facteurs du polynome, mais dont chacun n'y entrera qu'une seule fois, ou à la première puissance.

Pour faire usage de ce théorème, on cherche successivement le plus grand commun diviseur P_1 de

$$P \text{ et } \frac{dP}{dx},$$

le plus grand commun diviseur P_2 de

$$P_1 \text{ et } \frac{dP_1}{dx},$$

le plus grand commun diviseur P_3 de

$$P_2 \text{ et } \frac{dP_2}{dx},$$

ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un diviseur P_{i-1} qui n'a pas de facteurs communs avec sa dérivée; ce qui donnera

$$P_i = 1$$

Les diviseurs

$$P_1, P_2, P_3 \ldots P_{i-1}, P_i$$

présentent une suite de polynomes entiers qui ne renferment d'autres facteurs que ceux de P, mais le degré de multiplicité des facteurs dont il s'agit diminue à mesure que le n^0 des diviseurs augmente; en sorte que le diviseur P_{i-1} ne renfermera que les facteurs dont le degré de multiplicité dans P est i, et il ne les renfermera qu'à la première puissance. Dans $P_i = 1$, les facteurs de P sont à la puissance zéro.

Cela étant, qu'on divise P par P_1, P_1 par P_2, P_2 par $P_3 \ldots$ P_{i-2} par P_{i-1}, et enfin P_{i-1} par P_i; l'on obtiendra i quotients que nous désignerons respectivement par

$$Q, Q_1, Q_2, \ldots Q_{i-2}, Q_{i-1},$$

ensorte que

$$\begin{aligned} P &= QP_1 \\ P_1 &= Q_1 P_2 \\ P_2 &= Q_2 P_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ P_{i-2} &= Q_{i-2} P_{i-1} \\ P_{i-1} &= Q_{i-1} P_i. \end{aligned}$$

Le premier de ces quotients Q est évidemment le produit de tous les facteurs simples de P, pris, chacun, une seule fois;

le second quotient Q_1 n'est formé que des facteurs doubles, triples, quadruples, etc. de P, qui sont tous réduits à leur première puissance ; Q_2 est le produit des facteurs de P, à commencer par les triples, réduits à la première puissance ; ainsi de suite, enfin Q_{i-1} ne renfermera que la première puissance des facteurs de P au degré i de multiplicité. Il n'y aura pas dans P des facteurs d'un degré plus élevé que i, autrement le polynome P_{i-1} et sa dérivée

$$\frac{dP_{i-1}}{dx}$$

auraient un facteur commun.

Il résulte de la composition des quotients

$$Q, Q_1, Q_2, \ldots Q_{i-2}, Q_{i-1}, Q_i$$

qu'en divisant un quelconque par celui qui le suit, on trouvera le produit des facteurs de P au degré de multiplicité marqué par le numéro du quotient diviseur. En effet le quotient Q_1, par exemple, étant le produit des facteurs à commencer par les doubles, et Q_2 celui des facteurs à commencer par les triples, il est clair que

$$\frac{Q_1}{Q_2}$$

représentera les produits des facteurs doubles de P réduits à la première puissance.

Si donc nous faisons

$$\begin{aligned} Q &= q_1 Q_1 \\ Q_1 &= q_2 Q_2 \\ Q_2 &= q_3 Q_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Q_{i-2} &= q_{i-1} Q_{i-1} \\ Q_{i-1} &= q_i Q_i \end{aligned}$$

la série des quotients

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_{i-1}, q_i$$

résoudra la question; car les quotients dont il s'agit représenteront respectivement les facteurs de P: simples, doubles, triples, quadruples, etc. réduits partout à la première puissance.

2) La méthode précédente est celle en usage. On peut la modifier légèrement ainsi qu'il suit.

Quand on a trouvé le plus grand diviseur P_1 commun à P et à

$$\frac{dP}{dx}$$

et quand on a enlevé ce diviseur à P, ce qui donne Q pour quotient, qu'on cherche le plus grand commun diviseur de P_1 et Q, au lieu de chercher celui de P_2 et $\frac{dP_1}{dx}$, ce diviseur sera Q_1. En l'enlevant à P_1 on trouvera pour quotient P_2, puisque

$$P_1 = Q_1 P_2.$$

Qu'on cherche ensuite le plus grand commun diviseur de P_2 et Q_1, on trouvera Q_2, en divisant P_2 par Q_2 le quotient sera P_3, puisque

$$P_2 = Q_2 P_3.$$

Le plus grand diviseur commun à P_3 et Q_2 sera Q_3, en l'enlevant à P_3 on trouvera P_4. Le plus grand diviseur commun à P_4 et Q_3 sera Q_4, en l'enlevant à P_4 on trouvera P_5. Continuant de la même manière on arrivera à Q_{i-2} et P_{i-1}, on cherchera leur plus grand commun diviseur, on aura Q_{i-1}, en divisant P_{i-1} par Q_{i-1}, on trouvera $P_i = 1$, et l'on est averti que l'opération est terminée.

Ayant les polynomes

$$Q, Q_1, Q_2, Q_3 \cdots Q_{i-1}, Q_i$$

on s'en servira comme tout-à-l'heure pour trouver les quantités

$$q_1, q_2, q_3, \cdots q_{i-1}, q_i$$

qui sont l'objet de la question.

3) Ayant rappelé le procédé connu, nous allons présenter celui qui nous est propre. Nous exposerons d'abord en quoi il consiste et puis nous le démontrerons.

Notre procédé exige, de même que le procédé connu, que l'on détermine le plus grand diviseur P_1 commun au polynome proposé P et à sa dérivée

$$\frac{dP}{dx}$$

et quand on l'aura trouvé il est nécessaire de l'ôter, non seulement à P, mais aussi à sa dérivée

$$\frac{dP}{dx}.$$

Supposons en conséquence

$$P = QP_1$$

$$\frac{dP}{dx} = RP_1.$$

Ayant trouvé les quotients Q et R, formez le polynome

$$R - \frac{dQ}{dx}$$

et cherchez le plus grand diviseur commun à ce polynome et au polynome Q. Le diviseur dont il s'agit sera précisément le produit q_1 de tous les facteurs non multiples de P.

Après avoir trouvé q_1 divisez par ce polynome ceux-ci

$$Q \text{ et } R - \frac{dQ}{dx},$$

le premier quotient qui en résultera sera Q_1, (n° 1) désignez par R_1 l'autre, en sorte que

$$Q = q_1 Q_1$$

$$R - \frac{dQ}{dx} = q_1 R_1.$$

Les polynomes Q_1 et R_1 trouvés, formez celui-ci

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx}$$

et cherchez le plus grand diviseur qui lui soit commun avec Q_1. Le diviseur dont il s'agit sera le produit q_2 des facteurs doubles de P réduits à la première puissance.

Faites

$$Q_1 = q_2 Q_2$$

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = q_2 R_2$$

c'est-à dire divisez Q_1 et

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx}$$

par q_2, pour avoir les quotients Q_2 et R_2, puis, après avoir formé le polynome

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx}$$

cherchez le plus grand commun diviseur de ce polynome et de Q_2; vous trouverez le produit q_3 des facteurs triples de P réduits à la première puissance. Divisez par ce produit q_3 les polynomes Q_2 et

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx}$$

le premier quotient sera Q_3 (n° 1); nommez R_3 l'autre, vous n'aurez qu'à chercher le plus grand diviseur commun à Q_3 et à

$$R_3 - \frac{dQ_3}{dx}$$

pour avoir le produit q_4 des facteurs qui divisent P quatre fois. En continuant, vous arriverez aux polynomes Q_{k-1} et R_{k-1}; vous formerez celui-ci

$$R_{k-1} - \frac{dQ_{k-1}}{dx}$$

et vous chercherez le plus grand diviseur commun à ce dernier polynome et à Q_{k-1}. Le diviseur dont il s'agit vous représentera le facteur q_k qui divise k fois le polynome P. En divisant par ce facteur Q_{k-1} et

$$R_{k-1} - \frac{dQ_{k-1}}{dx}$$

vous aurez d'abord le quotient Q_k (art. 1), soit R_k l'autre quotient. Ces quotients vous fourniront le facteur q_{k+1} qui divise $k+1$ fois le polynome P, puisque le facteur dont il s'agit est le plus grand diviseur commun à Q_k et à

$$R_k - \frac{dQ_k}{dx}.$$

Continuez de la même manière jusqu'à ce que vous arriverez aux polynomes Q_{i-1} et R_{i-1} tels que

$$R_{i-1} - \frac{dQ_{i-1}}{dx} = 0.$$

Alors le plus grand commun diviseur q_i entre Q_{i-1} et

$$R_{i-1} - \frac{dQ_{i-1}}{dx} = 0$$

représentera le facteur qui divise i fois le polynome P ; ce facteur est visiblement la quantité Q_{i-1} elle même, puisque le plus grand diviseur commun à Q_{i-1} et à zéro est sans doute Q_{i-1}. Si vous divisez par $q_i = Q_{i-1}$ les quantités

$$Q_{i-1} \text{ et } R_{i-1} - \frac{dQ_{i-1}}{dx} = 0$$

vous aurez pour quotients

$$Q_i = 1 \text{ et } R_i = 0$$

ce qui vous donnera

$$R_i - \frac{dQ_i}{dx} = 0$$

et par conséquent le diviseur commun à Q_i et $R_i - \frac{dQ_i}{dx}$ sera

$$q_{i+1} = 1,$$

et il y en aura visiblement de même pour les quantités q_{i+2}, q_{i+3}, q_{i+4} etc. en sorte que l'opération est terminée, par la détermination de q_i, et vous êtes averti que P n'a pas de facteurs d'un degré de multiplicité plus élevé que i.

Si parmi les quantités

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_{i-1}, q_i$$

il s'en trouve qui sont égales à l'unité, vous en conclurez que le polynome P n'a pas de facteurs au degré de multiplicité représenté par les n° de ces quantités, mais l'opération ne s'y arrêtera pas. Supposon par exemple

$$q_3 = 1$$

ce qui revient à dire que les polynomes Q_{k-1} et

$$R_{k-1} - \frac{dQ_{k-1}}{dx}$$

n'ont pas de facteurs communs. Vous aurez

$$Q_k = \frac{Q_{k-1}}{q_k} = Q_{k-1}$$

$$R_k = \frac{R_{k-1} - \frac{dQ_{k-1}}{dx}}{q_k} = R_{k-1} - \frac{dQ_{k-1}}{dx}$$

et vous chercherez le plus grand commun diviseur q_{k+1} de $Q_k = Q_{k-1}$ et de

$$R_k - \frac{dQ_k}{dx} = R_{k-1} - 2\frac{dQ_{k-1}}{dx}.$$

Si q_{k+1} est aussi l'unité vous aurez

$$Q_{k+1} = Q_k = Q_{k-1}$$

$$R_{k+1} = R_k - \frac{dQ_k}{dx} = R_{k-1} - \frac{2dQ_{k-1}}{dx}$$

et vous chercherez le plus grand diviseur q_{k+2} commun à $Q_{k+1} = Q_{k-1}$ et à

$$R_{k+1} - \frac{dQ_{k+1}}{dx} = R_{k-1} - \frac{3dQ_{k-1}}{dx},$$

ainsi de suite.

Ayant trouvé les quantités

$$q_1, q_2, q_3 \cdots q_k, \cdots q_{i-1}, q_i$$

vous aurez

$$P = q_1^{\,2} q_2^{\,3} q_3 \cdots q_k^{\,k} \cdots q_{i-1}^{\,i-1} q_i^{\,i}$$

4) Prenons pour exemple

$$P = x^7 - 4x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 36x^3 - 81x^2 + 68x - 20$$

nous aurons

$$\frac{dP}{dx} = 7x^6 - 24x^5 + 15x^4 - 12x^3 + 108x^2 - 162x + 68.$$

En cherchant le plus grand commun diviseur P_1 de P et $\frac{dP}{dx}$ on trouve

$$P_1 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Divisant par ce diviseur on a pour quotients

$$\frac{P}{P_1} = Q = x^4 - 2x - 9x + 10$$

$$\frac{1}{P_1}\frac{dP}{dx} = R = 7x^3 + 4x^2 - 4x - 34$$

donc

$$R - \frac{dQ}{dx} = 3x^3 + 4x^2 - 25.$$

Le plus grand diviseur q_1 commun aux polynomes

$$Q = x^4 - 2x^2 - 9x + 10$$

et

$$R - \frac{dQ}{dx} = 3x^3 + 4x^2 - 25$$

est

$$q_1 = x^2 + 3x + 5.$$

Il exprime le facteur simple du polynome proposé. En le supprimant, on trouve

$$\frac{Q}{q_1} = Q_1 = x^2 - 3x + 2$$

$$\frac{R - \frac{dQ}{dx}}{q_1} = R_1 = 3x - 5.$$

Il en rèsule

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = x - 2.$$

Le plus grand diviseur q_2 commun ax polynomes

$$Q_1 = x^2 - 3x + 2$$

et

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = x - 2$$

est

$$q_2 = x - 2.$$

C'est le facteur qui divise P deux fois; en le supprimant, il vient

$$\frac{Q_1}{q_2} = Q_2 = x - 1$$

$$\frac{R_1 - \frac{dQ_1}{dx}}{q_2} = R_2 = 1$$

donc

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx} - 0$$

par suite

$$q_3 = Q_2 = x - 1$$

et l'on est averti que l'opération est terminée. Nous aurons en conséquence

$$P = q_1 q_2^2 q_3^3 = (x^2 + 3x + 5)(x - 2)^2 (x - 1)^3.$$

5) Supposons encore

$$P = x^{12} + 8x^{11} + 36x^{10} + 101x^9 + 193x^8 + 228x^7 + 120x^6 - 114x^5 - 213x^4 - 36x^3 + 324x^2 + 405x + 243.$$

En différentiant on trouve

$$\frac{dP}{dx} = 12x^{11} + 88x^{10} + 360x^{10} + 909x^8 + 1544x^7 + 1596x^6 + 720x^5 - 570x^4 - 852x^3 - 108x^2 + 648x + 405$$

le plus grand diviseur P_1 commun à P et $\frac{dP}{dx}$ est

$$P_1 = x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 44x^3 + 63x^2 + 54x + 27.$$

En divisant P et $\frac{dP}{dx}$ par ce diviseur on trouve

$$Q = x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x + 9$$

$$R = 12x^5 + 16x^4 + 12x^3 - 27x^2 - 6x + 15$$

donc

$$R - \frac{dQ}{dx} = 6\,(x^5 + x^4 - 3x^2 + 3).$$

Le plus grand diviseur q_1 de Q et $R - \frac{dQ}{dx}$, c'est à dire de

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x + 9$$

et

$$x^5 + x^4 - 3x^2 + 3$$

est

$$q_1 = x^4 - 3x + 3.$$

En divisant par ce diviseur il vient

$$Q_1 = x^2 + 2x + 3$$

$$R_1 = 6x + 6$$

donc

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = 4x + 4$$

les quantités

$$x^2 + 2x + 3$$

et

$$x + 1$$

n'ayant pas de facteurs communs, nous en concluons

$$q_2 = 1$$

donc

$$Q_2 = x^2 + 2x + 3$$

$$R_2 = 4x + 4$$

et

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx} = 2x + 2.$$

Le facteur commun à

$$x^2 + 2x + 3$$

et

$x + 1$

étant l'unité, nous avons

$$q_3 = 1$$

donc

$$Q_2 = x^2 + 2x + 3$$
$$R_2 = 2x + 2$$

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx} = 0$$

s'en suit

$$q_4 = x^2 + 2x + 3$$

l'opération est achevée. Nous avons

$$P = q_1 q_4^4 = (x^4 - 3x + 3)(x^2 + 2x + 3)^4.$$

6) La démonstration du procédé que nous proposons est une extrême facilité. En effet, reprenons les équations

$$QP_1 = P$$
$$RP_1 = \frac{dP}{dx},$$

remplaçant dans la seconde la dérivée de P par celle de QP_1 vient

$$RP_1 = \frac{dQ}{dx} P_1 + Q \frac{dP_1}{dx}$$

bien

$$\left(R - \frac{dQ}{dx}\right) P_1 = Q \frac{dP_1}{dx}.$$

Désignons, comme dans le n° 1, le plus grand diviseur commun à P_1 et $\frac{dP_1}{dx}$ par P_2, et après l'avoir enlevé à P_1, ce qui nous donnera Q_1, ôtons le aussi à $\frac{dP_1}{dx}$. Soit

$$\frac{dP_1}{dx} = SP_2.$$

les polynomes S et Q_1 seront premiers entre eux. En

supposant à P_1 et $\frac{dP_1}{dx}$ les valeurs précédentes, il vient

$$\left(R - \frac{dQ}{dx}\right) Q_1 P_2 = QSP_2$$

ou bien

$$\left(R - \frac{dQ}{dx}\right) Q_1 = QS.$$

Nous en concluons que Q est divisible par Q_1, ce que nous savons du reste, et même nous avons supposé (n° 1)

$$Q = q_1 Q_1$$

il s'en suit

$$R - \frac{dQ}{dx} = q_1 S$$

il en résulte que le produit q_1 des facteurs simples de P est le plus grand diviseur commun à Q et

$$R - \frac{dQ}{dx}$$

et que le polynome S est celui que nous avons précédemment désigné par R_1; donc R_1 est le quotient de la division de $\frac{dP_1}{dx}$ par q_1, en sorte qu'en même temps que

$$Q = q_1 Q_1$$
$$R - \frac{dQ}{dx} = q_1 R_1$$

nous aurons

$$Q_1 P_2 = P_1$$
$$R_1 P_2 = \frac{dP_1}{dx}.$$

En remplaçant la dérivée de P_1 dans la dernière équation par celle de $Q_1 P_2$ il vient

$$R_1 P_2 = \frac{dQ_1}{dx} P_2 + Q_1 \frac{dP_2}{dx}$$

ou

$$\left(R_1 - \frac{dQ_1}{dx}\right) P_2 = Q_1 \frac{dP_2}{dx}.$$

Désignons, comme on l'a déjà fait, le plus grand commun diviseur de P_2 et $\frac{dP_2}{dx}$ par P_3 et soient

$$P_2 = Q_2 P_3$$

$$\frac{dP_2}{dx} = S P_3$$

les quotients Q_2 et S étant premiers entre eux. Nous aurons

$$\left(R_1 - \frac{dQ_1}{dx}\right) Q_2 = Q_1 S.$$

On en conclut d'abord, ce que nous savons déjà, que Q_1 est divisible par Q_2. Nous avons fait

$$Q_1 = q_2 Q_2$$

q_2 désigne le facteur qui divise P deux fois, nous avons en conséquence

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = q_2 S$$

donc q_2 est le plus grand commun diviseur de Q_1 et $R_1 - \frac{dQ_1}{dx}$ et S est le polynome ci-dessus désigné par R_2, en sorte qu'en même temps que

$$Q_1 = q_2 Q_2$$

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = q_2 R_2$$

nous avons aussi

$$Q_2 P_3 = P_2$$

$$R_2 P_3 = \frac{dP_2}{dx}.$$

Continuant de la même manière, nous arriverons enfin à la conclusion que le facteur q_{i-1} qui divise $i-1$ fois P, est le plus grand diviseur commun aux polynomes

$$Q_{i-2}$$

et

$$R_{i-2} = \frac{dQ_{i-2}}{dx}$$

en sorte que

$$Q_{i-2} = q_{i-1} Q_{i-1}$$

$$R_{i-2} - \frac{dQ_{i-2}}{dx} = q_{i-1} R_{i-1}$$

et en même temps

$$Q_{i-1} P_i = P_{i-1}$$

$$R_{i-1} P_i = \frac{dP_{i-1}}{dx}$$

or par hypothèse P_{i-1} et $\frac{dP_{i-1}}{dx}$ n'ont plus des facteurs communs, donc

$$P_i = 1$$

ce qui donne

$$Q_{i-1} = P_{i-1}$$

$$R_{i-1} = \frac{dP_{i-1}}{dx}.$$

et par suite

$$R_{i-1} - \frac{dQ_{i-1}}{dx} = 0.$$

Nous en concluons que le plus grand commun diviseur q_i des polynomes Q_{i-1} et $R_{i-1} - \frac{dQ_{i-1}}{dx}$ est le polynome Q_{i-1} lui-même; donc

$$q_i = Q_{i-1}$$

et en même temps l'opération s'arrête visiblement puisque $Q_i = 1$ et $R_i = 0$.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No.* 13.)

MELANGES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

TIRÉS DU

BULLETIN PHYSICO-MATHÉMATIQUE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

Tome I.

2de LIVRAISON.

Avec deux planches.

(Prix: 45 Cop. arg. — 15 Ngr.)

St.-Pétersbourg,

de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.

1851.

Se vend chez MM. *Eggers* et *Comp.* libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky, No. 1/10, et à Leipzic, chez M. *Léopold Voss.*

CONTENU.

Pag.

M. O. Struve. Nouvelle détermination de la parallaxe de l'étoile Groombridge 1830. Rapport de M. W. Struve . . 101

W. Döllen. Bestimmung der Höhe über dem Meere für einige in der Umgegend von Pawlowsk gelegene, in geologischer Beziehung wichtige Punkte 104

M. W. Struve. Résultats des opérations géodésiques de MM. G. Fuss, Sawitsch et Sabler, exécutées en 1836 et 1837 dans la Province Ciscaucasienne 114

M. Bouniakovsky. Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la géométrie élémentaire. (Avec une planche.) 153

M. J. Somoff. Note sur la rectification graphique de l'ellipse. (Avec une planche.) 172

F. Fedorenko. Ueber die Doppelsterne No. 1263 und 1516 des Dorpater Catalogs. 177

Dr. M. G. Paucker. Zur Theorie der kleinsten Quadrate 188

M. A. Struve. Évaluation de la masse de Neptune, d'après les mesures micrométriques, exécutées au grand réfracteur de l'Observatoire de Poulkova, par M. O. Struve . . . 205

$\frac{7}{19}$ Décembre 1849.

Nouvelle détermination de la parallaxe de l'étoile Groombridge 1830, faite par M. O. STRUVE. Rapport de M. W. STRUVE.

En 1842, M. Argelander annonça la découverte d'une étoile de 6^{me} grandeur de la constellation de la Grande Ourse, douée d'un mouvement propre de plus de 7 secondes du grand cercle. Ce mouvement propre est le plus rapide que nous connaissions jusqu'à présent sur le ciel. Or, la réussite des observations de Bessel sur la parallaxe de 61 Cygni, ayant confirmé la supposition que la grandeur du mouvement propre nous est un indice en faveur de la proximité d'une étoile, plusieurs astronomes se mirent tout de suite à l'oeuvre, pour déterminer la parallaxe de l'étoile de M. Argelander.

Le premier qui se fut occupé de cette recherche, fut M. Peters dont les observations sur la déclinaison absolue de cette étoile, exécutées à l'aide du grand cercle vertical de l'Observatoire central, commencèrent déjà le 19 mars 1842 et furent continuées jusqu'au 2 mai 1843. La même année 1842, feu M. Schlueter, de l'Observatoire de Koenigsberg, qui avait déjà participé aux observations sur la parallaxe de 61 Cygni, entreprit aussi une série d'observations sur la parallaxe de la dite étoile d'Argelander, en y employant le même instrument, l'héliomètre de Koenigsberg, et en suivant les méthodes d'observation qui avaient mené à la connaissance de la parallaxe de 61 Cygni. Malheureusement cette série d'observations, commencée le 13 octobre 1842, fut interrompue soudainement, le 26 août 1843, par la mort précoce du jeune

astronome dont les talents éminents promettaient les meilleurs fruits pour la science.

Une troisième série d'observations sur cet objet fut entreprise, en 1846, par M. Faye, membre de l'Académie de Paris. La méthode qu'il employait, était celle des différences en Æ, en choisissant pour étoile de comparaison une étoile de 8^me^ grandeur qui suit l'étoile d'Argelander de deux minutes en temps. M. Faye, ayant fait ses observations depuis le mois de mars jusqu'au mois d'août 1846, communiqua à l'Académie de Paris le résultat d'une parallaxe sensible, et trouva plus tard une confirmation apparente de ce résultat, par la continuation de ses observations jusqu'au mois de novembre de la même année. La parallaxe définitive déduite par M. Faye fut de + 1″,08 avec une erreur probable au dessous de 0″,05.

En printemps 1847, j'eus l'occasion d'indiquer, dans mes *Études d'Astronomie stellaire*, le résultat du travail de M. Peters. La valeur que cette recherche soigneuse assigne à la parallaxe de l'étoile en question, n'était que + 0″,226, étant encore sujette à une erreur probable de 0″,141, ou à peu près de deux tiers de sa valeur. La différence énorme entre les résultats obtenus par M. Faye et par M. Peters ne manqua pas d'attirer l'attention des astronomes sur cette question. Pendant mon séjour à Paris, en été 1847, il s'éleva sur ce sujet une discussion entre M. Faye et moi, tant en particulier qu'en public dans la séance de l'Académie de Paris du 26 juillet. Par suite de nos consultations qui fixèrent les avantages et les faiblesses des méthodes suivies des deux côtés, M. Faye s'engagea à continuer ses recherches, et je pouvais annoncer que M. Peters m'avait déjà exprimé son intention de tâcher de parvenir à une valeur plus exacte par des observations réitérées. Enfin, d'accord avec M. Faye, je promis d'engager M. O. Struve à contribuer à la solution de la question, par une série d'observations à faire à l'aide du grand réfracteur de l'Observatoire central, en suivant la méthode des différences en déclinaison. Conformément à cet engagement, M. O. Struve commença la dite série d'observa-

tions le 4 novembre 1847 et l'a continuée jusqu'au 2 décembre 1849.

En attendant, encore en 1847, M. Wichmann, successeur de Schlueter à l'Observatoire de Koenigsberg, avait soumis les observations de son prédécesseur à un calcul rigoureux et en déduisit la valeur de la parallaxe $= +0'',18$, qui semblait confirmer entièrement la valeur trouvée par M. Peters, l'erreur probable que M. Wichmann assigne à sa valeur, ne s'élevant qu'à $0'',018$. Or, supposé que les méthodes suivies étaient justes dans les deux cas, l'accord des valeurs trouvées par MM. Peters et Wichmann ne laisse rien à désirer. Cependant le résultat auquel était arrivé M. Wichmann, est sujet à quelques objections graves, dont je ne citerai ici que celle que les mêmes observations qui ont fourni la parallaxe $= 0'',18$, ont donné un changement annuel de la différence des distances aux deux étoiles de comparaison, produit par le mouvement propre de Groombridge 1830, fautif de $1'',1$, tandisque l'erreur probable, attribuée à la quantité trouvée, ne s'élève qu'à la septième partie de l'erreur réelle. Il s'en suit, que les astronomes ne pouvaient avoir confiance dans la parallaxe déduite par M. Wichmann. En admettant encore qu'elle peut être regardée comme une négation par rapport à la valeur de plus d'une seconde trouvée par M. Faye, elle est néanmoins bien loin d'être une valeur tellement réelle, qu'elle définisse la distance de cette étoile.

Depuis 1846, M. Faye n'a rien publié de ses travaux ultérieurs sur la parallaxe de Groombridge 1830, et je n'ai pas même appris s'il les a continués ou non. Aussi M. Peters, reconnaissant la supériorité du grand réfracteur sur le cercle vertical, pour la solution du problème en question, a renoncé à la continuation de ses observations.

Maintenant, nos connaissances sur la parallaxe de cette étoile ont fait un pas essentiel en avant, et c'est aux soins de M. O. Struve que nous le devons. Depuis l'époque indiquée plus haut, ayant observé cette étoile à chaque occasion favorable, il a réuni le nombre de près de 60 observations qui embrassent trois minima et deux maxima de la parallaxe en déclinaison. Pour l'observation complète de chaque soirée,

il a déterminé 8 différences en déclinaison entre l'étoile d'Argelander et chacune des deux petites étoiles de comparaison, dont l'une la précédait de 3 minutes en temps, l'autre la suivait de 2 minutes, la première étant à peu près 3 minutes au Nord, la seconde 40 secondes au Snd de l'étoile à examiner. Dans la déduction des résultats, il a rejeté du nombre de ses observations celles, où l'état de l'atmosphère n'avait pas permis de les achever entièrement. — Je remarque ici que chaque observation complète d'un jour demanda à peu près 2 heures et démie de travail continuel. — Après l'exclusion des observations incomplètes, il lui restaient 47 observations sûres, et qui lui ont fourni autant d'équations de condition pour la détermination de la parallaxe et du mouvement propre en déclinaison. La résolution de ces équations, d'après la méthode des moindres carrés, lui a donné pour l'étoile d'Argelander:

la parallaxe $= +0'',034$ avec l'erreur prob. $= 0'',029$

le mouvement

propre en décl. $= -5'',748$ . . . $= 0'',024$.

Il s'entend qu'avant de procéder à la résolution des équations, toutes les données furent soigneusement corrigées pour l'effet de la température sur le micromètre, de la réfraction, de l'aberration etc. Ayant substitué les valeurs trouvées dans ses équations de condition, M. O. Struve déduit l'erreur probable du résultat des observations de chaque soir $= 0'',078$.

Après avoir soigneusement examiné le travail de M. O. Struve, je me suis persuadé que l'exactitude et la méthode de ses observations est à l'abri de toute objection, et par conséquent je regarde le résultat obtenu par lui comme décisif dans la question. Je résumerai ici les conclusions principales qui s'en déduisent:

1) La grande parallaxe assignée à l'étoile d'Argelander par M. Faye, a trouvé son origine dans une imperfection de la méthode suivie par cet astronome distingué, imperfection dont je lui indiquai l'origine déjà lors de mon séjour à Paris.

2) Parmi les déterminations antérieures, celle de M. Peters s'approche assez de la vérité, vu que cet astronome a assigné à sa détermination une erreur probable presque égale à l'erreur réelle de sa valeur, tandisque M. Wichmann, ayant trouvé un nombre plus petit que celui de M. Peters, s'est mépris évidemment à la certitude de son évaluation.

3) La parallaxe trouvée par M. O. Struve, comparée à celles de 61 Cygni et de α Lyrae, nous montre que le mouvement propre n'est pas un indice plus sûr que l'éclat des étoiles, pour juger de leurs distances.

4) La quantité trouvée de la parallaxe de l'étoile d'Argelander et qui n'atteint pas même le double de son erreur probable, est si petite qu'elle échappe presque aux observations modernes les plus exactes. Cependant il y a à parier 12 contre 1, que cette parallaxe ne s'élève point à un dixième de seconde du grand cercle.

Ayant indiqué, dans ce qui précède, les résultats principaux du travail de M. O. Struve, j'ajoute encore que l'exactitude de ses observations a trouvé un appui dans la déduction du mouvement propre en déclinaison. La valeur précédemment donnée de $-5''{,}748$, avec l'erreur probable $0''{,}024$, s'accorde entre les limites des erreurs probables avec la valeur $-5''{,}782 \pm 0''{,}026$, déduite par M. Peters de la comparaison de ses propres observations avec le complet des observations antérieures faites par Lalande, Groombridge, Bessel et Nicolai, et elle la dépasse même sous le rapport de l'exactitude.

J'ai engagé M. O. Struve à soumettre à l'Académie un rapport détaillé sur ses travaux concernant la parallaxe de l'étoile Groombridge 1830, et j'espère que l'Académie en approuvera l'insertion dans ses Mémoires.

Poulkova le 7 (19) décembre 1849.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. VIII. No.* 15.)

21 December 1849.
2 Januar 1850.

Bestimmung der Höhe über dem Meere für einige in der Umgegend von Pawlowsk gelegene, in geologischer Beziehung wichtige Punkte; von W. Doellen, Astronom an der Kaiserlichen Hauptsternwarte.

Die folgende Mittheilung betrifft eine auf den Wunsch des Herrn Staatsraths Pander im Herbste des Jahres 1848 ausgeführte kleine geodätische Arbeit, deren Zweck die Ermittelung der Höhe über dem Meere für einige in der Umgegend von Pawlowsk gelegene, in geologischer Beziehung wichtige Punkte war; und die bei dieser Gelegenheit gewonnenen Resultate werden hier veröffentlicht, um sie einer möglichen weiteren Benutzung zugänglich zu machen. Der Herr Director der Hauptsternwarte hatte sich selbst auf die einzelnen zu bestimmenden Punkte begeben und dadurch eine deutliche Vorstellung über das zu befolgende Verfahren erlangt; die Ausführung wurde Herrn Cand. A. Moritz, jetzt Director des magnetischen und meteorologischen Observatoriums in Tiflis, und mir übertragen. Als Ausgangspunkt für sämmtliche Höhenbestimmungen bot sich zunächst das Kreuz auf der Kuppel des sogenannten alten Palais in Zarsko-Selo dar, dessen Höhe selbst wieder auf der durch ein geometrisches Nivellement bis zum Meerbusen hin ermittelten Höhe der Hauptsternwarte beruht (vergl. *Descript. de l'obs. astr. central de Poulkova*, p. 81 u. 83). Da aber die Höhenunterschiede nur aus einseitigen Zenithdistanzen geschlossen werden sollten, so

durften der Unsicherheit der Refraction wegen auch nur die allernächst gelegenen Punkte unmittelbar auf Zarsko Krena bezogen werden, während für die entfernter liegenden durch Zenithdistanzen aus der Mitte neue Ausgangspunkte geschaffen werden mussten; solche Zwischenpunkte waren uns namentlich der Telegraph beim Dorfe Perelesino, der Glockenthurm in Zarskaja Slawanka und die Kuppel der Kirche in Fedorowsk. Die Kenntniss der horizontalen Coordinaten und namentlich der zur Herleitung der Höhenunterschiede aus den beobachteten Zenithdistanzen erforderlichen Entfernungen sollte erlangt werden durch das Messen der Horizontalwinkel zwischen bekannten Objecten (Pothenot'sche Aufgabe), wie solche Objecte im § 223 des von General Schubert herausgegebenen Werkes: «Тригонометрическая съемка губерній: С. Петербургской, Псковской, Витебской, и части Новгородской — С. П. Б. 1842» in Menge geboten sind. Wenn der eigentlich zu bestimmende Punkt keine freie Aussicht gewährte, sollten die an einem andern in der Nähe und günstiger gelegenen Punkte gewonnenen Bestimmungen durch eine kleine Triangulation auf jenen übertragen werden. Ein kleines Universalinstrument nebst Statif für die Winkelmessungen, ein Messband nebst einigen Signalstangen für die Triangulationen und eine Specialcharte der Gegend nebst einem Handfernrohr zur Orientirung genügten demnach allen Bedürfnissen der kleinen Expedition aufs vollständigste. Aber selbst mit Hilfe der Charte wäre es nicht immer leicht gewesen, für die drei zur Lösung der Pothenotschen Aufgabe nothwendigen Objecte aus der zuweilen grossen Menge der sichtbaren die günstigste Wahl zu treffen, und so machte sich daher von selbst die Regel, jedesmal die Richtungen nach allen sichtbaren Schubertschen Punkten abzulesen. Wurde hierdurch die Aufgabe freilich eine überbestimmte, und also die Ermittelung der wahrscheinlichsten Werthe der Gesuchten nach der Methode der kleinsten Quadrate eine bei weitem umständlichere, so gewannen aber doch auch die Resultate in demselben Verhältniss an Sicherheit, und es wurde eine Kenntniss der wahrscheinlichen Genauigkeit derselben möglich. Es ist uns aber noch ein andrer sehr bedeutender Vortheil hier-

aus erwachsen. Bei der Rechnung nemlich stellte es sich heraus, dass einige der von uns beobachteten Objecte nicht den unter demselben Namen bei Schubert aufgeführten entsprachen; so namentlich Duderhof-Kirche, die, wie wir später erfuhren, erst vor wenigen Jahren neu aufgebaut ist und zwar in einiger Entfernung von der alten jetzt nicht mehr existirenden. Nun war aber gerade dieses Object für die Bestimmung mehrerer unserer Punkte ganz unentbehrlich, und es war daher in der That wesentlich, dass wir die Lage desselben aus unsern Beobachtungen selbst suppliren konnten, indem wir von Punkten aus, die auch ohne Duderhof genügend bestimmt waren, die Richtung dorthin beobachtet hatten. Auf ähnliche Weise hoben wir die Unsicherheit, die für uns in Bezug auf die beiden Thürme der Kirche in Moskowskaja Slawanka Statt fand. Unsere Beobachtungen ergaben für den einen derselben

$$x = -\ 10122{,}34 \text{ Sashen und } y = 5154{,}70 \text{ Sashen},$$

während bei Schubert, Band III, pag. 139, N° 343, sich findet

$$x = -\ 10122{,}33 \text{ und } y = 5155{,}09,$$

so dass die Identität dieser beiden Objecte keinem Zweifel mehr unterlag. Ich habe die Zahlen selbst hier aufgeführt, weil sie einen Schluss auf die Genauigkeit unsrer Beobachtungen überhaupt erlauben; wobei zu beachten ist, dass in diesen Coordinaten noch eine Häufung der Beobachtungsfehler zu fürchten war, indem sie ja auf Richtungen beruhn von Punkten aus, deren Lage selbst wieder aus unsern Beobachtungen abzuleiten war. Im Allgemeinen können wir, gestützt auf die durch die Arbeit selbst dargebotenen mannigfachen Controlen, behaupten, dass die Bestimmung der horizontalen Coordinaten unsrer Beobachtungsorte immer bis auf wenige Fuss sicher war, die Höhenunterschiede aber sogar bis auf wenige Zoll; so dass die Unsicherheit, die der Natur der Sache nach über den Punkt des Bodens herrscht, für den nun eigentlich die bestimmte Höhe gilt, als die bei

weitem überwiegende Fehlerquelle zu betrachten ist. Dieses gilt jedoch, um es noch einmal zu sagen, nur von den Höhenunterschieden; die in der Tafel aufgeführten absoluten Höhen über dem Meere sind ausserdem behaftet mit dem ganzen in der Höhe von Zarsko-Kreuz steckenden Fehler, welcher indess (zufolge *Descript.* p. 83) 1 bis 2 Fuss nicht übersteigt. Ferner darf diese Behauptung nicht ausgedehnt werden auf die beiden durch ein ? verdächtigten Bestimmungen für Raikolowo und Samsonowsk, welche bedeutend weniger sicher sind, als sämmtliche übrigen. Auf dem ersteren Punkte nehmlich fanden sich gar keine und auf dem letzteren nur sehr ungünstig gelegene Objecte zur Bestimmung der horizontalen Coordinaten, so dass die Entfernung bis Fedorowsk Thurm, dessen Zenithdistanz für die Höhe beobachtet wurde, für Samsonowsk nur sehr unsicher ermittelt werden konnte, und für Raikolowo gar aus der Семитопографическая карта окрестностей С. П. Б. genommen werden musste, gegen welche Charte die von uns bestimmten Entfernungen andrer Punkte oft ganz beträchtlich abwichen. — In Bezug auf die nachstehende Tafel ist nun noch zu bemerken, dass die beiden mit x und y überschriebenen Columnen die in Sashen zu 7 Fuss ausgedrückten rechtwinkligen Coordinaten der in der ersten Columne benannten Punkte enthalten. Der Anfangspunkt des hierbei zu Grunde liegenden Axensystems ist die alte akademische Sternwarte in St. Petersburg, und die Richtung der Axen ist die des Meridians von Nord nach Süd (x) und des auf dem Meridiane senkrechten grössten Kreises von West nach Ost (y). Bei den vier mit einem * bezeichneten Punkten sind diese Angaben dem genannten Werke des Generals Schubert entnommen, und haben nebst einigen andern, hier nicht mit aufgeführten, dazu gedient die x und y unsrer Beobachtungspunkte ermitteln zu lassen. Die Columne z endlich enthält die in russischen Fuss ausgedrückte Höhe über dem Meere; sie gilt immer für den Punkt, dessen horizontale Coordinaten in x und y gegeben sind, nur in Iummalasaari nicht, wo der Punkt, für den die Höhe gilt, von dem Punkte *A*, der durch die x und y bestimmt ist, um 110 Fuss 4 Zoll entfernt liegt und zwar in der Richtung der Linie Sa-

wanka-*A*. Die der Tafel angehängten Zeilen enthalten die genaue Bezeichnung des auf jeder Station eigentlich bestimmten Punktes, so dass die Identificirung desselben wohl überall mit Leichtigkeit wird erlangt werden können.

	x. Sashen	y. Sashen	*z*. Fuss
*Pulkowa	8861,0	569,9	247,6
*Zarsko	11716,2	2437,8	352,0
Telegraph	13078,8	787,7	339,3
*Slawanka	15022,9	2791,1	339,7
Duderhof	12880,4	— 3518,1	
*Fedorowsk	14426,6	5957,6	287,4
Iummalasaari . . .	13010,7	2868,4	163,5
Katlina	13357,0	2047,4	228,6
Popowo *A*			175,1
— *B*	14332,1	2866,1	168,8
— *C*			120,5
Slawanka *A*	14876,4	2821,0	214,8
— *B*	14970,6	3097,1	158,7
— *C*			113,1
Ganbolowa *A* . . .	15336,5	2182,5	226,7
— *B* . . .	15307,6	2163,2	239,8
Marjina *A*	15849,5	1894,5	218,4
— *B*			190,6
Ontolowa *A*	16155,1	2288,1	193,1
— *B*			169,8
An der Ishora . . .			195,9
Fedorowsk *B* . . .	14211,3	6018,8	201,4
Podolowo	14334,4	7198,4	114,6
Samsonowsk	13867	7169	84 ?
Raikolowo			122 ?

Pulkowa: Obere Fläche der steinernen Freitreppe.

Zarsko: Querstab im höchsten Kreuze auf der Kuppel der Schlosskirche. Von der in der *Descript. etc.*, pag. 83, gegebenen Höhe der höchsten Spitze dieses Kreuzes = 354,0 Fuss sind in Folge einer Messung, oder richtiger wohl nur Schätzung, 2 Fuss in Abrechnung gebracht; ein Fehler hierin vereinigt sich mit der sonstigen Unge-

nauigkeit dieser Bestimmung und trifft nur die absoluten Höhen der von uns bestimmten Punkte.

Telegraph: Drehungspunkt des Telegraphen in der Nähe des Dorfes Perelesino (Перелесино) etwa 8 Werst südlich von Pulkowa.

Slawanka: Mittelpunkt der Kugel auf dem Glockenthurme der russischen Kirche in Zarskaja Slawanka.

Duderhof: Nordthurm der neuen Kirche.

Fedorowsk: Der höchste Punkt der Kuppel selbst auf dem Glockenthurme; es sitzt noch eine Kugel darauf und auf dieser ein durchbrochenes Kreuz — beides war aber von den entfernteren Punkten aus nur schlecht sichtbar.

Iummalasaari: Unser Standpunkt auf der Wiese in der Nähe des Kalksteinbruches ist dadurch ziemlich genau bezeichnet, dass von demselben aus die 3 Objecte Slawanka, Zarsko und Kolpino zugleich sichtbar waren; für diesen Punkt gelten denn auch die x und y, während die Höhenangabe sich auf die höchste Stelle des Kalksteins selbst bezieht.

Katlina: Zu beiden Seiten des Weges, der von Pawlowsk her zu diesem Dorfe führt, unmittelbar vor diesem Dorfe, befinden sich Kalksteinbrüche. Unsern Standpunkt wählten wir rechts vom Wege hart am Bruche selbst, an einer Stelle, wo der Kalk kaum 1 Fuss unter dem Rasen liegt. Die Höhe ist die Höhe des Kalkes.

Popowo *A*, *B*, *C*: Bei den letzten Häusern des Dorfes Popowo, links am grossen Wege von Zarsko her, ehe man über die Brücke kommt, 2 Sandgruben; bei der weiter vom Wege ab und näher zum Bache hin liegenden nahmen wir unsre Station *A*. Am jenseitigen hohen Ufer, etwa in der Richtung von *A* nach Fedorowsk, hart am Absturz zum Bache hinab, Station *B*; die Stelle sehr kenntlich an einer rothen Thonschicht im Kalksteine, die hier ihre stärkste Erhebung erreicht, und noch genauer bezeichnet durch einen im Thon eingeschlossenen verwitterten Granitblock. Am Wasser selbst, bei der Landzunge, wo sich das Ufer plötzlich hebt und

ein anderes kleines Wasser in den Popow fällt, errichteten wir das Signal *C*. Nur von *B* aus freie Aussicht, deshalb eine Triangulation zur Ermittelung der Distanzen *BA* und *BC*. Die Höhen gelten bei *A* für den Sand, bei *B* für die rothe Schicht, bei *C* für den Wasserspiegel.

Slawanka *A*, *B*, *C*: Hart am Wege von Slawanka nach Pawlowsk, links, eine Grube mit Grünsand: Station *A*. Jenseit des Baches beim äussersten Gebäude des Dorfes Andropschina ein Kalkbruch: Station *B*. Am Wasser bei der Nordwestecke des Kirchhofs, etwa in der Richtung von *B* zur Kirche hin, Signal *C*. Die Höhen gelten bei *A* für den Grünsand, bei *B* für den Kalk, bei *C* für den Wasserspiegel.

Ganbolowa *A*, *B*: Unmittelbar vor dem Eintritt in das Dorf, links hart am Wege von Pokrowskaja her, 40 bis 80 Schritt vor dem rechts am Wege stehenden Pfosten mit dem Namen des Dorfes, eine Sandgrube; unsre Station *A* einige Schritte vor dieser Grube, etwas weiter vom Wege ab; *B* ist der Pfosten selbst, der auch von Marjina aus beobachtet werden konnte. Die Höhen beziehen sich bei *A* auf den Sand, bei *B* auf die Spitze des Pfostens.

Marjina *A*, *B*: Wenn man von Pokrowskaja kommend durch das eigentliche Dorf gefahren, so führt der Weg rechts ab zwischen Feldern zur Linken und einigen Gebäuden zur Rechten. Auf der linken Seite, etwa 250 Schritte vom Wege ab, fliesst ein kleines Wasser (die Slawanka?) und am steilen diesseitigen Ufer desselben befindet sich der zu bestimmende Kalkbruch mit fossilen Fischresten; dies unser *B*, von dem aus aber keine Objecte sichtbar. Deshalb rechts vom Wege, etwa 100 Schritte ab, auf dem höchsten Punkte des Feldes, kenntlich durch einen mächtigen Granitblock, die Station *A*. Die Höhen gelten bei *A* für die höchste Stelle des Granitblocks, bei *B* für den Kalk.

Ontolowa *A*, *B*: Kalksteinbruch im Bache selbst; bestimmt sollte der linke hohe Uferrand werden: Signal *B*.

Am rechten Ufer ein Stück vom Bache ab, auf dem höchsten Punkte des Terrains unsre Station *A*; von *A* nach *B* eine kleine Triangulation. Die Höhen gelten bei *A* und bei *B* für den Erdboden.

An der Ishora: Von Ontolowa aus sieht man mehrere Fabrikgebäude an der Ishora. Die Höhe gilt für den vorspringenden Dachrand des höchsten der diesseit des Baches befindlichen Häuser.

Fedorowsk *B*: Sandgrube in der Nähe des grossfürstlichen Häuschens am Nordende des Dorfes. Die Höhe gilt für den Sand. Jenseits der Chaussee ein neues Magazin mit steinernem Fundamente; die obere Fläche des Ecksteins an der zum grossfürstlichen Häuschen gewandten Ecke dieses Fundaments liegt $4^3/_4$ Zoll tiefer.

Podolowo: Sandsteinbruch in der Nähe dieses Dorfes auf dem linken hohen Uferrande der Ishora bei der Papierfabrik. Die Höhe gilt für den Schiefer. Der obere Fensterrand in der von unten gerechnet dritten Reihe der Jalousieen an der Südwand des Fabrikgebäudes ist um 18 Fuss höher.

Samsonowsk: Standpunkt mitten auf der Strasse, die längs dem schroffen Absturz zur Ishora hinläuft; die Höhe gilt für den Erdboden.

Raikolowo: Die Höhe gilt für den kleinen Balkon an der Nordseite der Mühle; sie kann nur auf etwa 10 Fuss verbürgt werden.

Pulkowa, December 1849.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. VIII. No.* 17.)

$\frac{15}{27}$ Mars 1850.

Résultats des opérations géodésiques de MM. G. Fuss, Sawitsch et Sabler, exécutées en 1836 et 1837 dans la Province Ciscaucasienne par M. W. STRUVE.

L'Académie vient de publier un volume in-4°, intitulé: *Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und dem Caspischen Meere in den Jahren* 1836 *und* 1837 *von G. Fuss, Sawitsch und Sabler ausgeführten Messungen . . .* (*Exposition des opérations exécutées en* 1836 *et* 1837, *pour déterminer la différence entre le niveau de la Mer Noire et celui de la Mer Caspienne, par MM. G. Fuss, Sawitsch et Sabler. St.-Pétersbourg* 1849). Désirant donner aux résultats principaux de cette expédition une publicité plus générale, j'ai l'honneur d'en présenter ici un résumé, tiré de l'analyse que j'ai placée, en guise de rapport, en tête de cet ouvrage

Premiere partie.

Différence entre le niveau de la Mer Noire et celui de la Mer Caspienne; et positions géographiques dans la province Ciscaucasienne.

1.

Conformément au plan arrêté par l'Académie, nos trois astronomes avaient à opérer sur une ligne entre Kagalnik, sur

les bords de la Mer d'Azov, et Tchernoï-Rynok, sur la Mer Caspienne. Le premier village se trouve tout près de la ville d'Azov, le second est à 57 verstes au nord de Kislïar. Cette ligne devait longer la grande route qui va, dans une direction sud-est et est, de Novo-Tcherkask par Stavropol, Guéorguievsk et Mosdok à Kislïar. Puis elle tournait au nord et formait un arc, en suivant une portion de la route entre Kislïar et Astrakhan, route qui passe à 17 verstes de Tchernoï-Rynok. La longueur totale de cette distance, comptée par les relais de poste, est de 885 verstes.

Sur une distance de 257 verstes, c.-à-d. jusqu'à 80 verstes de Stavropol, il y a un terrain de steppe, entièrement dépourvu d'arbres et même de buissons, mais parsémé dans toutes les directions de petits tertres de 15 à 30 pieds anglais de haut, appelés kourgans, d'origine très incertaine, mais qui sont de grande utilité dans les opérations géodésiques. Ce terrain s'élève cependant peu à peu à une hauteur de 600 pieds. Dans la partie suivante, de 240 verstes, jusqu'aux environs de Guéorguievsk, le terrain est plus inégal, et la nature devient un peu plus attrayante. Il y a des élévations, des ravins, des bocages, et la ville de Stavropol se trouve ici sur le plateau dominant de la province Ciscaucasienne, dans une élévation de 1688 pieds au-dessus de la Mer Noire. Depuis Guéorguievsk jusqu'à Naour, distance 175 verstes, le terrain redevient la steppe primitive; mais il descend déjà par de longues ondulations. A Naour commence un terrain de nature particulière. C'est comme un fond de mer sablonneux, bouleversé par des orages impétueux, avec une infinité de petites collines et de vallées peu profondes, mais qui rendent les communications et les opérations géodésiques extrêmement difficiles. Tout près de la Mer Caspienne le sable cesse, mais le terrain est entrecoupé par des marais.

Il existe une autre ligne entre les deux mers, bien plus courte, de 620 verstes, depuis Kagalnik jusqu'à l'embouchure de la Kouma dans la Mer Caspienne, et qui longe la rivière Manitch. Cette ligne fut rejetée, parce qu'elle traverse un désert inhabité et manquant de moyens de subsistance et de communication. La ligne choisie réunissait, au

contraire, toutes les conditions essentielles pour la réussite de l'expédition, et avait, en outre, l'avantage important d'offrir, sur la partie moyenne, la vue des montagnes du Caucase, et par là la possibilité d'en déterminer les hauteurs; sans considérer le profit que l'expédition promettait à la géographie du pays, en fixant les positions des villes principales, villages, relais etc. de cette province.

2.

Les instruments destinés aux différents travaux de l'expédition formaient la collection suivante:

1) un instrument des passages transportable; lunette de 18 pouces de foyer;
2) un grand instrument universel d'Ertel; lunette de 18 pouces;
3) deux cercles verticaux ou théodolites; lunettes de 13 pouces;
4) un petit instrument universel; lunette de 10 pouces;
5) trois chronomètres de boîte;
6) échelle en fer, compas de verge etc.;
7) deux lunettes itinéraires;
8) baromètres, thermomètres etc.;
9) une collection de niveaux;
10) appareils auxiliaires et de réserve.

Je remarque ici que dans les instruments 2, 3, 4, employés à la mesure des distances au zénith, le niveau était attaché directement au cercle divisé, et non pas sur l'axe; et que tous nos niveaux, remplis d'éther sulphurique, étaient des plus parfaits, travaillés par MM. Repsold à Hambourg.

Les préparatifs nécessaires étant faits à Novo-Tcherkask, ville de gouvernement, les opérations elles-mêmes commencèrent à Kagalnik le 1 nov. 1836, et furent continuées jusqu'à l'arrivée de l'hiver, le 29 du même mois. Elles furent reprises le 6 avril 1837, et prolongées sans interruption jusqu'au 14 juillet. La saison des extrêmes chaleurs engagea nos astronomes à une interruption des travaux pendant 4 semaines. Ils s'y remirent le 10 août, et terminèrent les opéra-

tions le 31 octobre à Tchernoï-Rynok; ce qui donne en tout 209 jours de campagne.

3.

Par l'érection successive de 124 signaux P^1 à P^{124}, placés par préférence sur les kourgans, et pourvus de mires de couleur blanche sur un fond noir, élévées de 16 pieds au-dessus du sol, et visibles des deux côtés, la ligne d'opération fut transformée en un polygone non fermé, et dont la somme des côtés était de 824 verstes. Autant que la nature du terrain le permettait, les signaux était placés à égale distance entre eux; d'où suit que la valeur moyenne d'un côté, c.-à-d. de la distance de deux signaux voisins, était de 23392 pieds = 6,68 verstes. A l'aide d'un appareil d'une application facile, mais qui donnait l'exactitude requise, une petite base $A^n B^n$ fut mesurée, à mi-chemin entre chaque couple de signaux voisins P^n et P^{n+1}. C'est ainsi que nos astronomes ont effectué successivement la mesure de 123 bases, d'une longueur moyenne de 1172 pieds. Formons maintenant les deux triangles $A^n B^n P^n$ et $A^n B^n P^{n+1}$ qui, joints, forment un rhombe oblong, et nous n'aurons qu'à mesurer les angles, pour trouver soit la valeur des côtés, soit celle de la diagonale du rhombe, c.-à-d. la distance des deux signaux P^n et P^{n+1}.

L'angle opposé à la base, ayant une valeur moyenne de $5^0\ 44'$, a été mesuré à l'aide du grand instrument d'Ertel, avec l'exactitude d'une seconde dans l'angle. Le même instrument a été employé pour l'angle entre les deux diagonales contiguës $P^n P^{n-1}$ et $P^n P^{n+1}$.

Pour les angles aux deux extrémités des bases, on se servait du petit instrument universel, mais qui donnait toujours les angles à 6″ près. La somme des angles dans les différents triangles, et les observations réitérées garantissaient l'opération contre des fautes de toute espèce. Par ces voies, nos astrononomes ont produit une évaluation précise de chaque distance isolée $P^n P^{n+1}$, et de l'enchainement intime des 123 côtés du polygone entre P^1 et P^{124}. Une telle opération, dès qu'elle est travaillée avec soin dans toute ses parties, offre une précision distinguée, étant exempte, par suite

du grand nombre de bases mesurées, de cette accumulation d'erreurs, dans les distances, que produit l'enchaînement successif des triangles dans les opérations ordinaires. Dans notre cas, il n'y a à craindre qu'une accumulation d'erreurs, dans les directions. Nos astronomes, pour obvier à ce péril, ont déterminé, par l'observation surtout de la polaire, l'azimut absolu du signal voisin, non seulement en P^1 et P^{124}, mais en sus sur 7 points intermédiaires, et en même temps les latitudes. Avec ces observations furent combinées les directions azimutales des cimes principales du Caucase, sur toutes les stations où elles se présentaient à l'oeil, dans des circonstances atmosphériques favorables à l'observation.

J'ai examiné l'influence que peuvent avoir exercée les différentes sources possibles d'erreur, sur l'exactitude des résultats géodésiques en sens horizontal, déduits de notre opération. Cette recherche m'a fait voir que la somme des côtés du polygone depuis P^1 à P^{124}, trouvée par le calcul de nos astronomes, est sujette à une erreur probable de $\frac{1}{27700}$ de sa valeur ou de 101 pieds.

4.

En combinant les opérations géodésiques avec les observations célestes, nos astronomes ont calculé, sur les dimensions de l'ellipsoïde terrestre selon Bessel, *Astron. Nachr.* No. 438, les positions géographiques de 32 points principaux du pays. Novo-Tcherkask leur avait servi de point de départ pour les longitudes. En effet, 5 passages du premier bord de la Lune et 4 du second bord, observés par M. Sawitch, en septembre et octobre 1836, et deux occultations d'étoiles, observées plus tard, avaient donné l'église St.-Nicolas de cette ville a $2^h\ 31^m\ 0^s{,}4$ à l'est de Paris. J'ai ajouté à ce chiffre $2^s{,}4$, d'après nos grandes opérations chronométriques, exécutées depuis entre Greenwich, Altona, Poulkova, Moscou et plusieurs points méridionaux de l'Empire, en supposant Paris à $9^m\ 21^s{,}6$ à l'est de Greenwich. Sur ces données repose le tableau suivant des positions géographiques gagnées.

Positions géographiques.

	Latitude			Longitude à l'est de Paris		
Novo-Tcherkask, ville, église St.-Nicolas.	47°	24′	35″	37°	45′	42″
Kagalnik, village, église	47	4	26	36	59	11
Novo-Nicolaïevka, village, église	46	58	38	37	16	37
Novo-Bataïskaïa, village, église	46	53	49	37	26	41
Kagalnitzkaïa, poste de Cosaques, église	46	53	0	37	48	31
Novo-Iégorlitzkoïe, poste de Cosaques, église	46	33	40	38	19	11
Srédni-Iégorlitzkoïe, village, église	46	22	14	38	28	35
Pestchanokopskoïe, village, église	46	12	9	38	44	34
Letnitzkoïe, village, église	46	0	52	38	54	59
Novo-Troïtzkaïa, poste de Cosaques, église	45	22	47	39	12	9
Rojestvenskaïa, poste de Cosaques, église	45	12	51	39	29	12
Stavropol, ville, nouvelle cathédrale	45	3	11	39	39	3
Beschpaguir, poste de Cosaques, église	45	0	59	40	2	37
Alexandrov, bourg, église	44	42	42	40	40	12
Alexandria, poste de Cosaques, église	44	13	27	41	0	38
Guéorguievsk, ville, église	44	8	52	41	8	24
Iekaterinogradskaïa, poste de Cosaques, église	43	45	47	41	53	23
Pavlodolskaïa, poste de Cosaques, église	43	43	10	42	8	0
Mosdok, ville, cathédrale	43	43	58	42	19	41
Mosdok, ville, église arménienne	43	44	15	42	19	22
Kolïougaï, poste de Cosaques, église	43	41	41	42	35	54
Istcherskaïa, poste de Cosaques, église	43	43	0	42	47	16
Naour, poste de Cosaques, église	43	39	5	42	58	22
Soukhoborodïnsk, relais	43	52	30	44	13	56
Kislïar, ville, cathédrale	43	51	0	44	22	10
Kislïar, ville, église arménienne	43	51	33	44	22	35
Tchernoï-Rynok, village, maison seigneuriale	44	23	13	44	12	40
Beschtau, mont près de Piatigorsk	44	6	7	40	40	54
Elbrous, mont, cime occidentale	43	21	30	40	5	50
Elbrous, mont, cime orientale	43	21	8	40	6	30
Anonymus, mont	43	3	14	40	52	20
Kasbek, mont	42	42	4	42	10	49

5.

Je passe aux déterminations dans le sens vertical. Le problème à résoudre de la part de nos voyageurs, était d'évaluer les différences successives de hauteur, entre les 124 mires du polygone, à l'aide des angles d'élévation observés, en regardant les distances horizontales comme données. Ces différen-

ces réunies devaient fournir le niveau relatif des deux mires P^1 et P^{124}, et, par l'élévation linéaire de ces deux mires au-dessus des niveaux moyens respectifs des deux mers, directement mesurée, finalement la différence cherchée des deux mers. Or il est clair que cette dernière quantité, étant le résultat de la réunion de 123 chiffres isolés, réclame un haut degré de précision, dans les différences partielles.

Pendant les heures matinales de chaque journée, nos astronomes s'occupaient de la mesure des bases et des angles horizontaux. L'après-midi était voué uniquement à l'observation des angles verticaux terrestres; car c'est le temps des images moins ondulantes, et, par conséquent, le plus avantageux aux observations. Nos voyageurs observaient chaque jour simultanément sur trois points consécutifs, d'après la disposition suivante:

M. Fuss, F, observait
en B^{n+1} les mires P^{n+1} et P^{n+2}, à l'aide du théodolite I;
M. Sabler, Σ, observait
en P^{n+1} les mires P^n, B^n, B^{n+1} P^{n+2} » du gr. instr. univ.;
M. Savitsch, S, observait
en B^n les mires P^n et P^{n+1} » du théodolite II.

Les observations s'achevaient entre $3^h\ 30^m$ et $6^h\ 0^m$. Le jour suivant:

F observait en B^{n+2}, Σ en P^{n+2}, S en B^{n+1}.

Chaque après-midi et sur chaque station, ont été exécutées trois à quatre séries d'observations, et dont les termes moyens, distants entre eux de 50^m, étaient simultanés à la minute près. Pour ce but, les montres de poche étaient journalièrement réglées sur le temps vrai du lieu, à l'aide d'un des chronomètres. Pour chaque série, le lieu du zénith sur le limbe a été changé, afin de rencontrer d'autres divisions du limbe et d'autres parties des verniers. En outre, dans chaque série, l'époque moyenne de l'observation était la même pour les différents objets, par un arrangement convenable; p. e. Σ pointait ses 4 mires dans la succession suivante:

le cercle divisé à gauche: P^n, B^n, B^{n+1}, P^{n+2};
» » » » droite : P^{n+2}, B^{n+1}, B^n, P^n.

6.

Les irrégularités de la réfraction terrestre s'opposent à l'exactitude des opérations géodésiques verticales. Mais il y a deux méthodes d'en éliminer l'effet, au moins en majeure partie:

a) en combinant des observations réciproques et simultanées sur deux stations;

b) en déterminant, d'une station également distante de deux autres, la différence de hauteur pour ces deux, à l'aide d'observations simultanées.

La première méthode éliminerait entièrement l'effet de la réfraction, si la courbe du rayon visuel était symétrique par rapport à la ligne droite qui joint les deux points. Mais, comme c'est l'influence de la température du sol sur la densité des couches atmosphériques voisines qui modifie cette courbe, une forme symétrique ne peut avoir lieu, que dans les cas où les deux points d'observation se trouvent dans des conditions identiques, relativement au sol intermédiaire. En outre, dans les observations réciproques et simultanées, il faut deux observateurs et deux instruments; d'où suit que la différence des coefficients de flexion, propres aux deux instruments, entre dans la différence des hauteurs. Or il est extrêmement difficile de déterminer ces coefficients à la rigueur. Par ces raisons, il a paru nécessaire d'abandonner, pour notre opération, une méthode, qui donnerait une erreur du même sens dans chacune des 246 mesures partielles dont se composerait le résultat final de la différence des deux mers, dès que les observations marchaient d'après l'arrangement indiqué plus haut.

Voilà pourquoi, dans les instructions préparées pour nos astronomes, il leur était déjà dit de choisir par préférence la seconde méthode; car c'est dans celle-ci que l'influence de la flexion du tube disparaît du résultat tiré des observations des deux côtés. Mais pour faire réussir cette méthode, il fallait

agir de sorte, que les distances linéaires entre les 12 signaux successifs, fussent à peu près les mêmes, et que les petites bases se trouvassent à peu près également éloignées respectivement des deux mires voisines. Nos astronomes ont rempli ces conditions, autant que la nature du terrain l'a permis. Mais la méthode de l'observation à mi-chemin, pour être rigoureuse, suppose en outre l'égalité du coefficient de la réfraction simultanée, pour les deux directions opposées, c.-à-d. la forme symétrique du terrain, des deux côtés de la station où l'observation se fait. Cette supposition est aussi juste que celle qui doit être faite en se servant de la méthode des observations réciproques, et, à ce qu'il paraît, plus juste même dans la plupart des cas spéciaux de notre expédition, vu que, d'ordinaire, les signaux *P* se trouvaient sur les tertres, et les bases au milieu du terrain plat intermédiaire.

A ces considérations, ajoutons encore que, dans des procédés qui se répètent par centaines de fois, il faut éviter autant que possible toute occasion d'une méprise. Sous ce point de vue, les observations à mi-chemin ont un avantage essentiel sur les observations réciproques. Dans celles-ci, il faut réduire, sur les deux stations, la distance zénithale que l'on observe d'un statif placé à côté du signal, à celle qui a lieu au centre de la mire, réduction qui dépend de l'élévation de ce centre au-dessus de l'axe de la lunette. Dans les observations à mi-chemin, au contraire, la position de l'instrument s'élimine entièrement dans la différence cherchée des deux hauteurs. Ici, la seule possibilité d'une méprise serait dans l'observation des angles verticaux. Mais, pour ceux-ci, nous avons un contrôle rigoureux dans l'identité des lieux du zénith, déduits de l'observation des différents objets, et un autre contrôle subsidiaire par la marche des angles verticaux du même objet, dans les séries successives, éloignées entre elles de 50 minutes.

Si cette marche est soigneusement examinée sur toutes les stations, nous apprendrons jusqu'à quel point l'hypothèse des coefficients égaux de la réfraction, pour les objets observés des deux côtés, est ou non admissible; et nous verrons s'il y a lieu de modifier cette hypothèse selon certaines circonstances, et dont l'influence peut être évaluée au moins par ap-

proximation. Cette recherche conduira même à la connaissance de la loi générale que suit, plus ou moins près, la réfraction dans les heures successives de l'après-midi, et par là à la connaissance des poids relatifs des différentes séries d'une même journée, et finalement à une juste évaluation du résultat partiel pour chaque station, et de l'erreur probable auquel ce résultat est sujet.

7.

On comprendra aisément que le procédé des opérations, indiqué plus haut, a dû conduire à 5 suites d'observations à mi-chemin, étendues sur la ligne totale à niveller, et entièrement indépendantes entre elles; d'où resultent 5 suites indépendantes de différences partielles de hauteur. Les sommes respectives ont dû enfin donner 5 valeurs indépendantes de la différence du niveau des deux mers. Ces suites sont:

1) la suite F, déduite à l'aide des observations des mires P^n et P^{n+1}, qu'à faites M. Fuss au 123 stations B^n des bases;
2) la suite S, déduite des observations de M. Sawitch, faites aux mêmes 123 stations B^n, mais chaque fois d'un jour plus tard;
3) la suite Σ', déduite à l'aide des observations des mires établies sur les extrémités des bases B^n et B^{n+1}, qu'à faites M. Sabler aux 123 stations P^n;
4) la suite Σ'', déduite des observations des mires P^{n-1} et P^{n+1}, qu'à faites M. Sabler aux 61 stations P^n, n indiquant un nombre pair;
5) la suite Σ''', déduite des observations des mires P^n et P^{n+2}, qu'à faites M. Sabler au stations impaires P^{n+1}.

Sans entrer davantage dans les détails des recherches et des calculs, je donnerai maintenant les 5 chiffres $K = C - A$ c.-à-d. les valeurs de la différence du niveau de la Mer Caspienne et de la Mer Noire, trouvées par le calcul des 5 suites; et j'ajouterai les erreurs probables ε de ces chiffres, déduites de la combinaison de toutes les incertitudes partielles qu'ont pu produire les différentes sources possibles d'erreur.

		pieds anglais			$\varepsilon =$ pieds	écarts de la moyenne. pieds
La série F	donne $K =$	— 87,72,	avec	l'err. prob.	2,21	— 1,84
» » S	»	— 87,68	»	» »	2,21	— 1,80
» » Σ'	»	— 84,16	»	» »	1,89	+ 1,72
» » Σ''	»	— 80,05	»	» »	3,69	+ 5,83
» » Σ'''	»	— 87,68	»	» »	3,35	— 1,80
Moyenne, eu égard aux erreurs prob.		— 85,88,	»	» »	1,07	

C'est l'accord des cinq K qui nous conduit à porter un jugement clair sur la certitude du résultat, donné par la moyenne $K = -85{,}88$ pieds. L'erreur probable de ce chiffre a été trouvée 1,07 pieds, en partant des erreurs probables individuelles des 5 valeurs. Mais les écarts des cinq K de leur moyenne conduisent à l'erreur probable de cette moyenne, 0,83 pieds, plus petite que 1,07: d'où suit que les cinq K s'accordent entre eux même mieux, qu'il ne fallait l'attendre d'après les erreurs individuelles.

8.

Cette valeur moyenne $K = -85{,}88$ pieds n'est cependant pas la plus probable qui puisse être déduite de nos matériaux. La séparation des 5 suites, dans l'étendue totale de l'opération, n'a pu être faite qu'avec une perte de précision pour le chiffre final. Elle était néanmoins d'une haute importance, en augmentant la confiance à donner au résultat, confiance qui est subjectivement mieux fondée sur l'accord de 5 chiffres indépendants, que sur un calcul qui conduit à un seul chiffre, et dans lequel les travaux individuels s'absorbent. Or, il est clair, qu'en désignant par V^n la différence verticale de deux mires voisines ou $P^{n+1} - P^n$, la combinaison la plus avantageuse est celle qui donne chaque V^n par la réunion de toutes les opérations partielles qui la déterminent, eu égard à leur réciprocités et poids relatifs. Puis la différence des mires extrêmes $P^{124} - P^1 = U$ se trouve par

$$U = V^1 + V^2 + \ldots + V^{123}.$$

Par cette voie, j'ai obtenu enfin le résultat définitif de notre expédition, que voici:

pour l'époque 1837, *octobre, le niveau moyen de la Mer Caspienne est de* 85,45 *pieds anglais* = 12,21 *sajènes* = 26,045 *mètres au-dessous du niveau de la Mer Noire, et ce chiffre est sujet à une erreur probable de* 0,83 *pied* = 0,12 *sajène* = 0,252 *mètre.*

Seconde partie.

Recherches sur la réfraction terrestre. Détermination de la hauteur de plusieurs sommets du Caucase.

9.

Le mont Caucase a, entre Bacou sur la Mer Caspienne, et l'embouchure du Kouban dans la Mer Noire, une longueur, en ligne droite, de 1050 verstes. Il occupe 12° de longitude et s'étend, avec une direction moyenne ONO., depuis 40° jusqu'à 45° de latitude. Nos astronomes avaient vu le Caucase sur une étendue de 300 verstes de la ligne d'opération, depuis Stavropol jusqu'à 50 verstes à l'est de Mosdok, et choisirent 4 sommets distingués pour en déterminer la hauteur, le *Beschtau* près de Piatigorsk, montagne isolée et presque détachée du corps du Caucase, et les trois cimes dominantes, *l'Elbrous* à deux sommets, le *Kasbek*, et une troisième, inconnue de nom, et située à mi-chemin entre les deux.

La ligne du nivellement passait à une distance de 29 verstes du Beschtau, mais par deux triangles auxiliaires nos observateurs venaient jusqu'à 10 verstes du sommet. Les trois cimes dominantes étaient toujours en plus grande distance, mais qui changeait avec les stations. Pour déterminer les différentes distances horizontales, entre les stations successives et les montagnes, nos astronomes ont mesuré les directions des sommets, soit absolues ou azimuts, soit relatives ou angles avec un côté du polygone,

pour			Angle formé au sommet par les dir. extrêmes.
Beschtau à	4	stations	37°
Elbrous	5	»	40
Kasbek	7	»	52
Anonymus	5	»	35

Les détérminations multiples des sommets ont fait connaître la certitude des positions relatives évaluées; et j'ai trouvé que les distances linéaires entre ces sommets et les stations d'observation sont exactes à moins de $\frac{1}{10000}$ près.

10.

L'observation des angles verticaux des 5 sommets a été exécutée par les trois astronomes et a l'aide des trois instruments respectifs, en employant, comme dans le nivellement, chaque fois quatre pointages, dans les deux positions du cercle, à gauche et à droite.

Une partie des observations de l'Elbrous ont été faites en hiver, entre le 24 décembre 1836 et le 27 février 1837. Les autres observations tombent toutes sur les mois de juillet et d'août 1837. Le tableau suivant donne une idée générale des observations verticales:

		Nombre d'observations.	Distance horiz. maxim.		minim.	
Beschtau a été observé de	7 stations	21	83	10	verst.	
Elbrous sommet Or.	» 6	»	35	180	111	»
» » Occ.	» 6	»	34	180	111	»
Kasbek	» 7	»	16	120	108	»
Anonymus	» 5	»	12	106	97	»

L'exactitude de ces mesures est telle, que la distance zénithale que fournissent les 4 pointages, est sujette à une erreur probable de 1″,1 pour l'instrument universel, et de 1″,6 pour les deux théodolites, chiffres qui ont été déduits de l'accord des lieux du zénith obtenus pour les différents objets d'une même série. En tout, la distance zénithale a été mesurée 118 fois, à 13 stations, en différentes saisons, et par des températures depuis — 11°,0 jusqu'à + 23°,5 R., et à différentes heures

du jour, soit matinales soit de l'après-midi. Ces riches matériaux promettaient une évaluation très exacte des hauteurs et, à ce que j'espérais, des résultats intéressants sur la réfraction terrestre. Cette dernière espérance était fondée sur les conclusions importantes que M. Sabler avait tirées des observations faites aux 246 stations du nivellement entre les deux mers.

11.

Les experts savent que, presque chaque jour, dans les heures de l'après-midi, à peu près à 0,6 de l'intervalle entre midi et le coucher du Soleil, il y a un temps où les objets terrestres, regardés à l'aide des lunettes, offrent des images tranquilles. Nous désignerons ce temps par le *calme des images*. La durée du calme est plus ou moins longue, selon les circonstances atmosphériques et locales. Avant et après le calme on voit des images ondulantes, c'est le temps du *trouble des images*. D'ordinaire, le trouble augmente avec l'éloignement du temps des images tranquilles. Mais les deux troubles, des deux côtés du calme, sont de nature opposée. Le trouble qui précède, peut être nommé *trouble négatif*, car il est toujours accompagné d'une réfraction plus petite que celle qui a lieu pendant le calme. D'autre côté, tout trouble postérieur au calme, présente une réfraction plus grande, et par là peut porter le nom de *trouble positif*. Il y a le matin une seconde époque du calme, mais de plus petite durée, précédée du trouble positif et suivie du trouble négatif qui continue jusqu'au calme de l'après-midi.

M. Sabler commença ses recherches sur la réfraction par l'évaluation du coefficient de la réfraction qui a lieu pendant le *calme parfait*, à l'aide des nombreuses observations réciproques du nivellement, faites dans des distances moyennes de $C = 115''{,}5$ et de $C = 230''{,}7$ d'un grand cercle terrestre, ou de 3,4 et 6,7 verstes. Il obtint

$(\rho) = 0{,}0876\, C \mp 0{,}0019\, C$, pour les petites dist. $C = 115''{,}5$,
et $(\rho) = 0{,}0884\, C \mp 0{,}0013\, C$ » » grandes » $C = 230''{,}7$.

L'accord de ces deux chiffres, et l'exactitude avec laquelle

toutes les observations étaient représentées par cette expression, le conduisirent à la thèse suivante:

En été et pour des élévations peu considérables au-dessus du niveau de la mer, le coefficient de la réfraction terrestre est 0,088, *chaque fois que la lunette nous présente des images parfaitement tranquilles des objets.*

12.

L'exercice continuel avait engagé nos astronomes à distinguer les différents degrés du trouble par des expressions convenables, et à les indiquer dans les journaux, à coté de chaque observation. L'inspection des journaux fait voir, que d'ordinaire les 4 objets, distants des deux côtés de 3,4 et 6,7 verstes, ont été notés simultanément de la même caractéristique; mais assez souvent on y rencontre une différence prononcée, et qui dépendait surtout de l'élévation plus ou moins grande du rayon visuel au-dessus du sol, dans les différentes directions. M. Sabler avait 5 degrès, de chaque côté du calme parfait, jusqu'aux images tellement ondulantes, que les observations devinsent impossibles. Il s'agissait donc, en second lieu, de déterminer les valeurs moyennes de la réfraction pour ces différents degrès, et de les comparer avec les réfractions (ϱ) du calme. Cette recherche, basée sur un total de 994 couples d'angles verticaux réciproques, a donné les résultats que voici:

Caractéristiques de l'image. (n = négatif, p = positif.)	Valeur moyenne de la réfraction. A. Pour les objets distants de $C = 115''{,}5$.	Valeur moyenne de la réfraction. B. Pour les objets distants de $C = 230''{,}7$.	$K = (\rho)' - (\rho)$. Moyenne de A et B.	Nombre des observations.	Écart prob. d'une réfraction isolée. A.	Écart prob. d'une réfraction isolée. B.
Grand trouble.....n	$(\rho)^{-5} = -33''{,}2 = (\rho) - 43''{,}4 \mp 2''{,}3$	$(\rho)^{-5} = -15''{,}8 = (\rho) - 36''{,}1 \mp 3''{,}2$	— 39″,8	15	7″,5	5″,3
Trouble.....n	$(\rho)^{-4} = -13{,}1 = (\rho) - 23{,}3 \mp 0{,}7$	$(\rho)^{-4} = -4{,}1 = (\rho) - 24{,}4 \mp 1{,}7$	— 23,8	46	4,0	6,0
Demi-trouble..... n	$(\rho)^{-3} = -3{,}9 = (\rho) - 14{,}1 \mp 0{,}5$	$(\rho)^{-3} = +6{,}2 = (\rho) - 14{,}1 \mp 0{,}6$	— 14,1	133	4,3	3,8
Demi-calme.....n	$(\rho)^{-2} = +0{,}7 = (\rho) - 9{,}5 \mp 0{,}3$	$(\rho)^{-2} = +11{,}1 = (\rho) - 9{,}2 \mp 0{,}3$	— 9,4	255	3,0	3,3
Calme.....n	$(\rho)^{-1} = +6{,}2 = (\rho) - 4{,}0 \mp 0{,}2$	$(\rho)^{-1} = +16{,}0 = (\rho) - 4{,}0 \mp 0{,}3$	— 4,0	158	2,2	2,5
Calme parfait.....	$(\rho) = +10{,}2 = 0{,}088\,C \mp 0{,}2$	$(\rho) = +20{,}3 = 0{,}088\,C \mp 0{,}2$	0	144	2,4	2,0
Calme.....p	$(\rho)^{+1} = +13{,}8 = (\rho) + 3{,}6 \mp 0{,}3$	$(\rho)^{+1} = +23{,}7 = (\rho) + 3{,}4 \mp 0{,}5$	+ 3,5	67	2,3	2,2
Demi-calme.....p	$(\rho)^{+2} = +17{,}7 = (\rho) + 7{,}5 \mp 0{,}5$	$(\rho)^{+2} = +27{,}7 = (\rho) + 7{,}4 \mp 1{,}0$	+ 7,4	68	3,1	5,1
Demi-trouble.....p	$(\rho)^{+3} = +23{,}1 = (\rho) + 12{,}9 \mp 0{,}9$	$(\rho)^{+4} = +36{,}2 = (\rho) + 15{,}9 \mp 1{,}5$	+ 14,4	33	4,2	5,4
Trouble.....p	$(\rho)^{+5} = +30{,}8 = (\rho) + 20{,}6 \mp 1{,}2$	$(\rho)^{+5} = +42{,}5 = (\rho) + 22{,}6 \mp 2{,}6$	+ 21,6	20	4,5	5,9
Grand trouble.....p	$(\rho) = +48{,}9 = (\rho) + 38{,}3 \mp 4{,}9$	$(\rho) =$	+ 38,3	7	12,9	

13.

Par l'examen du tableau précedent, et en consultant les journaux et les calculs de nos voyageurs, je suis parvenu aux conclusions et remarques suivantes.

1) La marche régulière des ϱ prouve la réalité des caractéristiques introduites. La réfraction qui a lieu à l'époque du calme parfait doit être nommée *réfraction normale*. Toutes les fois que nous voyons des images ondulantes, il y a des *réfractions troublées*.

2) La différence angulaire K, entre la réfraction troublée et la réfraction normale $= 0{,}088\ C$, pour une caractéristique quelconque, à été trouvée la même pour des distances horizontales $C = 115''{,}5$ et $C = 230''{,}7$. D'où suit, que K ne dépend point de la distance, mais uniquement du degré du trouble dans les différents objets. On pourrait nommer ce K la *perturbation angulaire de la réfraction*.

3) Pour les caractéristiques du même index, mais de signe opposé, les perturbations sont de même grandeur, mais négatives et positives; car nous avons, avec un accord surprenant, par la colonne des moyennes:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,[(\varrho)^{-5} + (\varrho)^{+5}] &= (\varrho) - 0''{,}6;\\
\tfrac{1}{2}\,[(\varrho)^{-4} + (\varrho)^{+4}] &= (\varrho) - 1''{,}1;\\
\tfrac{1}{2}\,[(\varrho)^{-3} + (\varrho)^{+3}] &= (\varrho) + 0''{,}2;\\
\tfrac{1}{2}\,[(\varrho)^{-2} + (\varrho)^{+2}] &= (\varrho) - 1''{,}0;\\
\tfrac{1}{2}\,[(\varrho)^{-1} + (\varrho)^{+1}] &= (\varrho) - 0''{,}2.
\end{aligned}$$

4) La marche que prend l'image, à travers les différentes caractéristiques, est extrêmement régulière, toutes les fois qu'il n'y a point de changement brusque dans l'état de l'atmosphère. Elle est plus rapide par un ciel clair, que par un ciel couvert, plus rapide en été, qu'en hiver.

5) Il y a cependant des causes qui interrompent cette marche régulière. La transition subite d'un ciel clair à un ciel couvert a pour effet, que l'image s'approche du calme, et que la marche se ralentit. Le changement d'un

ciel couvert en ciel clair, au contraire, produit une augmentation dans le sens du trouble négatif. Dans ce dernier cas, un calme parfait peut avoir lieu à deux reprises, séparées par l'apparition brusque du Soleil après un ciel nuageux. Une pluie soudaine produit l'effet opposé, car elle peut produire un saut du trouble négatif de l'image au trouble positif. Il y a même des cas où, par l'effet d'une pluie, et plus encore d'une grêle, l'anomalie devient telle, que le trouble négatif est remplacé par le trouble positif, et suivi après, si le Soleil reparaît, d'un second trouble négatif, d'où seulement commence la marche régulière de l'image. De ces expériences suit la règle:

dans les opérations d'un nivellement trigonométrique, il faut éviter d'observer, dès qu'il y a des changements brusques de l'état de l'atmosphère, et surtout quand le Soleil darde peu de temps après une pluie. Il faut éviter encore davantage les observations, pour lesquelles on rencontre une pluie dans une des directions, et dans une autre un beau Soleil.

6) L'intensité du trouble dépend encore, à côté de l'heure et de la distance, de l'élévation du rayon visuel, au-dessus du sol, dans toute son étendue. Car c'est l'action du sol sur les couches voisines de l'air qui produit les perturbations. Le trouble, par conséquent, devient plus grand, à proportion que l'élévation linéaire du rayon visuel au-dessus du sol est plus petite. C'est par cette raison que, d'une station moyenne, on voit quelquefois, des deux côtés, un état des images très différent. D'un côté il y a p. e. le trouble négatif, de l'autre vous voyez le calme; et dans ce cas une réfraction égale des deux signaux est inadmissible.

7) Dans l'opération du nivellement, nos astronomes observaient simultanément à trois stations successives. Il y a par conséquent, dans les journaux, pour l'époque de chaque série, trois notations de la caractéristique, et c'est l'accord de ces notations qui en démontre la cer-

titude pour la plupart des cas. Aussi nos astronomes n'ont ils pas hésité à faire usage des caractéristiques dans leurs calculs, et la réfraction effective a été évaluée, pour chaque objet observé, d'après la caractéristique qui lui avait été donnée, dans le journal, par l'observateur. J'ai la conviction que cette voie, conjointement avec la succession des séries de la même journée, et qui embrassaient les trois états de la réfraction, négativement troublée, normale, et positivement troublée, a contribué essentiellement à la certitude des résultats, obtenus pour la différence du niveau des deux mers.

8) Notre tableau indique, dans les deux dernières colonnes les écarts probables d'une réfraction observée, relativement à sa valeur moyenne. Ces chiffres et d'autres analogues ont donné le moyen de réunir toutes les valeurs $p^{n+1} - p^n$, qu'avaient fournies les différentes séries de chaque observateur, par l'observation pendant plusieurs heures, et puis de réunir les 5 suites des trois astronomes, à une valeur finale, en employant des poids relatifs justement appréciés.

14.

Je suis bien loin de prétendre, qu'en prenant K dans notre tableau d'après la caractéristique, $(\varrho)^n = 0{,}088\ C + K$ soit une expression exacte de toute réfraction troublée, le coefficient 0,088 lui même étant déjà sujet à quelque incertitude, à cause de la petitesse des arcs terrestres employés à sa détermination. Cette formule doit être regardée plutôt comme l'expression locale pour notre nivellement de steppe. Il faut, en outre, avouer que l'application de la caractéristique de l'image au calcul de hauteur est précaire, à cause du vague qui a lieu dans l'estimation subjective du degré du trouble. Il n'y a qu'une seule caractéristique dont l'indication ne soit sujette a aucun doute, c'est *le calme parfait*. Cette considération nous conduit à la conclusion importante que,

dèsque la distance entre l'observateur et l'objet est considérable, il faut baser toute détermination de hauteur, à l'aide

des angles verticaux, sur des observations faites pendant le calme des images, c.-à-d. pendant l'époque où il y a une réfraction normale.

Heureusement, d'ordinaire, le calme se présente deux fois par jour, le matin et l'après-midi, et la durée en est assez longue pour admettre une observation complète de la distance zénithale. En outre, l'observation elle-même gagne en précision intrinsèque par l'absence des ondulations de l'image.

15.

La réfraction normale est devenue l'objet de mes recherches ultérieures et qui avaient pour but d'examiner:

a) si en effet, pendant le calme de l'image, il existe une réfraction terrestre normale qui, à l'analogie de la réfraction astronomique, s'exprime par une formule dans laquelle entrent: l'arc compris terrestre avec son coefficient constant, et des termes qui se déduisent de l'indication du baromètre et du thermomètre sur le lieu de l'observation;

b) quelle est l'exactitude de cette formule dans l'application à des cas spéciaux;

c) de déterminer la hauteur des cinq sommets du Caucase au-dessus de la mer, en employant les données que fournirait la recherche des réfractions, et en partant, pour les différentes stations d'observation, des hauteurs qu'avait données le calcul définitif du nivellement.

Une circonstance de la plus haute importance et qui facilita itinfiniment ces recherches, se trouve dans ce que la hauteur des différentes stations d'observation, soit absolue, soit relative, a pu être regardée comme exactement connue, vu que, pour toutes ces stations, l'erreur probable de la hauteur relative n'est que de 4 pouces, et celle de la hauteur absolue est en dedans de 8 pouces.

16.

D'après ce qui a été dit plus haut, les journaux de l'expédition présentent 118 observations des cinq sommets indi-

qués. De ce nombre, 114 observations ont été faites par un ciel parfaitement clair; car l'absence des nuages est une condition indispensable, pour voir des cimes dont la hauteur s'élève au-dessus de la région ordinaire des nuées. Il n'y a que 4 observations du Beschtau, élevé de 4600 pieds, qui ont été faites par un ciel couvert.

La caractéristique de l'image se trouve, dans les journaux, pour toutes les observations du Caucase, faites en été 1837; mais elle manque pour les observations de l'Elbrous exécutées, en hiver 1836—1837, à Stavropol. Il faut cependant admettre que ces observations d'hiver ont été faites, soit par un calme parfait, soit assez près du calme de l'image; parce que la montagne qui se présentait, dans une distance de 180 verstes, comme un nuage blanc et faible, élevé de 48′ au-dessus de l'horizon, aurait dû disparaître, dès qu'il y avait des ondulations tant soit peu considérables de l'air. Cette supposition a été confirmée par l'explication orale de nos astronomes, et par la circonstance, que la plupart des observations d'été ont dû être faites pendant le calme, quoique dans des distances bien moins grandes. En effet, parmi les 54 observations d'été des 4 cimes dominantes, il y a 42 où le calme, et 12 où le trouble est indiqué. Pour Beschtau, observée jusqu'à 10 verstes de distance horizontale, et qui, de si près, restait visible dans tous les états de l'atmosphère, il y a 8 observations calmes, et 13 de troublées.

Les observations d'hiver faites à Stavropol se divisent en 21 angles verticaux du sommet oriental, et 22 du sommet occidental de l'Elbrous. Mais ces dernières ne sont point comparables aux observations faites sur les stations d'été, parce que, de l'immense distance de Stavropol, l'éminence pointue qui couronne le sommet occidental de l'Elbrous, n'avait pas été visible; et c'est précisément cette éminence qui a été observée des autres stations, étant en effet l'extrémité suprême de cette montagne colossale.

17.

Il me restaient ainsi 50 observations d'été et 21 d'hiver, en tout 71 observations des 5 sommets, faites, sur 13 stations,

pendant le calme des images, et qui ont dû être regardées comme le fondement de mes recherches. Il fallait maintenant en déduire 71 équations de condition, pour l'évaluation des différentes inconnues à déterminer.

Dans des calculs de ce genre, on aime à éviter les inconnues primitives, en leur substituant une valeur approximée + une correction à trouver. J'eus l'avantage de pouvoir tirer profit des hauteurs des 5 sommets, qu'avait trouvées M. Sawitch par une voie très ingénieuse, en supposant que, pour deux sommets observés simultanément, il y eût un même coefficient de la réfraction. Or, les sommets ayant été observés simultanément de plusieurs stations, et pour lesquelles les distances horizontales variaient considérablement, M. Sawitch parvint successivement à éliminer les différentes réfractions et à trouver des valeurs assez exactes de la hauteur. Les chiffres trouvés par M. Sawitch me pouvaient fournir une connaissance au moins approximative de la réfraction qui avoit eu lieu dans chaque observation isolée, et par là me conduire à un jugement général sur la marche de ces réfractions.

Soit:

$H + dH$ la vraie hauteur du sommet au-dessus de la Mer Noire, H étant le chiffre donné par M. Sawitch;

S la hauteur définitive de l'instrument, donnée par le nivellement;

$H - S = u$;

C l'arc géodésique compris entre l'objet et la station, et donné par la distance horizontale et le rayon de courbure;

D' la chorde linéaire de cet arc, prise à la hauteur de l'instrument;

z la distance au zénith observée:

nous faisons

$$u' = u \cos \tfrac{1}{2} C \quad ; \quad d = u \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\text{tang. } q = \frac{u'}{D + d}; \quad z' = 90^0 + \tfrac{1}{2} C - q;$$

et nous aurons

$\varrho = z' - z - \frac{dH}{D' \sin 1''}$, la réfraction angulaire observée,

$\mu = \frac{\varrho}{C}$, le coefficient observé de la réfraction.

18.

J'ai fait ce calcul des ϱ pour toutes les 118 observations, tant normales que troublées, et qui se subdivisent en 73 observations matinales et 45 faites l'après-midi. La comparaison de ces μ ou ϱ, a conduit aux conclusions suivantes, en négligeant d'abord la correction dH.

1) Les 50 observations d'été donnent pour le coefficient de la réfraction normale la valeur moyenne $\mu = 0{,}072$. En séparant les observations en deux groupes, on trouve

par les 25 observations de l'après-midi, $\mu = 0{,}069$,
» » 25 » » du matin, $\mu = 0{,}075$.

La distance de l'objet et la différence en hauteur, plus ou moins grandes, n'agissent que très faiblement sur la valeur de μ. Beschtau élevé de 4600 pieds donne le même μ, que les quatre cimes dominantes qui vont jusqu'au delà du quadruple de hauteur.

2) La valeur moyenne $\mu = 0{,}072$ est plus petite que le $\mu = 0{,}088$, trouvé également en été par les observations du nivellement.

3) Les observations de l'Elbrous faites en hiver donnent pour la réfraction normale $\mu = 0{,}092$, plus fort que le μ d'été.

4) Les perturbations de la réfraction, dans les objets très éloignés et très élevés, suivent la marche indiquée plus haut pour les observations du nivellement. Le matin commence, au lever du Soleil, par une perturbation positive; suit le calme de l'image avec la réfraction normale; puis la perturbation négative, et qui continue jusqu'à l'heure de l'après-midi, où se montre le calme de l'image accompagné de nouveau d'une réfraction normale, mais qui change plus tard par une perturbation positive.

5) La valeur angulaire K de la perturbation n'est point du tout, au même instant, la même pour les différents objets, car elle dépend en premier lieu de l'élévation linéaire, plus ou moins grande, du rayon visuel au-dessus du sol. Presque toujours les cimes élevées se présentent de sorte, que la ligne droite qui les joint à l'oeil, monte au-dessus du sol plus rapidement, que pour un objet d'une petite élévation. Les ondulations des sommets élevés sont moindres que celles des objets plus bas. Aussi, par cette raison, les perturbations K qu'ont manifestées les 4 cimes dominantes, ont-elles été, sans exception, plus faibles que celles qu'éprouvait Beschtau, quoique dans une distance bien plus petite. D'où suit que la perturbation de la réfraction est un phénomène tout à fait local, et modifié surtout par la nature et la forme du sol qui s'étend depuis l'oeil jusqu'à l'objet. Enfin, comme il est impossible d'introduire le terrain dans les formules, les réfractions troublées se soustraient à l'analyse exacte, quoiqu'elles suivent une marche bien prononcée.

6) Le calme de l'image dure, surtout pour les sommets élevés, assez longtemps, pour faire voir, que pendant le calme lui-même, la réfraction subit encore une petite variation, de sorte que μ diminue peu à peu le matin, et augmente l'après-midi. Cette inconstance apparente de la réfraction normale est cependant intimement liée avec la marche journalière de la température.

C'est dans ce dernier point que j'espérais trouver la clef qui devait conduire à une connaissance plus exacte de la réfraction terrestre.

19.

Supposons que le coefficient μ de la réfraction terrestre normale soit, à l'analogie de la réfraction astronomique, dans des distances zénithales pas trop grandes, proportionnelle à la densité de l'air au lieu de l'observation; et nous aurons, en désignant par λ le coefficient correspondant à une hauteur moyenne b du baromètre et à une température moyenne t^0 R.,

la valeur μ du coefficient, pour B du baromètre et T du thermomètre, par:

$$\mu = \lambda \frac{B}{b}\left(\frac{1 + 0{,}0045\,t}{1 + 0{,}0045\,T}\right). \qquad \text{I.}$$

Pour voir si cette formule satisfait ou non à l'expérience, j'ai arrangé les 71 valeurs μ, données par nos matériaux, selon les températures. Puis, en les réunissant à 5 groupes, j'obtins les valeurs moyennes que voici:

B pouces angl.	T Résum.	μ	pour $b = 29{,}00$ $\mu =$	μ calculé par la formule II.
29,188	+ 21°,77	0,06793	0,06750	0,06750
29,265	+ 19,15	0,07038	0,06974	0,06954
28,593	+ 16,17	0,07316	0,07420	0,07242
29,007	+ 14,53	0,07503	0,07501	0,07400
28,436	— 2,22	0,09340	0,09524	0,09524

La dépendance mutuelle entre les μ et les T saute aux yeux, par les chiffres de ce tableau. Il y a ici, depuis + 21°,77 jusqu'à — 2°,22, une variation $\Delta\mu = 0{,}02774$, tandis que la formule I. ne donne que 0,00736. Pour faire coïncider les deux extrêmes μ, il faudrait changer l'expression en:

$$\mu = \lambda \frac{B}{b}\left(\frac{1 + 0{,}0165\,t}{1 + 0{,}0165\,T}\right), \qquad \text{II.}$$

formule qui représente d'assez près tous les cinq μ. Ce calcul nous montre, que *l'effet qu'exerce la température sur le coefficient de la réfraction terrestre normale, est presque le quadruple de celui qu'il a sur la densité de l'air.*

20.

Dèsque j'eus appris, par le calcul précédent, que la réfraction terrestre normale n'est pas proportionnelle à la densité de l'air, la forme des expressions I et II manquait de sig-

nification, et il fallait choisir une autre forme de μ. Or, en partant des deux suppositions, tout-à-fait logiques, à ce que je crois, savoir:

1) que la réfraction est proportionnelle à la hauteur du baromètre sur le lieu de l'observation,
2) qu'une diminution de température d'un degré augmente la réfraction chaque fois d'une même portion aliquote:

j'obtins pour le coefficient μ l'expression:

$$\mu = \lambda \frac{B}{b} (1 + \gamma)^{t - T}. \qquad \text{III.}$$

La comparaison des quatre μ d'été, du tableau précédent, entre eux; et puis de la moyenne de ces quatre μ d'été avec le μ d'hiver, me donnèrent les deux valeurs suivantes:

$$\text{la première, } 1 + \gamma = 1{,}01562,$$
$$\text{la seconde, } 1 + \gamma = 1{,}01427.$$

Il s'agissait maintenant d'une discussion plus rigoureuse des matériaux, et dans laquelle les différentes hauteurs des cimes entraient comme quantités inconnues à déterminer.

Ayant donné les détails de calcul dans le traité que j'ai publié en tête de l'ouvrage sur l'expédition, je me borne ici à indiquer la marche générale de mon travail et à donner les résultats finaux que j'en ai pu déduire.

21.

Je commençai par évaluer les coefficients de flexion f, des trois instruments employés à la mesure des angles verticaux, à l'aide des latitudes déterminées par l'observation d'étoiles qui passaient des deux côtés du zénith, et par la comparaison des angles verticaux terrestres, mesurés, sur les différentes stations du nivellement, successivement par deux astronomes. J'ai trouvé que les distances observées z étaient à remplacer par $z + f$, savoir:

par $z + 1''{,}1 \mp 0''{,}3$ pour l'instrument Σ,
» $z - 2{,}2 \mp 0{,}6$ » » S,
» $z - 6{,}6 \mp 1{,}2$ » » F.

Les corrections f ont été employées également dans le calcul définitif du nivellement entre les deux mers, quoiqu'elles disparaissent du résultat final. Ayant changé les 71 différents z en autant de $z + f$, je formai un tableau général des matériaux, en ajoutant les valeurs auxiliaires exactes, de l'arc géodésique compris C, de la corde D', et de la hauteur S de la station, pour toutes les 13 stations et les 5 objets.

Maintenant je choisis la voie inverse de celle que j'avais suivie jusqu'à présent. En partant

des valeurs approximées $\begin{cases} \lambda = 0{,}073689, \text{ pour } b = 29{,}00 \text{ pouces} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } t = +16^{\circ},0 \text{ R.}, \\ \gamma = 0{,}015725 \end{cases}$

et des hauteurs définitives S des stations, j'ai calculé, pour les 71 observations, toutes les réfractions angulaires ϱ, eu égard aux indications du baromètre et du thermomètre, données pour chacune. A l'aide des réfractions, je parvins à la hauteur linéaire H des objets, par les formules:

$$h = 90^{0} - (z + f + \varrho), \text{ angle d'élévation,}$$

$$u = \frac{D' \sin (h + \frac{1}{2} C)}{\cos (h + C)},$$

$$H = S + u.$$

C'est ainsi que j'ai obtenu

8	valeurs de la haut.			H^{I}	du Beschtau,	dont la moy. était		M^{I},
11	»	»	»	H^{II}	de l'Elbrous Occ.	»	»	M^{II},
29	»	»	»	H^{III}	» » Or.	»	»	M^{III},
15	»	»	»	H^{IV}	du Kasbek,	»	»	M^{IV},
8	»	»	»	H^{V}	de l'Anonymus	»	»	M^{V}.

Désignons à présent les vraies hauteurs des 5 sommets par $M^{I} + y^{I}$, $M^{II} + y^{II}$ ....., $M^{V} + y^{V}$,

la vraie valeur de λ par $0{,}073689 \left(1 + \frac{\omega}{100}\right)$,

la vraie valeur de γ par $0{,}015725 + \eta$,

et nous aurons par Beschtau 8 équations de condition de la

forme $y^I + p\varkappa + q\eta = n$, et ainsi de suite pour les autres objets, en prenant y^{II}, y^{III}, y^{IV}, y^V.

Dans ces équations n signifie $H - M$, la différence de chaque hauteur calculée à sa moyenne, et les coefficients p et q sont déterminés par

$$p = \frac{\rho}{100} \cdot D' \cdot \sin 1''$$

$$q = \frac{p(T-16)}{101{,}5725}.$$

La résolution des 71 équations devait conduire à l'évaluation des 7 inconnues qu'elles contiennent, savoir

$$y^I,\ y^{II},\ y^{III},\ y^{IV},\ y^V,\ x \text{ et } \eta.$$

22.

Pour opérer une résolution rigoureuse, il fallait encore assigner à chaque équation son poids qui dépend de l'erreur probable du chiffre n = observ. — calcul. Dans ces déterminations des erreurs des équations, il faut toujours partir des quantités directement observées, et en déduire les erreurs prob. des n, en poursuivant la voie par la quelle n se déduit de la quantité observée, qui est dans notre cas, la distance zénithale. Il s'agissait donc d'évaluer, en premier lieu, l'erreur prob. de $z + f$, en y sous-entendant non seulement les inexactitudes commises de la part de l'instrument et de l'observateur, mais aussi les irrégularités accidentelles que présente l'objet de l'observation lui-même. Proprement dit, de telles irrégularités n'existent point, car les phénomènes de la nature suivent des lois précises. Mais, souvent, notre connaissance de ces lois est imparfaite, ou au moins les données nous manquent pour appliquer une théorie complète aux phénomènes spéciaux. C'est ainsi que l'expression de la réfraction $\varrho = C \cdot \lambda \frac{B}{b} (1+\gamma)^{t-T}$, dont je me suis servi, ne peut-être considérée que comme une approximation à l'expression exacte de la réfraction. Les réfractions effectives, par conséquent, en s'éloignant plus ou moins de la formule, nous présenteront des irrégularités apparentes du phénomène.

En désignant maintenant l'erreur probable de l'observation de z par α, celle de la flexion appliquée par β, et la valeur probable de l'irrégularité angulaire de la réfraction ϱ par ω, nous aurons, pour l'angle d'élévation $h = 90^0 - (z + f + \varrho)$, l'erreur probable totale ψ par:

$$\psi^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \omega^2 = \delta^2 + \omega^2.$$

Dans cette expression nous avons:

pour F, $\alpha = 1''{,}6$, $\beta = 1''{,}2$, d'où $\delta^2 = 4{,}00$,
S, $\alpha = 1{,}6$, $\beta = 0{,}6$, $\delta^2 = 2{,}92$,
Σ, $\alpha = 1{,}1$, $\beta = 0{,}3$, $\delta^2 = 1{,}30$.

Reste l'évaluation d'ω. Je fais $\omega = \theta\varrho$, c.-à-d. je suppose que l'irrégularitée de la réfraction est une portion aliquote θ de sa valeur angulaire, portion qui peut varier pour des circonstances essentiellement différentes. Sous ce dernier point de vue, j'ai divisé les observations en trois groupes, pour lesquels j'ai trouvé, par plusieurs résolutions successives des équations, les valeurs suivantes de θ:

pour les observations de l'après-midi en été, $\theta = 0{,}01375$,
» » » du matin » $\theta = 0{,}01692$,
» » » d'hiver à Stavropol $\theta = 0{,}03524$.

La comparaison des deux premiers θ démontre, que les irrégularités accidentelles des réfractions sont un peu plus fortes le matin, que l'après-midi, ce qu'il fallait attendre, d'après les caractéristiques de l'image. La grande valeur de θ, pour les observations de Stavropol, s'explique entièrement de l'omission des caractéristiques, qui a dû produire un mélange des irrégularités accidentelles de la réfraction normale avec les perturbations périodiques de chaque jour.

ψ ayant été trouvé, nous avons, pour chaque équation de condition $y + px + q\eta = n$, l'erreur probable en n, par $\varepsilon = \psi D' \sin 1''$, et le poids de l'équation $g = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon}$.

23.

Avec ces données, j'ai entrepris la dernière résolution des équations, pour arriver aux valeurs définitives de 8 inconnues:

$$y^I \ldots y^V,\ x,\ x'\ \text{et}\ \eta,$$

en séparant la correction x pour les 4 sommets très élevés, et x' pour le Beschtau de petite hauteur. Le tableau suivant présente les résultats obtenus en ajoutant ces 8 corrections aux valeurs supposées de $M^I \ldots M^V$, λ et γ.

Hauteur des sommets du Caucase
au-dessus du niveau de la Mer Noire.

	pieds anglais.
Beschtau	4589,8 ∓ 0,8
Elbrous cime occidentale	18523,6 ∓ 6,6
Elbrous » orientale	18453,0 ∓ 6,6
Kasbek	16553,4 ∓ 5,1
Anonymus	16941,0 ∓ 4,9

Les erreurs probables que je donne ici, sont derivées de la réunion des erreurs des différentes sources possibles, qui sont:

a) l'incertitude de l'observation, y compris l'incertitude de la flexion; *b*) l'irrégularité accidentelle de la réfraction; *c*) et *d*) l'incertitude qui est restée dans les valeurs finales de λ et γ; *e*) l'erreur dans la hauteur des stations d'observation; *f*) l'incertitude des distances horizontales, déduites des opérations géodésiques.

Coefficients de la réfraction terrestre normale, pour $b = 29{,}00$ *pouces et* $t = +16^{\circ},0$ *R.*

Par les 4 cimes élevées $\lambda = 0{,}07153 \mp 0{,}00078$,
par Beschtau . . . . . $\lambda = 0{,}07376 \mp 0{,}00074$,
$1 + \gamma = 1{,}014819 \mp 0{,}000819$.

24.

Nous avons à présent à comparer les valeurs de λ que nous venons de trouver, aux deux autres λ qui ont été déduits des observations du nivellement entre les deux mers. Mais ces deux λ réclament encore une correction pour les flexions des instruments employés, dont M. Sabler n'avait pas tenu compte, et qui changent $\lambda = 0{,}088$ en,

$\lambda = 0{,}10060$, pour les distances $C = 115''{,}5$,
$\lambda = 0{,}08140$, » » » $C = 230{,}7$.

Voici maintenant les 4 valeurs de λ, avec les erreurs probables auxquelles elles sont sujettes, et avec l'élévation moyenne A du rayon visuel au-dessus du sol, exprimée en pieds anglais:

	A.	
$\lambda = 0{,}10060 \mp 0{,}00370$	16 pieds	} par les obs. du nivellem.
$\lambda = 0{,}08140 \mp 0{,}00180$	42 »	
$\lambda = 0{,}07376 \mp 0{,}00078$	1765 »	» » » du Beschtau,
$\lambda = 0{,}07153 \mp 0{,}00074$	8435 »	» » » des 4 cimes.

L'élévation moyenne A a pu être évalue avec la précision d'un couple de pieds, pour les petites distances du nivellement. Pour les observations des montagnes, l'évaluation de A aurait réclamé des profils complets du terrain, depuis l'instrument jusqu'au sommet de la montagne. Au défaut de ces profils, j'ai substitué pour A la demi-différence de hauteur entre la station et la montagne, ou la moyenne des $\frac{1}{2}(H - S)$.

25.

L'inspection des quatre valeurs λ nous indique clairement, que l'élévation du rayon visuel au-dessus du sol exerce une petite influence sur λ, de sorte que ce coefficient augmente, indépendamment de B et T, pour une diminution de cette élévation.

Pour embrasser donc les quatre λ sous une expression générale, je fais

$$\lambda = A + \frac{\chi}{a + A}, \qquad (2)$$

où χ est un nouveau coefficient à déterminer, et a un nombre constant de pieds, introduit afin que λ ne devienne point infini, pour $A = o$. Nos quatres valeurs de λ, dûment combinées, conduisent à une petite valeur négative $a = -4{,}0$, qui est impossible parce que a doit être positif. J'en tire la conclusion que la valeur positive d'a est tellement petite, qu'elle

disparaît dans les quatre équations à côté des erreurs qui sont dans les A. Par cette raison, je fais $a = o$; et j'obtiens, en employant les moindres carrés, par la combinaison des 4 valeurs de λ, eu égard aux erreurs probables de chaque λ,

$$\lambda = 0{,}07283 \mp 0{,}000535 + \frac{0{,}42586 \mp 0{,}04904}{A},$$

valeur qui répond à $b = 29{,}00$ pouces angl., et $t = +16°{,}0$ R.

26.

L'expression complète de la réfraction terrestre normale μ est par conséquent:

$$\mu = \left(0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{A}\right) \cdot \frac{B}{29{,}00} \cdot 1{,}014819^{(16 - T)} \qquad (\odot)$$

err. pr. ∓ 535, ∓ 4904, ∓ 819.

Dans cette formule,

A est l'élévation moyenne du rayon visuel au-dessus du sol, exprimée en pieds anglais = russes.

B la hauteur du baromètre en pouces anglais, réduite à la température 0° du mercure.

T la température de l'air sur le lieu de l'observation, échelle de Réaumur.

Adaptons encore cette formule à d'autres unités de mesure.

A étant exprimé en mètres, B en millimètres, T en degrés centésimaux: nous aurons

$$\mu = \left(0{,}07283 + \frac{0{,}12980}{A}\right) \cdot \frac{B}{736{,}566} \cdot 1{,}011838^{(20 - T)}.$$

A étant exprimé en Toises de France, B en lignes du pouce français, et T en degrés centésimaux:

$$\mu = \left(0{,}07283 + \frac{0{,}066598}{A}\right) \cdot \frac{B}{326{,}525} \cdot 1{,}011838^{(20 - T)}.$$

A étant exprimé en pieds anglais, B en pouces anglais, T en degrés de Fahrenheit:

$$\mu = \left(0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{A}\right) \cdot \frac{B}{29{,}00} - 1{,}006559^{(68 - T)}.$$

27.

Jetons finalement un coup d'oeil sur la marche de notre recherche et sur les résultats.

1) J'ai suivi, dans ma recherche, la voie empirique; mais la considération de la nature du phénomène, dans son état le plus simple, m'a servi de guide. Si mon travail a conduit à un résultat positif, je le dois à l'exactitude et au grand nombre d'observations qui embrassaient des objets d'une élévation, depuis peu de pieds jusqu'au delà de 18000 pieds.

2) L'expression du coefficient μ, que j'ai choisie, suppose que la réfraction normale terreste est, comme celle des astres, proportionnelle à la hauteur du baromètre sur le lieu de l'observation. L'élévation des stations d'observation n'ayant varié que depuis 480 à 1800 pieds, il est à désirer qu'on puisse examiner et, s'il le faut, corriger cette supposition, à l'aide d'observations faites en des stations d'une hauteur plus considérable.

3) Si nous considérons la courbe du rayon visuel entre deux points de hauteur très différente, l'angle que forme la tangente avec la chorde, ne peut être le même aux deux extrémités, c.-à-d. il faut qu'il y ait une réfraction plus grande au point inférieur et une plus petite au point supérieur. Notre formule remplit cette condition, en ce que le coefficient μ dépend de la hauteur du baromètre sur le lieu de l'observation. La diminution de la température, par suite de l'élévation, tend cependant à égaliser les deux réfractions. Imaginons une observation réciproque entre deux instruments, placés l'un sur le sommet du Chimboraço, et l'autre au niveau de l'Océan, nous aurons avec les données que cite Ramond dans son célèbre mémoire: *Sur les formule barométrique*, 1811, *p.* 35 *et* 234, A étant 2940 mètres:

au niveau de l'Océan

$\mu = 0{,}67069$, pour $B = 336{,}4$ lign. de Fr., $T = +25°{,}3$ C.;

au sommet du Chimboraço

$\mu' = 0{,}04674$, pour $B' = 166{,}9$ » » » $T' = -1{,}6$ »;

et nous voyons $\frac{B'}{B} = 0{,}496$, mais $\frac{\mu'}{\mu} = 0{,}066$.

Il reste cependant encore, quant aux μ', à examiner la formule, par des observations effectives et qui doivent être faites simultanément sur deux points de hauteur très différente, après avoir déterminé la hauteur relative des deux points à l'aide d'une opération, dans laquelle l'incertitude sur la réfraction cesse d'être nuisible, par une subdivision de la différence totale de hauteur en un nombre suffisant de portions, à l'aide de stations trigonométriques intermédiaires.

4) On pourrait croire que, dans l'expression $\lambda = 0{,}072383 + \frac{0{,}42586}{A \text{ pieds}}$, il y ait une incertitude grave, à cause du second terme, basé sur une hypothèse qui n'est pas rigoureuse. Pour fixer le jugement, je donnerai une petite table des μ correspondants aux valeurs successives A:

$A =$	$\lambda =$	$A =$	$\lambda =$
pieds		pieds	
10	0,11497	2000	0,07260
20	0,09368	4000	7249
30	8658	6000	7245
50	8090	8000	7244
100	7684	10000	7243
200	7451	12000	7242
500	7323	14000	7241
1000	7281	16000	7241

Cette table nous fait voir, que l'influence qu'exerce A sur le coefficient λ, n'est considérable, que pour des élé-

vations très petites du rayon visuel. Mais dans ce cas, l'arc géodésique C étant également petit, l'influence de l'incertitude reste toujours très insignifiante. On voit p. e. de Poulkova la flèche de la cathédrale St.-Pierre et Paul à St.-Pétersbourg, dans une distance de 19 verstes. L'élévation moyenne du rayon visuel au-dessus du sol est de 200 pieds, pour un instrument élevé de 5 pieds au-dessus du vestibule de l'observatoire. Pour $B =$ 30,00 pouces angl. et $T = +16^{0},0$ R., nous aurons la réfraction angulaire,

par la formule complète $\varrho = 49'',13$,
en négligeant le second terme, $\varrho = 48,08$.

La différence est de $1'',05$ et produit 4 pouces sur la hauteur de la flèche. Il s'en suit que le second terme est plutôt d'un intérêt physique que géodésique, surtout parce que, dans les nivellements géométriques, où il y a des A de peu de pieds, la réfraction s'élimine par l'observation à mi-chemin.

5) La température de l'air joue le rôle le plus important dans le calcul de la réfraction normale. Pour chaque degré R. de température, la réfraction change de 0,014819 de sa valeur, tandis que la densité de l'air subit une variation de 0,0045. Le coefficient thermométriques de la réfraction est 3,29 fois le coefficient therm. de la densité de l'air. Or, il est évident que la réfraction terrestre ne dépend pas tant de la densité de l'air sur le lieu de l'observation, que du décroissement plus ou moins rapide de la densité dans les couches successives de l'air. La réfraction doit être plus grande en hiver, surtout parce que le décroissement de la température, avec la hauteur, est moins rapide qu'en été.

6) Examinons en dernier lieu quelle est l'exactitude que donne l'emploi de notre formule, pour le calcul de la hauteur linéaire. Il s'agit ici de l'influence qu'exerce l'irrégularité accidentelle de la réfraction. Prenons les

observations d'après-midi qui sont les plus favorables, parce que le calme de l'image y est le plus parfait, et dure plus longtemps. Notre recherche a indiqué que, pour une telle observation, l'écart probable entre la réalité et la formule, est 0,01375 ρ ou $\frac{1}{73}\rho$. Or la réfraction change de 0,01482 $= \frac{1}{68}$, pour 1° R. du thermomètre; d'où suit que l'incertitude de la formule, dans chaque cas spécial, toujours en supposant le calme de l'image, est plus petite que l'influence qu'opère le changement d'un degré dans la température. La table suivante, calculée pour $\lambda = 0{,}0724$, donne l'erreur probable d'une hauteur trouvée à l'aide de notre expression de μ, pour les distances depuis $C = 0^\circ\ 10'$ jusqu'à $C = 2^\circ\ 0'$.

$C =$	Distance horiz.	Err. prob. de la hauteur calculée.	$C =$	Distance horiz.	Err. prob. de la hauteur calculée.
	verstes	pieds		verstes	pieds
0° 10′	17,3	0,2	1° 10′	121,4	8,6
20	34,7	0,7	20	138,8	11,2
30	52,0	1,6	30	156,1	14,2
40	69,4	2,8	40	173,5	11,5
50	86,7	4,7	50	190,8	21,2
1 0	104,1	6,3	2 0	208,2	25,2

28.

Les tables suivantes serviront à faciliter le calcul de la réfraction terrestre normale $= \rho$.

$\rho = \mu C$, où C est l'arc géodésique entre l'observateur et l'objet, $\mu = \mathrm{I} \,.\, \mathrm{II} \,.\, \mathrm{III}$

Log. I $= 8{,}85964 + (16 - T) \,.\, 0{,}0063886$, si la température de l'air $= T^\circ$ Réaumur,

$= 8{,}85964 + (20 - T') \,.\, 0{,}0051109$, si la température de l'air $= T'^\circ$ Cent.

$= 8{,}85964 + (68 - T'') \,.\, 0{,}0028394$, si la température de l'air $= T''^\circ$ Fahrenh.

Lg. II = Log. B — 1,46240, si la hauteur du baromètre = B pouces angl.

= Log. B' — 2,51392, si la hauteur du baromètre = B' lignes franc.

= Log. B'' — 2,86722, si la hauteur du baromètre = B'' millimètres.

Les hauteurs barométriques étant réduites a la température 0° R. du mercure.

Lg. III = $1 + \frac{5,8834}{A}$, si la hauteur moyenne du rayon visuel au-dessus du sol est A pieds angl.

= $1 + \frac{0,92007}{A'}$, ... A' toises.

= $1 + \frac{1,7932}{A''}$, ... A'' mètres.

Log. 5,8834 = 0,76963; Log. 0,92007 = 9,96382;

Log. 1.7932 = 0,25364.

Table du Log. I pour T° Reaumur.

Therm. R.	log. I	Therm. R.	log. I	Therm. R.	log. I
— 32°	9,1663	— 10°	9,0257	+ 12°	8,8852
— 31	9,1599	— 9	9,0194	+ 13	8,8788
— 30	9,1535	— 8	9,0130	+ 14	8,8724
— 29	9,1471	— 7	9,0066	+ 15	8,8660
— 28	9,1407	— 6	9,0002	+ 16	8,8596
— 27	9,1343	— 5	8,9938	+ 17	8,8532
— 26	9,1280	— 4	8,9874	+ 18	8,8469
— 25	9,1216	— 3	8,9810	+ 19	8,8405
— 24	9,1152	— 2	8,9746	+ 20	8,8341
— 23	9,1088	— 1	8,9682	+ 21	8,8277
— 22	9,1024	0	8,9619	+ 22	8,8213
— 21	9,0960	+ 1	8,9555	+ 23	8,8149
— 20	9,0896	+ 2	8,9491	+ 24	8,8085
— 19	9,0832	+ 3	8,9427	+ 25	8,8021
— 18	9,0768	+ 4	8,9363	+ 26	8,7958
— 17	9,0705	+ 5	8,9299	+ 27	8,7894
— 16	9,0641	+ 6	8,9235	+ 28	8,7830
— 15	9,0577	+ 7	8,9171	+ 29	8,7766
— 14	9,0513	+ 8	8,9108	+ 30	8,7702
— 13	9,0449	+ 9	8,9044	+ 31	8,7638
— 12	9,0385	+ 10	8,8980	+ 32	8,7574
— 11	9,0321	+ 11	8,8916	+ 33	8,7510
— 10	9,0257	+ 12	8,8852	+ 34	8,7446

Table du Log. I pour T'° Cent.

Therm. C.	log. I	Therm. C.	log. I	Therm. C.	log I
— 40°	9,1663	— 12°	9,0283	+ 14°	8,8903
— 39	9,1612	— 12	9,0232	+ 15	8,8852
— 38	9,1561	— 11	9,0181	+ 16	8,8801
— 37	9,1510	— 10	9,0130	+ 17	8,8750
— 36	9,1458	— 9	9,0078	+ 18	8,8699
— 35	9,1407	— 8	9,0027	+ 19	8,8648
— 34	9,1356	— 7	8,9976	+ 20	8,8596
— 33	9,1305	— 6	8,9925	+ 21	8,8545
— 32	9,1254	— 5	8,9874	+ 22	8,8494
— 31	9,1203	— 4	8,9823	+ 23	8,8443
— 30	9,1152	— 3	8,9772	+ 24	8,8392
— 29	9,1101	— 2	8,9721	+ 25	8,8341
— 28	9,1050	— 1	8,9670	+ 26	8,8290
— 27	9,0998	0	8,9618	+ 27	8,8239
— 26	9,0947	+ 1	8,9567	+ 28	8,8188
— 25	9,0896	+ 2	8,9516	+ 29	8,8136
— 24	9,0845	+ 3	8,9465	+ 30	8,8085
— 23	9,0794	+ 4	8,8414	+ 31	8,8034
— 22	9,0743	+ 5	8,9363	+ 32	8,7983
— 21	9,0692	+ 6	8,9312	+ 33	8,7932
— 20	9,0641	+ 7	8,9261	+ 34	8,7881
— 19	9,0590	+ 8	8,9210	+ 35	8,7830
— 18	9,0538	+ 9	8,9159	+ 36	8,7779
— 17	9,0487	+ 10	8,9108	+ 37	8,7728
— 16	9,0436	+ 11	8,9056	+ 38	8,7676
— 15	9,0385	+ 12	8,9005	+ 39	8,7625
— 14	9,0334	+ 13	8,8954	+ 40	8,7574
— 13	9,0283	+ 14	8,8903	+ 41	8,7523

Table du Log. I pour T'/° Fahrenh.

Therm. F.	log. I	Therm. F.	log. I	Therm. F.	log. I
— 40°	9,1663	— 30°	9,1379	— 20°	9,1095
— 39	9,1634	— 29	9,1351	— 19	9,1067
— 38	9,1606	— 28	9,1322	— 18	9,1038
— 37	9,1578	— 27	9,1294	— 17	9,1010
— 36	9,1549	— 26	9,1265	— 16	9,0982
— 35	9,1521	— 25	9,1237	— 15	9,0953
— 34	9,1492	— 24	9,1209	— 14	9,0925
— 33	9,1464	— 23	9,1180	— 13	9,0896
— 32	9,1436	— 22	9,1152	— 12	9,0868
— 31	9,1407	— 21	9,1123	— 11	9,0840
— 30	9,1379	— 20	9,1095	— 10	9,0811

Therm. F.	log. I	Therm. F.	log. I	Therm. F.	log. I
— 10	9,0811	+ 28	8,9732	+ 66	8,8653
— 9	9,0783	+ 29	8,9704	+ 67	8,8625
— 8	9,0754	+ 30	8,9675	+ 68	8,8596
— 7	9,0726	+ 31	8,9647	+ 69	8,8568
— 6	9,0698	+ 32	8,9618	+ 70	8,8540
— 5	9,0669	+ 33	8,9590	+ 71	8,8511
— 4	9,0641	+ 34	8,9562	+ 72	8,8483
— 3	9,0612	+ 35	8,9533	+ 73	8,8454
— 2	9,0584	+ 36	8,9505	+ 74	8,8426
— 1	9,0556	+ 37	8,9477	+ 75	8,8398
0	9,0527	+ 38	8,9448	+ 76	8,8369
+ 1	9,0499	+ 39	8,9420	+ 77	8,8341
+ 2	9,0470	+ 40	8,9391	+ 78	8,8312
+ 3	9,0442	+ 41	8,9363	+ 79	8,8284
+ 4	9,0414	+ 42	8,9335	+ 80	8,8256
+ 5	9,0385	+ 43	8,9306	+ 81	8,8227
+ 6	9,0357	+ 44	8,9278	+ 82	8,8199
+ 7	9,0328	+ 45	8,9249	+ 83	8,8170
+ 8	9,0300	+ 46	8,9221	+ 84	8,8142
+ 9	9,0272	+ 47	8,9193	+ 85	8,8114
+ 10	9,0243	+ 48	8,9164	+ 86	8,8085
+ 11	9,0215	+ 49	8,9136	+ 87	8,8057
+ 12	9,0186	+ 50	8,9108	+ 88	8,8028
+ 13	9,0158	+ 51	8,9079	+ 89	8,8000
+ 14	9,0130	+ 52	8,9051	+ 90	8,7972
+ 15	9,0101	+ 53	8,9022	+ 91	8,7943
+ 16	9,0073	+ 54	8,8994	+ 92	8,7915
+ 17	9,0044	+ 55	8,8966	+ 93	8,7886
+ 18	9,0016	+ 56	8,8937	+ 94	8,7858
+ 19	8,9988	+ 57	8,8909	+ 95	8,7830
+ 20	8,9959	+ 58	8,8880	+ 96	8,7801
+ 21	8,9931	+ 59	8,8852	+ 97	8,7773
+ 22	8,9902	+ 60	8,8824	+ 98	8,7745
+ 23	8,9874	+ 61	8,8795	+ 99	8,7716
+ 24	8,9846	+ 62	8,8767	+100	8,7688
+ 25	8,9817	+ 63	8,8738	+101	8,7659
+ 26	8,9789	+ 64	8,8710	+102	8,7631
+ 27	8,9760	+ 65	8,8682	+103	8,7603
+ 28	8,9732	+ 66	8,8653	+104	8,7574

Troisième partie.

Notices historiques sur l'hypsométrie Caucasienne.

Le Caucase est rattaché à la mythologie des anciens Grecs, par la tradition sur Prométhée, inconnue à Homère, mais

mentionnée par Hésiode. Ce poète ne connaît cependant pas encore le Caucase, et nous rencontrons ce nom pour la première fois chez Eschyle et Héraclite. Le conquérant Macédonien ne vit point cette chaîne. Les Romains prirent connaissance de ces montagnes du temps des campagnes contre Mithridate. Les notions sur le Caucase qu'avaient acquises les Grecs, surtout par leur commerce du Pont-Euxin, furent très imparfaites, car Ptolémée assigne à cette chaîne une latitude de 47°, qui diffère de 4½ degrés de sa latitude moyenne. Sur la hauteur linéaire du Caucase il n'y a, dans les auteurs classiques, aucune indication distincte. Hérodote, après avoir décrit la Mer Caspienne comme terminée du côté ouest par une chaîne de montagnes, et du côté est par une plaine immense, et dont l'étendue est inconnue, dépeint cependant le Caucase dans les termes suivants, d'une précision (I. 203) distinguée: *Le Caucase qui est la plus grande des montagnes par la multitude, et la plus élevée par la hauteur de ses cimes.* Aristote, dans un fameux endroit de *ses Meteorologica*, pour prouver l'élévation considérable du Caucase, rapporte deux faits: sa visibilité du Bospore Cimmérien et la circonstance, que les sommets en sont éclairés pendant quelque temps avant le lever et après le coucher du Soleil. Voyons comment les Géographes du 17me siècle ont abusé de ce passage d'Aristote pour évaluer la hauteur du Caucase par un calcul savant. Claramontius (Chiaramonte), antagoniste du Système copernicain, de Tycho et de ses grands contemporains Keppler et Galilée, dans un ouvrage: *De altitudine Caucasi*, publié à Paris en 1649 par Naudaeus et réimprimé parmi ses *Opuscula varia mathematica*, Bononiae 1653, déduit, de l'illumination nocturne du Caucase, la hauteur extravagante de 165 à 516 milles d'Italie, ou entre 900 mille et 3 millions pieds. Riccioli, dans sa *Geographia reformata* de 1672, p. 202, donne une réfutation de Claramontius, dont il désigne l'opinion comme *ultra omnium sapientium fidem*, en démontrant que Claramontius a mal compris le passage d'Aristote. Mais, de son côté, en partant de l'assertion du Stagirite, que le Caucase est visible du Bospore, il trouve le minimum de hauteur à assigner au Caucase = 9¼ mille pieds de Bologne, chiffre qui est

dessus de la Mer Caspienne. Quant au niveau de ce bassin immense, il se trouve de 43 toises au dessous de celui de la Mer Noire, chiffre qu'il déduit des observations de la hauteur absolue du baromètre faites en 1811 à 1813 à Astrakhan par Lokhtine; et de trois jours d'observations correspondantes, faites par lui-même et Lokhtine sur les bords des deux mers. De toutes ces données il parvient au résultats suivants:

haut. de la cime orient. de l'Elbrous = 2878 tois.
" " " occid. " " = 2898 "

La première hauteur est plus petite de 8 toises, la seconde plus grande d'une toise, que le résultat définitif donné par notre expédition.

La partie barométrique est apparemment, et par sa nature, la seule partie faible de l'excellent travail de M. de Wisniewsky. Déjà la différence de 43 toises entre le niveau des deux mers est trop forte de 29 toises; et il est difficile à estimer l'erreur qui peut avoir lieu dans les hauteurs des deux stations principales, Konstantinogorskaïa et Kislovodskaïa, relativement à Astrakhan qui en est éloignée de près de 400 verstes. Quant à la partie géodésique, il faut remarquer, que le coefficient de la réfraction terrestre 0,08 est trop fort, pour deux stations qui ont une élévation de 275 et de 600 toises au-dessus de l'Océan, et pour des observations faites en juin, entre midi et deux heures. En supposant une température seulement de 18° R., et avec la hauteur du baromètre de 26,4 et 25,3 pouces, qui conviendrait à l'élévation, notre formule donnerait le coefficient de la réfraction normale 0,067 et 0,062. Mais la réfraction effective a dû être plus petite que la réfraction normale, par la perturbation négative qui a lieu à l'heure indiquée, antérieure à l'époque du calme. Or, en remplaçant le coefficient 0,080 par $\mu = 0{,}065$ et 0,060, nous aurons à ajouter à la hauteur de l'Elbrous 10 toises, pour la première station et 7 toises pour l'autre. D'où l'on voit, qu'avec ces données plus exactes, les observations de M. de Wisniewsky conduisent aux chiffres suivants:

hauteur de la cime orientale 2917 toises,
" " occidentale 2937 "

chiffres trop forts de 31 et de 40 toises. Ce surplus pourrait être attribué à la détermination barométrique des deux stations; mais il s'explique, au moins en partie, de l'incertitude qui a dû rester dans les distances horizontales, évaluées à l'aide de deux lignes dont la longueur et la position relative ont été trouvées par la détermination astronomique des trois extrémités. Quiconque connaît la difficulté d'une telle détermination, ne pourra qu'admirer l'exactitude, qu'a su atteindre M. de Wisniewsky, il y a 37 ans, avec son sextant de Troughton et deux chronomètres.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. VIII. Nos* 22 et 23.)

pour une infinité de courbes? Le cercle ne se trouverait-il pas dans le nombre de ces dernières? Ces questions, qui sont autant de doutes, doivent se présenter tout naturellement en abordant la théorie des parallèles, en tant qu'elle forme le point fondamental de la Géométrie élémentaire. Par cette raison même, l'introduction à cette science, ou ses éléments, doivent être étrangers aux recherches qui concernent la comparaison, même superficielle, des surfaces limitées par des lignes droites ou courbes, comme celle, par exemple, qui entre dans l'énoncé du principe de M. Schultén.

Pour mettre dans toute leur évidence les observations que nous venons de faire, nous allons examiner analytiquement les conséquences auxquelles conduit la proposition admise par l'Auteur de la note citée, en prenant, au lieu du cercle, une courbe quelconque.

Soit r le paramètre de la courbe que l'on considère, et $f(r)$ sa surface, limitée d'une manière convenue; la courbe de même espèce, mais d'un paramètre $2r$, aura pour surface $f(2r)$. En admettant le principe de M. Schultén pour la courbe que nous examinons, la fonction f devra satisfaire à l'inégalité

$$\frac{f(2r)}{f(r)} < K,$$

K représentant un nombre abstrait aussi grand que l'on veut, mais indépendant de r. Substituant successivement à r les multiples $2r$, $4r$, $8r$ .... $2^{n-1}r$, on aura

$$\frac{f(4r)}{f(2r)} < K$$

$$\frac{f(8r)}{f(4r)} < K$$

.....

$$\frac{f(2^n r)}{f(2^{n-1} r)} < K,$$

d'où l'on conclura, en multipliant entr'elles toutes ces inégalités

$$\frac{f(2^n r)}{f(r)} < K^n.$$

Supposons actuellement que l'on prenne pour la valeur de r *l'unité linéaire*, et que l'on désigne également par 1 la surface de la courbe qui a *l'unité* pour paramètre; on aura $r = 1$, $f(r) = 1$, et par conséquent

$$f(2^n) < R^n.$$

Soit de plus $2^n = R$ et μ l'entier le plus proche qui satisfait à la condition $R < 2^\mu$; nous aurons

$$f(R) < R^\mu.$$

Telle est la propriété qui caractérise la fonction f. Il faut donc, pour que le principe en question ait lieu, que la surface de la courbe, pour le paramètre R, soit inférieure à R^μ, μ étant un nombre constant. Sans doute cette propriété subsiste pour l'aire du cercle et pour les aires d'une infinité de courbes différentes; mais le même principe sera en défaut pour les surfaces d'autres courbes, dont le nombre est également illimité. Ainsi, par exemple, pour

$$f(R) = f(l)\, e^{\frac{R}{l}},$$

l désignant *l'unité linéaire* et e la base des logarithmes népériens, l'inégalité

$$f(l)\, e^{\frac{R}{l}} < R^\mu,$$

ou bien, en faisant $l = 1$ et $f(l) = 1$, la suivante:

$$e^R < R^\mu$$

ne sera pas satisfaite à partir des valeurs de R qui surpassent la racine réelle de l'équation transcendante

$$R - \mu \log R = 0.$$

Non seulement on peut choisir une infinité d'exemples, dans le genre du dernier, pour lesquels le principe n'ait pas lieu, mais on peut même se donner à volonté la fonction de r qui soit constamment égale au rapport $\frac{f(2r)}{f(r)}$, et déterminer ensuite, par cette condition, la forme de la fonction f. Si l'on

voulait, par exemple, que ce rapport fut égal à $\frac{r}{l}$, l désignant comme plus haut *l'unité linéaire*, on aurait

$$\frac{f(2r)}{f(r)} = \frac{r}{l},$$

et l'on tirerait de là

$$\frac{f(4r)}{f(2r)} = 2 \cdot \frac{r}{l}$$

$$\frac{f(8r)}{f(4r)} = 2^2 \cdot \frac{r}{l}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f(2^n r)}{f(2^{n-1} r)} = 2^{n-1} \cdot \frac{r}{l};$$

en multipliant entr'elles toutes ces équations, on obtient

$$\frac{f(2^n r)}{f(r)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^n.$$

Faisant comme plus haut $r = l = 1$, $f(l) = 1$, $2^n = R$, on aura

$$f(R) = R^{\frac{\log R - \log 2}{2 \log 2}},$$

expression qui, en effet, satisfait à la condition

$$\frac{f(2R)}{f(R)} = R,$$

et croît au-delà de toute limite en même temps que R.

Proposons encore un exemple plus particulier que les précédents. Soit une courbe parabolique déterminée par l'équation

$$y = r\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{r}{l}},$$

dans laquelle r désigne le *paramètre* et l une *unité linéaire fixe*. Si l'on compte l'aire de cette parabole à partir de son sommet, et qu'on limite l'aire d'un côté par l'axe, et de l'autre par

l'ordonnée qui correspond à l'abscisse égale au paramètre r, on aura pour l'expression de cette surface parabolique

$$f(r) = \frac{rl}{\frac{r}{l}+1} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{r}{l}+1}.$$

De même on trouvera

$$f(2r) = \frac{2rl}{\frac{2r}{l}+1} \cdot \left(\frac{2r}{l}\right)^{\frac{2r}{l}+1},$$

et par conséquent

$$\frac{f(2r)}{f(r)} = \frac{\left(\frac{r}{l}+1\right) \cdot 2^{\frac{2r}{l}+2}}{\frac{2r}{l}+1} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{r}{l}}.$$

Or, le second membre de cette équation, pour des valeurs de r de plus en plus grandes que l, croissant au-delà de toute limite, il s'en suit que la condition

$$\frac{f(2r)}{f(r)} < K,$$

dans laquelle K désigne une constante, sera en défaut.

Il nous semble qu'après tout ce qui vient d'être dit, il est impossible d'admettre, pour point de départ dans la théorie des parallèles, le principe que M. Schultén a pris pour base de sa démonstration. Nous observerons en même temps qu'en partant d'autres vérités du même genre, tout aussi évidentes en apparence, mais pour le fond également sujettes à contestation, on pourrait démontrer la théorie des parallèles d'une manière encore plus simple que ne l'a fait M. Schultén.

Admettons, par exemple, *que l'on puisse toujours prendre le rayon CB (fig. 1) assez grand, pour que la surface du quart de cercle DCB soit plus grande que la surface DCAE du triangle rectangle à base constante CA, répétée un nombre déterminé de fois.*

Sans aucun doute, on ne se fera pas plus de difficulté d'admettre ce principe que celui de M. Schultén, en faisant attention que la base CA demeure constante, tandis que le rayon CB, et par conséquent aussi la ligne AB, peut être augmentée à volonté. Or, partant de là, on démontrera immédiatement que la droite CN, inclinée sur CA, rencontre la perpendiculaire AE, car, dans l'hypothèse contraire, on sera conduit à une conclusion inadmissible. En effet, supposons, pour abréger, que l'angle DCN soit compris exactement k fois dans l'angle droit [3]); décrivons le quart de circonférence DEB de façon que sa surface soit plus grande que la surface $DCAE$ du biangle, répétée k fois, ce qui pourra se faire en vertu du principe que nous venons d'admettre. On aura donc

$$k \times DCAE < CDEB.$$

De plus, puisque la droite CN ne rencontre pas, par hypothèse, la perpendiculaire AE, il faut qu'elle coupe l'arc DE en un certain point que nous représenterons par M. Or, la surface DCM forme la k-ème partie du quart de cercle $CDEB$, c'est-à-dire que

$$k \times DCM = CDEB;$$

cette équation, jointe à l'inégalité précédente, donne

$$k \times DCAE < k \times DCM,$$

ou bien

$$DCAE < DCM,$$

ce qui est absurde, la portion DCM du biangle limité ne pouvant être plus grande que le biangle $DCAE$ lui même. Donc, la droite inclinée CN rencontrera la perpendiculaire AE entre les points A et E.

En terminant les observations que nous avions à faire au sujet de la note de M. Schultén, qu'il nous soit permis de

3) Si l'angle DCN n'était pas contenu un nombre entier de fois dans l'angle droit, on sait comment, par la réduction à l'absurde, la démonstration se ramènerait au cas de k entier.

compléter, par de nouveaux développements, les considérations sur la théorie des parallèles que nous avons exposées dans deux Mémoires publiés déjà depuis quelques années [4]).

Pour traiter, d'une manière tout-à-fait rigoureuse, la théorie des parallèles, il est indispensable, comme de raison, de prendre pour point de départ une propriété fondamentale de la ligne droite, propriété qui, de prime-abord, la distingue de toute ligne courbe. Nous croyons, qu'à la notion de la ligne droite comme de la *distance la plus courte entre deux points*, notion qui doit être considérée comme primitive, il faut encore joindre cette propriété caractéristique de la droite, qui consiste dans *l'absence de paramètre*. Avec cela, tout ce qui regarde les divers assemblages de lignes droites se démontre facilement. Nous dirons donc que toute *courbe* admet un ou plusieurs *paramètres*, tandis que la ligne unique que nous appellons une *droite*, et dont nous reconnaissons l'existence par la simple perception, n'en admet aucun. En effet, toutes les droites telles que nous les concevons, coincident entr'elles, et sont par conséquent identiques. Il n'en est pas de même des courbes qui ne peuvent être construites sans employer un ou plusieurs paramètres, c'est-à-dire des *longueurs déterminées* qui fixent leurs dimensions, leur forme et la mesure de leur courbure en différents points. Ainsi, un *cercle* ne peut être décrit que quand on connait son *rayon*; une *parabole* ne peut être construite que quand son *paramètre* est donné; *l'ellipse* et *l'hyperbole* se définissent par leurs *deux axes* etc. La distinction caractéristique des droites et des courbes que nous venons de présenter deviendra encore plus sensible, du moins pour les commençants, par l'observation suivante: supposons que plusieurs individus aient tracé chacun, indépendamment les uns des autres, des *droites* et des *cercles* ou d'autres courbes d'une espèce convenue d'avance. Toutes les droites, confrontées, coincideront par la superposition, par ce que

4) Le premier Mémoire porte pour titre: *Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles*; le second: *Nouvelle théorie des parallèles*. Ces deux écrits sont insérés dans les *Mémoires de l'Académie 1re Série, sc. math. et phys. T. IV. pp. 87, 207.*

leur tracé a été indépendant de toute *longueur linéaire déterminée;* au contraire, les cercles, en faisant coïncider leurs centres, ne coïncideront pas, et cela à cause du choix arbitraire de l'unité linéaire, c'est-à-dire de leurs *rayons.*

Ce que nous avons dit par rapport aux droites et aux courbes trouve une analogie complète dans la considération des *plans* et des *surfaces courbes.* Ainsi, *le plan est une surface indépendante de tout paramètre;* au contraire, *les surfaces courbes dépendent chacune d'un ou de plusieurs paramètres.*

La distinction que nous venons de faire peut être encore envisagée sous un autre point de vue. Nous pouvons dire que *la droite est une ligne qui ne présente pas un ensemble de deux points (ni même un seul) qui se distinguent des autres par quelques particularités.* Cette notion, tout-à-fait conforme à l'idée primitive que nous avons de la ligne droite, rentre dans celle qui a été exposée plus haut; en effet, s'il pouvait exister sur la droite seulement deux points particuliers, leur distance déterminerait une longueur fixe, qui pourrait être prise pour paramètre. Dans les courbes, au contraire, il existe une infinité de couples de deux ou de plusieurs points, qui se distinguent par quelques particularités; par exemple, dans le *cercle*, nous observons une infinité de couples composés de deux points situés l'un de l'autre à la distance d'un *diamètre;* dans la *parabole*, la perpendiculaire à l'axe, passant par le foyer, détermine sur la courbe deux points particuliers; dans *l'ellipse* et *l'hyperbole* on a entr'autres les deux *sommets* etc. Dans tous ces cas, la distance entre deux points particuliers détermine une longueur fixe qui peut être prise pour paramètre.

Ces notions admises, nous allons déduire d'une manière tout-à-fait rigoureuse la théorie des parallèles en traitant, comme M. Schultén, la proposition relative à la rencontre de l'oblique avec la perpendiculaire.

Considérons un angle aigu *DAB* (fig. 2) et la perpendiculaire indéfinie *BC* à *AB;* il s'agit de prouver que l'oblique *AD*, suffisamment prolongée, coupera nécessairement cette perpendiculaire *BC*, quelle que soit la longueur de la droite *AB.* Or, nous allons faire voir qu'en admettant le contraire,

on arrivera à une conséquence impossible. Supposons que des points m, m', m'' ...., de plus en plus éloignés de A, on ait abaissé sur AB les perpendiculaires mp, $m'p'$, $m''p''$ ....; il arrivera de deux choses l'une: ou la distance Ap du point A au pied p de la perpendiculaire mp croîtra au-delà de toute limite à mesure que le point m s'éloignera de A, ou bien cette longueur Ap convergera, sans jamais l'atteindre, vers une limite déterminée, AO par exemple. La première hypothèse conduit immédiatement à la conséquence que l'oblique AD coupe la perpendiculaire BC. C'est donc la seconde hypothèse qu'il faut examiner, et admettre, par conséquent, l'existence du point limite O, c'est-à-dire d'une *longueur fixe* AO, longueur qui doit être déterminée au moyen de *l'angle rectiligne* DAB. Or, il résulte de ce qui a été dit plus haut, qu'il ne peut exister aucune relation entre un *angle rectiligne* et une *longueur fixe*. Pour s'en convaincre, on observera d'abord que l'angle rectiligne DAB est complètement défini par les trois notions suivantes: par la notion de la *droite*, par celle du *plan* et enfin par celle du *nombre abstrait*. En effet, quel que soit l'angle DAB, il formera toujours *une portion déterminée de l'angle droit* BAE, considéré dans le *plan* de l'angle DAB; ainsi, par exemple, si l'angle DAB est égal aux $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, il sera complètement défini d'abord par la notion de la *droite*, en tant que chaque côté de l'angle est une ligne de cette nature, ensuite par celle du *plan*, et, en troisième lieu, par la notion du *nombre fractionnaire abstrait* $\frac{2}{3}$, l'angle droit étant pris pour *unité*. Cela posé, comme nous admettons l'existence de la longueur fixe AO, ce sera l'angle rectiligne DAB qui lui donnera naissance; par conséquent, cette ligne AO ne dépendra également que des trois notions mentionnées. Mais, d'après la nature de la *droite*, du *plan* et du *nombre abstrait*, il n'y entre aucun *paramètre*, c'est-à-dire aucun élément qui soit homogène avec une *unité linéaire*; donc, la droite limitée AO ne peut pas exister, et nous en concluons par suite que l'oblique DA coupe la perpendiculaire BC quelle que soit la distance de A à B. De là on déduira rigoureusement, comme corollaire, le *postulatum* d'Euclide.

On pourrait, peut-être, élever quelques doutes sur la possibilité de faire entrer cette démonstration dans un cours élémentaire de Géométrie; mais, sous le rapport de sa rigueur, elle semble être à l'abri de toute objection. Nous dirons plus: cette manière d'envisager la théorie des parallèles, du moins pour le fond, est peut-être la seule qui lève les difficultés que l'on a toujours rencontrées en traitant cette question fondamentale.

Pour mieux faire voir encore le parti que l'on peut tirer, dans la Géométrie élémentaire, de la propriété caractéristique de la droite, en tant qu'elle ne peut donner naissance à aucune longueur fixe, nous allons soumettre à l'épreuve la proposition suivante:

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident l'une avec l'autre dans toute leur étendue, et ne forment qu'une seule et même ligne droite.

Nous transcrivons ici la démonstration de ce théorème telle qu'elle se trouve dans les *Éléments de Géométrie de Legendre* (12-ème édition, page 8):

«Soient les deux points communs *A* et *B* (fig. 3); d'abord les deux lignes n'en doivent faire qu'une entre *A* et *B*, car sans cela il y aurait deux lignes droites de *A* en *B*, ce qui est impossible. Supposons ensuite que ces lignes étant prolongées, elles commencent à se séparer au point *C*, l'une devenant *CD*, l'autre *CE*. Menons au point *C* la ligne *CF*, qui fasse avec *CA* l'angle droit *ACF*. Puisque la ligne *ACD* est droite, l'angle *FCD* sera un angle droit; puisque la ligne *ACE* est droite, l'angle *FCE* sera pareillement un angle droit. Mais la partie *FCE* ne peut pas être égale au tout *FCD*; donc les lignes droites qui ont deux points *A* et *B* communs, ne peuvent se séparer en aucun point de leur prolongement; donc elles ne forment qu'une seule et même ligne droite.»

Observons que cette démonstration suppose l'angle *DCE* *fini*; mais, ne devrait-on pas, à la rigueur, lever l'objection de celui qui, niant l'hypothèse, affirmerait que cet angle peut être *infiniment petit*, comme celui que forme une courbe avec sa tangente. En effet, quelle est la raison qui porte à admettre, gratuitement, que deux droites qui ont un point commun, ne

peuvent pas se trouver dans les mêmes circonstances que deux courbes, ou bien une courbe et une droite, tangentes entr'elles? Assurément c'est une question que nous sommes en droit de nous faire si nous voulons raisonner tout-à-fait rigoureusement. Aussi, nous semble-t-il, que la démonstration que l'on donne du théorème cité, n'est pas entièrement satisfaisante, car on n'y fait pas même entrer, ni explicitement ni implicitement, la propriété de la droite *CE* qui la distingue d'avec des portions de courbes telles que *CG* ou *CG'* qui auraient *CD* pour tangente au point *C*.

En partant des notions émises plus haut, la proposition dont il s'agit se démontre d'une manière très simple et tout-à-fait rigoureuse, sans être obligé même d'admettre, comme on le fait, l'axiome en vertu duquel *d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite*. En effet, soient *AB* et *DE* (fig. 4) deux droites qui se coupent au point *C*. Supposons qu'après avoir fait tourner la droite *DE* autour du point *C* dans le plan *ECB*, elle ait pris la position *D'E'*. Pendant ce passage il n'a pu arriver que de deux choses l'une ou bien la droite *DE* a coïncidé avec *AB* dans tous ses points, ou bien la coïncidence n'a eu lieu que pour certains points, quel qu'en soit d'ailleurs le nombre. La première hypothèse conduit de suite à la proposition que nous avons en vue de démontrer. Quant à la seconde, elle suppose l'existence de *points particuliers* sur la droite *DE*, et, par cela même, doit être rejetée. En effet, si l'on admet que ces points de coïncidence soient *F*, *G* etc. et leurs correspondants *F'*, *G'* etc., il en résultera que les deux droites *AB* et *DE*, sans aucun autre élément, détermineront certaines *longueurs fixes*, par exemple la plus courte *CG*, en supposant que *G* soit le *premier point de coïncidence*, ou *CF*, *GF* etc. Ainsi, *deux droites ne peuvent avoir qu'un seul point commun, et alors elles se coupent, ou bien elles coïncident complètement dans toute leur étendue*.

Terminons ces considérations en les appliquant encore à une autre théorie fondamentale de la Géométrie, nommément à celle des *lignes proportionnelles*. Supposons que l'angle *BAC* $= \alpha$ (fig. 5), c'est-à-dire l'ensemble des deux droites *AB* et *AC* qui se coupent au point *A*, soit donné. Admettons de plus

que l'on ait un autre angle connu $EDF = \beta$ tel que la somme $\alpha + \beta$ soit inférieure à deux angles droits. Si, par des points arbitraires $p, p', p'' \ldots$ on mene $pm, p'm' p''m'' \ldots$ de manière à ce que les angles Apm, $Ap'm'$, $Ap''m'' \ldots\ldots$ soient égaux à β, ces droites pm, $p'm'$, $p''m'' \ldots\ldots$, suffisamment prolongées, rencontreront la ligne AC en vertu du *postulatum* d'Euclide qui se trouve déjà établi par ce qui a été dit plus haut. Cela posé, considérons les rapports abstraits

$$\frac{Ap}{pm}, \quad \frac{Ap'}{p'm'}, \quad \frac{Ap''}{p''m''} \text{ etc.};$$

il ne pourra arriver que de deux choses l'une: ou tous ces rapports seront égaux entr'eux, ou bien il y en aura au moins deux de différents. La première hypothèse constitue la *théorie des lignes proportionnelles*, qui se trouvera par conséquent établie si nous faisons voir l'impossibilité de la seconde supposition. Admettons donc que les deux rapports $\frac{Ap}{pm}$ et $\frac{Ap'}{p'm'}$, par exemple, soient différents entr'eux, et que l'on ait

$$\frac{Ap}{pm} = \frac{Ap'}{p'm'} \pm \delta,$$

δ étant un nombre fini abstrait, différent de zéro. Si cette égalité, pour un nombre convenable et donné δ, pouvait avoir lieu plusieurs fois, c'est-à-dire pour plusieurs systèmes de parallèles telles que pm, $p'm'$, $p''m'' \ldots$, soient pm et $p'm'$ les deux droites du premier système, nommément de celui pour lequel les parallèles pm, $p'm'$ sont les plus rapprochées du point A. Donc, les données précédentes qui sont les *deux angles rectilignes* α et β, avec la nouvelle donnée δ qui représente un *nombre abstrait*, serviraient à déterminer la *longueur fixe* Ap, ce qui ne peut pas être. Par conséquent la seconde hypothèse est inadmissible, et c'est la première qui doit avoir lieu, c'est-à-dire l'égalité de tous les rapports que l'on considère. De cette manière la *théorie des lignes proportionnelles* se trouve établie rigoureusement, et dans toute sa généralité, sans qu'on soit obligé de distinguer les cas, où les lignes seraient commensurables ou incommensurables entr'elles.

Les diverses applications qui viennent d'être données suffisent pour montrer le parti que l'on peut tirer dans la Géométrie élémentaire de la manière d'envisager la ligne droite, l'angle rectiligne et le plan comme ne pouvant donner naissance à une longueur déterminée. En se fondant sur ces notions, les démonstrations des propositions fondamentales de cette science acquièrent non seulement toute la rigueur que l'on peut exiger, mais deviennent aussi plus concises et plus simples que celles qui sont généralement admises dans les Traités.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. IX. No. 4.*)

$\frac{4}{16}$ Octobre 1850.

Note sur la rectification graphique de l'ellipse; par J. SOMOFF.

(Avec une planche.)

Il y a plusieurs problèmes de Géométrie descriptive qui exigent la rectification de l'ellipse; ainsi par exemple, cette rectification est nécessaire pour trouver la section droite d'un cylindre oblique à base circulaire, quand on veut faire le développement du cylindre, ce qui trouve son application dans l'art du ferblantier et dans la construction des voûtes. Nous allons faire voir que la théorie des fonctions elliptiques conduit à un procédé assez simple pour effectuer graphiquement cette rectification.

Si l'on forme l'échelle des modules pour la transformation de Landen:

$$k, k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad k'_2 = \frac{2\sqrt{k'_1}}{1+k'_1}, \quad \ldots\ldots \quad k'_\mu = \frac{2\sqrt{k'_{\mu-1}}}{1+k'_{\mu-1}}, \quad (1)$$

k' étant le complément du module donné k de la fonction complète

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}},$$

on aura

$$K = \frac{\pi}{2} \mathcal{V}\left(\frac{(k'_1 k'_2 k'_3 \ldots k'_{\mu-1})}{k'}\right), \qquad (2)$$

en s'arrêtant à $k'_\mu = 1$.

Pour construire les termes de l'échelle (1) on prendra deux longueurs m et n dans le rapport $\frac{m}{n} = k'$, et on cherchera successivement deux suites de moyennes arithmétiques et géométriques:

$$\left.\begin{aligned} &n,\ n_1 = \frac{m+n}{2},\ n_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \ldots n_\mu = \frac{m_{\mu-1}+n_{\mu-1}}{2}, \\ &m,\ m_1 = \mathcal{V}(mn),\ m_2 = \mathcal{V}(m_1 n_1), \quad m_\mu = \mathcal{V}(m_{\mu-1} n_{\mu-1}), \end{aligned}\right\} (3)$$

en vertu de quoi la formule (2) se transformera en celle-ci:

$$K = \frac{\pi}{2} \mathcal{V}\left(\frac{m m_1 m_2 \ldots m_{\mu-1}}{n n_1 n_2 \ldots n_{\mu-1}}\right);$$

d'un autre côté, eu égard aux relations

$$mn = m_1^2,\ m_1 n_1 = m_2^2,\ m_2 n_2 = m_3^2, \ldots m_{\mu-1} n_{\mu-1} = m^2_\mu,$$

on a

$$m m_1 m_2 \ldots m_{\mu-1} \times n n_1 n_2 \ldots n_{\mu-1} = m_1^2 m_2^2 \ldots m^2_{\mu-1} m^2_\mu;$$

d'où l'on tire

$$\frac{n m_1 m_2 \ldots m_{\mu-1}}{m n_1 n_2 \ldots n_{\mu-1}} = \frac{m^2}{m^2_\mu}$$

et par conséquent la valeur de K se réduit à

$$K = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{m_\mu}. \qquad (4)$$

On opérera la construction graphique des moyennes (3) de la manière suivante: ayant pris sur une droite indéfinie les longueurs: $AO = n$, $OD = m$, on trouvera le point F, milieu de AD, ce qui donnera $n_1 = AF = DF = \frac{m+n}{2}$, et, pour avoir la moyenne $m_1 = \mathcal{V}(mn)$, on tracera un cercle sur le diamètre AD; l'ordonnée du cercle élevée du point O sera la longueur cherchée $m_1 = \mathcal{V}(mn) = OE$. Opérant de même sur

m_1 et n_1, on trouvera n_2 et m_2; prenant donc $FK = OE = m_1$, on divisera en deux parties égales la somme $DK = m_1 + n_1$; ainsi on aura $KG = \frac{m_1 + n_1}{2} = n_2$, après quoi on décrira sur le diamètre DK un demi-cercle et on élèvera l'ordonnée FH, laquelle sera $m_2 = \sqrt{(m_1 n_1)}$. Si l'on fait maintenant $GI = FH = m_2$, on trouvera pour la différence $n_2 - m_2 = KG - GI$ une très petite valeur, et la différence $n_2 - m_2$, étant encore plus petite, sera insensible au compas; donc on aura à très peu près $m_2 = n_2 = \frac{m_2 + n_2}{2} = \frac{ID}{2}$, $\frac{m_2}{n_2} = k'^2 = 1$.

Cela fait, la formule (4) donnera

$$K = \frac{\pi . n}{2 m_2} = \frac{\pi . AO}{ID}. \qquad (5)$$

Ainsi, pour construire K, il faut trouver une quatrième proportionelle à π, AO, ID. Mais avant tout on doit déterminer la longueur de π, ce que l'on peut faire par un procédé très commode, donné par un Géomètre polonais *Kochansky* (Acta eruditorum Lipsiae, anno 1685). Avec un rayon, pris pour l'unité (dans le cas actuel c'est AO), on tracera un cercle et son diamètre SR; par l'une des extrémités de celui-ci on ménera une tangente TN et une corde RM, égale au rayon; du centre O on abaissera une perpendiculaire OT à MR, en la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec la tangente; soit T ce point de rencontre. Cela fait, on portera, à partir de T, sur la direction de la tangente, trois fois le rayon, et on joindra à S l'extrémité N de cette longueur $TN = 3$; on aura ainsi $NS = \pi$, avec une approximation poussée jusqu'aux décimales du 5-me ordre. En effet, il est facile de voir que

$$NS = \sqrt{\left[2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = 3{,}1415.$$

Prenons maintenant $NU = ID$, $NW = AO$, menons WU et une parallèle à celle-ci SZ; on obtiendra ainsi, en vertu de la formule (5),

$$K = NZ.$$

La construction que nous venons de présenter pourra servir

pour la rectification de la lemniscate de Bernoulli et des ellipses de Cassini.

Passons à la rectification de l'ellipse ordinaire, que nous avons principalement en vue; supposons que ses axes soient égaux à $AO = n = 1$ et à $OC = m = k'$. La longueur CB du quart de l'ellipse donné sera la fonction complète de la seconde espèce $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)} \cdot d\varphi$. Or par une formule de M. Jacobi (Mathematische Werke, I. Bd. pag. 14), on a

$$(1 + \sqrt{k'})\, E = K\ (1 + \sqrt[3]{k'})\ \sqrt{k'} + D\left(\frac{\pi}{K}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot K$$

où $D = 2\ (2^2 q^4 + 4^2 q^{16} + \ldots)$, $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$; mais vu la petitesse de q^4, la valeur de $D\left(\frac{\pi}{K}\right)^{\frac{3}{2}} K$ sera insensible au compas; on pourra donc poser simplement

$$(1 + \sqrt{k'})\, E = K\ (1 + \sqrt[3]{k'})\ \sqrt{k'},$$

et par suite

$$E = K \sqrt{k'}\ (1 - \sqrt{k'} + k'),$$

expression qui, eu égard aux formules:

$$\sqrt{k'} = \sqrt{\frac{m}{n}},\ 1 + k' = \frac{m+n}{n} = \frac{2n_1}{n},\ \sqrt{mn} = m_1,\ K = \frac{\pi \cdot n}{2m_\mu},$$

se réduit à

$$E = K \sqrt{\frac{m}{n}}\left(\frac{2n_1 - m_1}{n}\right) = \frac{\pi}{2m_\mu}\left(\frac{2m_2^2}{n} - m\right).$$

Dans le cas actuel on a $2m_\mu = ID$, $m = OD$, et pour trouver $\frac{m_2^2}{n}$ il faudra porter sur OC prolongée la longueur $OL = FH = m_2$, mener ensuite la droite AL et élever sur celle-ci la perpendiculaire LQ; la longueur cherchée sera $OQ = \frac{m_2^2}{n}$. Ainsi, en faisant $QP = OQ$, on aura

$$2\,\frac{m_2^{\,2}}{n} - m = 2\,.\,OQ - OD = PO - OD = PD,$$

par conséquent

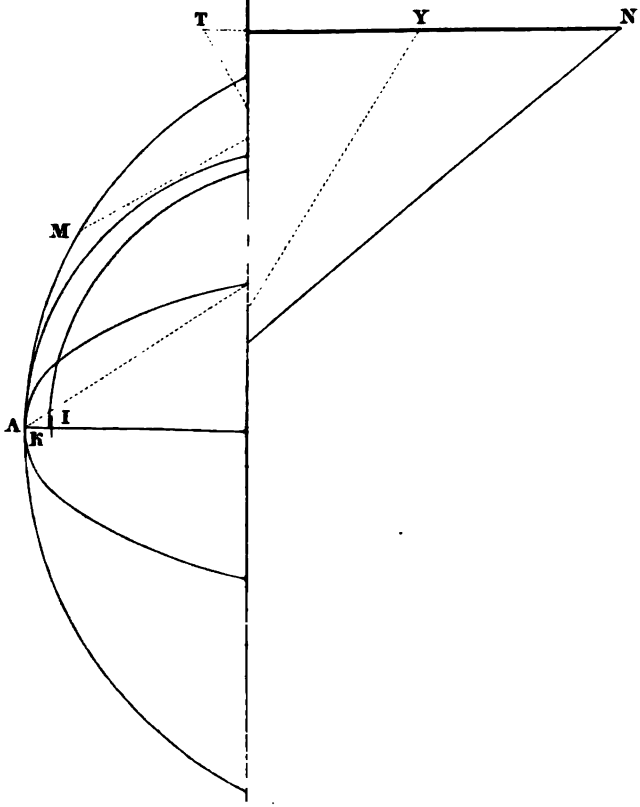
$$E = \frac{\pi\,.\,PD}{ID}.$$

Pour construire cette expression prenons $NY = PD$, menons UY et une parallèle à celle-ci SV; la longueur NV sera égale au quart de l'ellipse $E = BC$. Pour l'ellipse totale, on aura $4\,.\,NV$.

Nous avons représenté dans la figure une ellipse assez allongée; mais pour des ellipses à excentricités plus petites, le procédé sera encore plus expéditif à cause de la convergence rapide des modules: $h'_1, h'_2, h''_2, \ldots$

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. IX. No. 7.*)

Bull. ph. math. Rectification graphique de l'ellipse.



$\frac{1}{13}$ November 1850.

Ueber die Doppelsterne No. 1263 und 1516 des Dorpater Catalog. Vom Candidaten F. FEDORENKO in Pulkowa.

1) Ueber den Doppelstern No. 1263.

Der Doppelstern, der in Struves Catalog von 1827 unter No. 1263 verzeichnet ist, steht sehr merkwürdig wegen der starken Veränderung der relativen Position der einzelnen Sterne. Seine im Catalog gegebene Position für 1827 ist $\alpha = 8^h\,33{,}7$, $\delta = 42°\,19'$. Der grössere Stern ist von weissgelblicher Farbe und gehört zu den Sternen der 7,6 Grösse; der kleinere, der weisse Farbe hat, ist ein Stern von 8,2 Grösse.

Eine Untersuchung über diesen Stern befindet sich schon in dem Werke: *Mens. microm. stell. dupl. p.* 93, wo er den Sternen der 4ten Classe zugezählt wird. Sie erstreckt sich auf die Beobachtungen in der Zwischenzeit von 1828 bis 1835. Eine Fortsetzung dieser Untersuchung, welche die Beobachtungen bis 1839 umfasst, befindet sich in *Additam. in Str. mens. microm.* Die Absicht dieser Untersuchungen war, zu bestimmen, ob die einzelnen Sterne durch ein physisches Band mit einander verbunden, oder nur optisch doppelt sind. Es ergab sich das Resultat, dass die relative Bewegung des kleineren Sterns ganz geradlinig und gleichförmig ist. Obgleich dieses Resultat aus Beobachtungen hervorgegangen

ist, welche 11 Jahre umfassen, in welcher Zeit die relative Entfernung der beiden Sterne von 4″,9 bis auf 11″,6 zugenommen hatte, so ist deshalb doch noch nicht bewiesen, dass ein physischer Zusammenhang zwischen ihnen nicht besteht, indem sich ein Theil der relativen Bahn beider Sterne, wenn sie eine bedeutende scheinbare Excentricität hat, durch längere Perioden nahezu als eine gerade Linie darstellen können.

Von der Epoche 1839 bis zu der gegenwärtigen Zeit wurde dieser Stern auf der Pulkowaer Sternwarte von Otto Struve beobachtet. Ich habe diese Beobachtungen benutzt, um die Untersuchung zu wiederholen. Ich gebe hier zunächst das Verzeichniss der Jahresmittel der seit 1828 beobachteten relativen Stellungen der beiden Sterne.

Epoche	Entfernung $= e$	Positionswinkel $= P$	Zahl der Beobacht.	$e \sin P = x$	$e \cos P = y$
1828,36	4″,860	359° 0′	1	— 0″,085	+ 4″,859
1829,36	5,430	4 7	2	+ 0,390	+ 5,416
1831,31	7,080	4 57	2	+ 0,611	+ 7,054
1832,33	7,455	7 16	2	+ 0,943	+ 7,395
1833,29	7,973	8 0	3	+ 1,110	+ 7,895
1834,36	8,933	8 24	3	+ 1,305	+ 8,837
1835,35	9,595	9 17	4	+ 1,548	+ 9,469
1836,41	10,325	9 36	2	+ 1,722	+ 10,181
1837,39	10,770	11 28	1	+ 2,466	+ 10,550
1838,34	11,630	11 51	2	+ 2,388	+ 11,382
1840,27	12,998	12 25	4	+ 2,795	+ 12,694
1845,31	16,660	14 51	2	+ 4,270	+ 16,103
1847,99	18,317	16 10	3	+ 5,109	+ 17,593
1849,32	19,277	16 9	2	+ 5,362	+ 18,546
1850,29	20,091	15 57	2	+ 5,520	+ 19,317

In Voraussetzung einer gradlinigen und gleichförmigen Bewegung findet man aus diesen Beobachtungen durch die Methode der kleinsten Quadrate folgende wahrscheinlichsten Werthe von x und y für 1839,0 und auch ihre jährlichen Veränderungen ξ und η, indem man jedem Jahresmittel die Genauigkeit zuschreibt, welche der Zahl der Beobachtungen entspricht.

$x = +\ 2''{,}594$ mit dem wahrsch. Fehler $0''{,}023$
$y = +\ 11{,}823$ " " " " $0{,}022$
$\xi = +\ 0{,}2610$ " " " " $0{,}0035$
$\eta = +\ 0{,}6551$ " " " " $0{,}0033$

Ich habe in meinen Rechnungen vorausgesetzt, dass für alle Distanzen dieselbe Genauigkeit der Messungen gilt, so wie dass die Genauigkeit einer einzelnen gemessenen Distanz derjenigen einer einzelnen gemessenen Richtung gleich ist. Nach dem vorgehenden erhält man x und y für jede Zeit $= t$ durch die Formel:

$$x = +\ 2''{,}594 + 0''{,}2610\ (t - 1839{,}0)$$
$$y = +\ 11{,}823 + 0{,}6551\ (t - 1839{,}0)$$

und folglich

$$e = \sqrt{[146{,}521 + 16{,}8453\ (t - 1839{,}0) + 0{,}4973\ (t - 1839{,}0)^2]}$$

$$\text{tang}\ P = 0{,}2194\ \frac{1 + 0{,}1001\ (t - 1839{,}0)}{1 + 0{,}0554\ (t - 1839{,}0)}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den Beobachtungen giebt folgende Abweichungen:

Epoche	berechnet e	berechnet P	de	dP	$e \sin dP$
1828,36	4″,857	357° 54′	+ 0″,003	+ 1° 9′	+ 0″,035
1829,36	5,509	0 49	— 0,079	+ 3 11	+ 0,306
1831,31	6,811	4 57	+ 0,269	0 0	0,000
1832,33	7,503	6 32	— 0,048	+ 44	+ 0,096
1833,29	8,157	7 47	— 0,184	+ 13	+ 0,031
1834,36	8,890	8 56	+ 0,042	— 32	— 0,085
1835,35	9,574	9 52	+ 0,021	— 35	— 0,098
1836,41	10,307	10 43	+ 0,018	— 1 7	— 0,201
1837,39	10,986	11 25	— 0,216	+ 0 11	+ 0,035
1838,34	11,646	12 0	— 0,016	— 9	— 0,030
1840,27	12,969	13 1	+ 0,099	— 26	— 0,136
1845,31	16,510	14 53	+ 0,150	— 2	— 0,010
1847,99	18,389	15 35	— 0,072	+ 35	+ 0,187
1849,32	19,322	15 53	— 0,045	+ 16	+ 0,090
1850,29	20,009	16 8	+ 0,021	— 18	— 0,097

Hier bemerken wir, dass die Abweichungen de und $e \sin dP$ kein Gesetz haben und den zufälligen Fehlern der Beobach-

tungen zugeschrieben werden dürfen, und folglich erweisen sie die Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der relativen Bewegung. Indem wir dies voraussetzen, finden wir aus den Abweichungen *de* und *e sin dP* die wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung der Distanz $= 0''{,}134$ und einer Richtung $= 0''{,}127$, welche also fast vollkommen unter einander übereinstimmen. Darauf finden wir durch Differenziirung unserer Formel das Minimum der Distanz $= 1''{,}967$, welches für die Epoche 1822,07 gilt.

Bei der Annahme, dass der Stern 1263 optisch doppelt ist, lässt sich aus der eigenen Bewegung des helleren Sterns, die durch Meridianbeobachtungen bestimmt ist, und der relativen des anderen die absolute eigene Bewegung dieses letzteren finden. Wir haben Meridianbeobachtungen des Doppelsterns 1263, welche in Dorpat und Pulkowa angestellt wurden. Im Catalog von Struve (*Str. stel. dupl. position. med. p.* 179) befinden sich drei mittlere Orte dieses Sterns für die Epoche 1832,0, aus welchen jeder das Resultat einer Beobachtung ist.

Epoche der Beob.	α		δ	
1828,19	$8^h34'3''{,}67$	für das Mittel d. beid. Sterne	$42°18'11''{,}1$	für d. Mittel d. beid. St.
1829,16	3,53		13,6	
1843,22	3,40	für den hellern Stern	2,6	f. d. hell. St.

Nach den Pulkowaer Beobachtungen 1849,22 ist der mittlere Ort des helleren Stern, für die Epoche 1849,0, $\alpha = 8^h35'11''{,}24$ $\delta = 42°14'24''{,}7$. Die gerade Aufsteigung ist das Resultat von 4 Beobachtungen mit dem Passageninstrumente, die Declination ist aus 2 Beobachtungen mit dem Vertikalkreise in seinen beiden Lagen abgeleitet.

Im Catalog von Lalande wird die Position dieses Sterns, welcher dort unter No. 17161 und von der Grösse 9,5 aufgeführt steht, gegeben, aber es wird nicht bezeichnet, zu welchem von beiden Sternen sie gehört, ob zu dem grösseren oder kleineren oder zu dem Mittel. Aber da der relative Ort des kleineren Stern zu der Zeit der Beobachtungen von Lalande mit der nöthigen Genauigkeit aus den oben erwähnten

Formeln abgeleitet werden kann, so ist sehr leicht, es mit Hülfe der Dorpater und Pulkowaer Beobachtungen sich zu versichern, dass der von Lalande beobachtete Stern der hellere war. Seine Position in dem von der *British Association* herausgegebenen Cataloge ist für 1800,0, $\alpha = 8^h\ 31'\ 55''{,}41$ $\delta = 42^\circ\ 25'\ 2''{,}9$.

Ich habe aus den erwähnten Beobachtungen folgende Oerter des helleren Sterns für die Epoche 1830,0 abgeleitet.

	Beobachtungs-Epoche	α	δ	Zahl der Beob.
aus Beob. von Lal.	1796,20	$8^h33'56''{,}34$	$42^h18'50''{,}51$	1
aus Beob. in Dorp.	1828,19	55,61	33,70	1
» » » »	1829,16	55,48	35,89	1
» » » »	1843,22	55,35	27,57	1
aus Beob. in Pulk.	1849,22	54,86	22,64	4

Durch die Methode der kleinsten Quadrate erhalte ich aus diesen Datis folgende wahrscheinliche Werthe der geraden Aufsteigung und Abweichung für 1830,0, so wie der eigenen Bewegungen, wobei ich der ersten Beobachtung das Gewicht 0,1, den drei folgenden 1 und der vierten 4 beilege, unter der Voraussetzung, dass die Genauigkeit der Beobachtungen von Lalande genähert drei Mal kleiner ist, als diejenige der Dorpater und Pulkowaer Beobachtungen:

α	$= 8^h33'55''{,}51$ mit dem wahrsch. Fehler	$0''{,}06$
δ	$= 42^\circ18'33''{,}88$ » » » »	0,55
eigene Bewegung		
in $A\!R$	$= -0''{,}0312$ in Zeit » » »	0,0041
	$= -0,468 = d\alpha$ in Bogen » »	0,061
im grössten Kreise		
	$= -0,346 = d\alpha \cos\delta$ » »	0,0045
eigene Bewegung im grossen Kreise		
in Decl.	$= -0,566 = d\delta$ » » »	0,035.

Die nachbleibenden Fehler der Beobachtungen sind:

in α	in δ
+ 0″,227	+ 2,59
+ 0,042	+ 1,16
− 0,058	− 1,57
− 0,250	− 1,12
+ 0,052	+ 0,33

Nachdem die eigene Bewegung des grösseren Sterns gefunden ist, lässt sich leicht auf die absolute Bewegung des kleineren Sterns schliessen. Sie folgt aus den Formeln:

$$d\alpha' = d\alpha + \xi \sec\delta$$
$$d\delta' = d\delta + \eta,$$

wo ξ und η die für die relative Bewegung früher gefundenen Quantitäten sind; oder

$d\alpha'$	$= -0''{,}115$ in Bogen mit d. wahrsch. Fehl.	$0''{,}062$
$d\alpha' \cos\delta$	$= -0{,}085$ " " " " "	0,046
$d\delta'$	$= -0{,}089$ " " " " "	0,035

Wir sehen also, dass die starke Veränderung des Abstandes der beiden Sterne davon herrührt, dass der kleinere Stern eine weit geringere eigene Bewegung hat, als der grössere. Es kann daher mit grosser Wahrscheinlichkeit gesagt werden, dass der Stern 1263 optisch doppelt ist.

Ich füge hier die Entfernungen und die Positionswinkel des kleineren Sterns in Bezug auf den helleren, wie sie aus den für e und tang P abgeleiteten Formeln folgen, für jedes Jahr von 1851,0 bis 1860,0 bei.

Jahr	Entfernung	Positionswinkel
1851,0	20″,500	16° 13′
1852,0	21,202	24
1853,0	21,904	36
1854,0	22,606	44
1855,0	23,309	53
1856,0	24,012	17 1
1857,0	24,715	9
1858,0	25,418	17
1859,0	26,121	25
1860,0	26,824	31

2) Ueber den Doppelstern No. 1516.

Dieser Doppelstern stellt uns eine ähnliche Erscheinung, wie der Doppelstern 1263, dar. Seine Position für 1827 ist $\alpha = 11^h 3'',7$, $\delta = 74°25'$. Der hellere Stern ist 7,0 Grösse; der andere gehört zur 7,5 Grösse; beide sind gelblich.

Die Beobachtungen dieses Sterns, welche in Dorpat von beiden Struve angestellt wurden, sind in *Mens. micr.* und *Additam.* gegeben und umfassen den Zeitraum von 1831,5 bis 1837,6. In der Voraussetzung einer geradlinigen und gleichförmigen relativen Bewegung hat Otto Struve die jährlichen relativen Veränderungen in den Coordinaten x und y durch die Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet, und die Vergleichung der nach der von ihm gefundenen Formel berechneten Distanzen und Positionswinkel mit den beobachteten ergab, dass die letzteren gut jener Voraussetzung entsprachen.

Ich habe ausser den Messungen am Dorpater Refractor, die Pulkowaer Beobachtungen von 1840,5 bis 1850,5 benutzt und wiederum die Quantitäten ξ und η, wie bei dem Doppelstern 1263, berechnet. Ich stelle hier das Verzeichniss der Mittel aller Beobachtungen für die verschiedenen Jahre zusammen.

Epoche	ρ	P	Zahl der Beobacht.	$\rho \sin P = x$	$\rho \cos P = y$
1831,54	9″,930	298° 42′	2	— 8″,710	+ 4″,769
1832,84	9,560	299 22	2	— 8,332	+ 4,686
1833,46	9,250	299 45	2	— 8,031	+ 4,590
1834,43	8,945	300 58	2	— 7,670	+ 4,603
1835,56	8,425	301 40	4	— 7,171	+ 4,423
1836,64	8,134	302 36	8	— 6,852	+ 4,382
1837,61	7,780	304 0	3	— 6,450	+ 4,350
1840,45	6,422	307 8	3	— 5,120	+ 3,877
1841,92	5,906	308 59	2	— 4,591	+ 3,715
1846,92	3,994	319 9	2	— 2,612	+ 3,021
1848,93	3,240	323 50	2	— 1,912	+ 2,616
1850,40	3,021	333 6	1	— 1,367	+ 2,694

In der Voraussetzung, welche bei dem Doppelstern 1263 stattgefunden hat, findet man aus diesen Data durch die Me-

thode der kleinsten Quadrate folgende wahrscheinlichsten Werthe von x und y für 1837,0 und für ξ und η.

$$x = -6''{,}633 \text{ mit dem wahrsch. Fehler } 0''{,}016$$
$$y = +4{,}270 \quad \cdots \quad 0{,}021$$
$$\xi = +0{,}3996 \quad \cdots \quad 0{,}0031$$
$$\eta = -0{,}1226 \quad \cdots \quad 0{,}0040$$

Nach diesem haben wir x und y für jede Zeit durch die Formel

$$x = -6''{,}633 + 0''{,}3996\,(t - 1837{,}0)$$
$$y = +4''{,}270 - 0''{,}1226\,(t - 1837{,}0)$$

und folglich

$$e = V\,[62{,}226 - 6{,}3474\,(t - 1837{,}0) + 0{,}1746\,(t - 1837{,}0)^2]$$

$$\text{tang } P = 1{,}5532\,\frac{-1 + 0{,}0602\,(t - 1837{,}0)}{1 - 0{,}0287\,(t - 1837{,}0)}.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit den Beobachtungen gibt folgende Abweichungen:

Epoche	berechnet e	berechnet P	de	dP	$e \sin dP$
1831.54	10″,104	299° 16′	— 0″,174	— 0° 34′	— 0″,100
1832.84	9,574	299 57	— 0,014	— 35	— 0,097
1833,46	9,322	300 18	— 0,072	— 33	— 0,089
1834,43	8,927	300 54	+ 0,018	+ 4	+ 0,010
1835,56	8,469	301 40	— 0,044	+ 0	0,000
1836,64	8,034	302 29	+ 0,100	+ 7	+ 0,016
1837,61	7,643	303 17	+ 0,137	+ 43	+ 0,695
1840,45	6,514	306 13	— 0,092	+ 55	+ 0,104
1841,92	5,937	308 9	— 0,030	+ 50	+ 0,086
1846,92	4,057	318 51	— 0,063	+ 18	+ 0,021
1848,93	3,372	326 23	— 0,132	— 2 33	— 0,150
1850,40	2,921	333 6	+ 0,100	— 0 58	— 0,049

Da diese Abweichungen den zufälligen Fehlern der Beobachtungen zugeschrieben werden müssen, so haben wir den wahrscheinl. Fehler einer Beobachtung der Distanz $= 0''{,}084$ und der Richtung $= 0''{,}080$. Die kleinste Entfernung ergiebt sich $= 2''{,}139$ für die Epoche 1855,18.

Ich lege jetzt die Meridianbeobachtungen vor, welche für die Bestimmung des absoluten Orts des helleren Sterns angestellt wurden. Aus den Dorpater Beobachtungen ist der mittlere Ort, für 1824,0, $\alpha = 11^h 3' 29'',10$, $\delta = 74^\circ 25' 34'',0$, als Resultat von drei in 1823 und 1825 angestellten Beobachtungen. Aus vier Pulkowaer Beobachtungen von 1849 mit dem Passageninstrument ist $\alpha = 11^h 5' 11'',84$ für 1849,0, und aus zwei Beobachtungen am Verticalkreise in seinen beiden Lagen $\delta = 74^\circ 17' 29'',7$ für 1849,0. Zu diesen Oertern kommt noch die Beobachtung beider Sterne von Lalande hinzu, welche 1790 März 17 angestellt wurde (*Mémoires de l'Académie des sciences pour* 1790 *pag.* 389). Lalande hat an demselben Tage folgende 9 Sterne beobachtet, welche in den Argelanderschen Zonen vorkommen, nämlich Zone 180, No. 4, No. 14, No. 17, No. 114, No. 115, No. 119; Zone 182, No. 49, No. 76; Zone 195, No. 108. Indem ich von den von Argelander gegebenen Positionen ausging, habe ich nach der Besselschen Methode (*Astr. Nachr. I. Bd. p.* 22) folgende Reductionselemente für die Lalandischen Beobachtungen vom 17. März 1790 zwischen den Stunden 10^h — 12^h auf den Anfang von 1790 gefunden.

t	k		k'		p		p'
10^h	+ 12,90		— 0,23		48°53′5″,5		+ 2,2
		0,59		0,09		3,8	
11	+ 13,49		— 0,14		9,3		+ 2,4
		0,57		0,07		3,4	
12	+ 14,06		— 0,07		12,7		+ 2,7

$z = 25°14'$.

Die unreducirten Beobachtungen von Lalande sind:

	Durchgangszeit	Zenithdistanz
des helleren Sterns	$11^h 0' 53'',41$	$25^\circ 45' 16'',0$
» kleineren »	$11^h 0' 46'',71$	$25^\circ 43' 30'',0$

Wenn man diesen Beobachtungen die aus der obigen Tafel genommenen Verbesserungen hinzufügt, so geben sie folgende mittlere Positionen für 1790,0:

	α	δ
des helleren Sterns	$11^h 1' 6''{,}87$	$74° 36' 26''{,}0$
» kleineren »	$0''{,}17$	$40''{,}0$

Da die relative Position der beiden Sterne zu der Epoche der Beobachtungen von Lalande mit der nöthigen Genauigkeit aus den Formeln für e und tang P abgeleitet werden kann, so erhalten wir aus der Position des kleineren Sterns diejenige des helleren $\alpha = 11^h 1' 6''{,}35$, $\delta = 74° 36' 30''{,}0$, und das Mittel von beiden Positionen des helleren Sterns ist:

Æ med. 1790,0 $= 11^h 1' 6''{,}70$, Decl. med. 1790,0 $= 74° 36' 28''{,}0$.

Aus den erwähnten drei Positionen des helleren Sterns erhält man folgende für 1821,0:

		α	δ	Zahl der Beob.
aus Beob. in Paris	1790,2,	$11^h 3' 19''{,}23$	$74° 26' 25''{,}86$	1
aus Beob. in Dorpat	1823,9	16,36	32,34	3
aus Beob. in Pulk.	1849,2	13,64	34,74	4

Aus diesen Datis finden wir durch die Methode der kleinsten Quadrate folgende wahrscheinlichsten Werthe der geraden Aufsteigung und Abweichung für 1821,0, und der eigenen Bewegungen, indem man der ersten Beobachtung das Gewicht 0,2, der zweiten 3 und der dritten 4 zuschreibt.

$\alpha = 11^h\ 3' 16''{,}58$ mit dem wahrsch. Fehler	0,11
$\delta = 74° 26' 31''{,}66$ » » » »	0,45
eigene Bewegung	
in Æ $= -0''{,}1034$ in Zeit » » »	0,0049
$= -1{,}550 = d\alpha$ in Bog. » »	0,073
im grossen Kreise	
$= -0{,}416 = d\alpha \cos\delta$ » »	0,020
eigene Bewegung	
in Decl. $= +0{,}114 = d\alpha$ » » »	0,021.

Die nachbleibenden Fehler der Beobachtungen sind:

in α	in δ
$-0''{,}54$	$-2''{,}29$
$+0{,}08$	$+0{,}35$
$-0{,}03$	$-0{,}13$

Nachdem die eigene Bewegung des helleren Sterns gefunden worden, lässt sich, wie bei dem Stern 1263, die absolute eigene Bewegung des kleineren Sterns untersuchen. Es ergiebt sich:

$d\alpha'$	$= -0''{,}061$	in Bog. mit d.	wahrsch. Fehler $0''{,}074$
$d\alpha' \cos\delta$	$= -0{,}016$	" " " " "	" " $0{,}020$
$d\delta$	$= +\frac{1}{4}0{,}009$	" " " " "	" " $0{,}021$

Dieses Resultat zeigt, dass die starke Veränderung des relativen Orts der beiden Sterne einzig durch die eigene Bewegung des helleren Sterns hervorgebracht ist, während der kleinere fast keine Bewegung hat. Es muss daher angenommen werden, dass der Doppelstern 1516 nur optisch doppelt ist. Ich füge hier ebenfalls die für jeden Jahresanfang von 1851 bis 1860 vorausberechneten Positionen bei.

1851,0	$2''{,}758$	$337°\,52'$
1852,0	2,515	345 16
1853,0	2,322	354 4
1854,0	2,193	4 10
1855,0	2,139	15 19
1856,0	2,166	26 16
1857,0	2,270	36 44
1858,0	2,442	46 0
1859,0	2,669	53 52
1860,0	2,940	60 25

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. IX. No. 7.*)

$\frac{6}{18}$ September 1850.

Zur Theorie der kleinsten Quadrate; von Dr. M. G. PAUCKER, correspondirendem Mitgliede der Akademie.

Das Bulletin der physico-mathematischen Classe der Akademie vom 16. Juni d. J. No. 189 bringt einen Aufsatz über die mittlere Temperatur, welcher mich veranlasst, über diesen Gegenstand noch einmal das Wort zu nehmen.

Daselbst ist S. 324, als dem Verfasser eigenthümlich, ein Verfahren angezeigt, die Multiplikatoren zu bestimmen, mit denen aus gegebenen Beobachtungen die Mittelbeobachtung gefunden werden kann. Dieses Verfahren ist aber dasselbe, welches ich bereits vor zwei Jahren in einer Vorlesung vom 3. (15.) November 1848 in den Arbeiten der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, Heft VI, 97 gegeben habe.

In dem Aufsatze des Bulletin wird aus einer Reihe von acht Beobachtungen die Mittelwärme sowohl nach dieser als nach der Besselschen Methode berechnet. Diese beiden Methoden können im Allgemeinen kein übereinstimmendes Resultat gewähren, weil bei der ersten die Coefficienten der Formel, als in gegebenen Verhältnissen stehend, bei der andern als völlig unabhängig von einander vorausgesetzt werden.

Der Aufsatz des Bulletin entwickelt das Besselsche Verfahren, die fehlenden Nachtbeobachtungen in Rechnung zu bringen. S. 322 wird bemerkt: »Die (aus blossen Tagbeobachtungen) erhaltene Mitteltemperatur kann noch keinen Anspruch machen auf diejenige Genauigkeit, welche die Meteorologie jetzt zu fordern berechtigt ist, da hiebei die etwa noch zu andern Stunden angestellten Beobachtungen völlig unberücksichtigt bleiben u. s. w.«

Nach dieser Aeusserung hätte man erwarten dürfen, in der im Aufsatz geführten Rechnung Resultate zu finden, welche

genauer als die getadelten wären. Man erhält jedoch nur dieselben, wie in der That vorauszusehen war. Niemand bezweifelt, dass Tagbeobachtungen mit wirklich angestellten Nachtbeobachtungen verbunden, für die Mittelwärme ein schärferes Resultat gewähren, als Tagbeobachtungen allein. Daraus folgt aber nicht, dass Tagbeobachtungen mit den nach der Besselschen Methode berechneten Nachtbeobachtungen verbunden, gleichfalls eine genauere Mittelwärme geben, als die Tagbeobachtungen für sich. Vielmehr findet man auf diesem Wege dieselben Werthe, welche die direkte Methode giebt.

Diese letztere habe ich in den kurländischen Arbeiten Heft VI, 86 entwickelt. Dass sie im Resultat mit dem Besselschen Verfahren zusammentreffen muss, habe ich ebendaselbst Heft IX in einer Vorlesung vom 10. Mai d. J. nachgewiesen.

Das Besselsche indirekte Verfahren ist übrigens nur dann anwendbar, wenn die Zwischenzeiten der Beobachtungen einander gleich und genau in dem vollen Umlauf enthalten sind. Es erfordert die Auflösung von soviel Gleichungen, als Beobachtungen am vollen Umlauf fehlen. Bei der direkten Methode ist die Anzahl der aufzulösenden Gleichungen gleich der Anzahl der Glieder der Formel. Bei 30 halbstündlichen Beobachtungen wären also nach Bessels Verfahren 18 Gleichungen aufzulösen. Das Beispiel des Aufsatzes hat acht zweistündliche Beobachtungen, wo denn die Besselsche Methode bei nur vier aufzulösenden Gleichungen allerdings im Vortheil ist.

In dem Aufsatze des Bulletin wird eine siebengliedrige Formel zum Grunde gelegt. Statt der dort geführten weitläufigen Rechnung, die für jede besondere Beobachtungsreihe wiederholt werden muss, kann die Mittelbeobachtung durch folgenden strengen Ausdruck mit Leichtigkeit gefunden werden:

Die acht auf einander folgenden Beobachtungen seien $l^1\ l^2\ l^3 \ldots l^8$. Man nehme

$$A = \tfrac{1}{2} l^1 + l^3 + l^5 + \tfrac{1}{2} l^7, \quad B = \tfrac{3}{4} l^2 + \tfrac{1}{4} l^4 + \tfrac{1}{4} l^6 + \tfrac{3}{4} l^8$$
$$C = l^2 + \tfrac{1}{2} l^4 + \tfrac{1}{2} l^6 + l^8$$
$$A - B = E, \quad A - C = F, \quad \mathfrak{C} = E + F \cos 30^0.$$

Dann ist $\mathfrak{C}$ die gesuchte Mittelbeobachtung. Das im Aufsatz angeführte Beispiel giebt die Werthe von l:

7,16 5,90 4,87 4,75 5,57 6,24 6,67 6,95.

Meine Rechnung ist hienach:

3,58	4,425	5,90
4,87	1,1875	2,375
6,24	1,3925	2,785
3,475	5,0025	6,67
$A = 18{,}165$	$B = 12{,}0075$	$C = 17{,}73$
	$A = 18{,}165$	$A = 18{,}165$
	$E = 6{,}1575$	$F = 0{,}435$
	$F\cos 30^0 = 0{,}3767$	
	$\mathfrak{C} = 6{,}5342$	
	im Bulletin $= 6{,}5354$	

Allein diese Mittelwärme ist nicht die genaueste, die sich hätte finden lassen. Man muss vielmehr der Formel so viele Glieder geben, als Beobachtungen vorhanden sind, hier also acht Glieder. Dann stellt die Formel alle Beobachtungen vollständig dar. Für diesen Fall finde ich:

$$6A = 2l^1 + 8l^4 + 13l^6 + 4l^8 \quad 6B = l^2 + l^3 + 11l^5 + 8l^7$$
$$3C = l^1 + 4l^4 + 7l^6 + 2l^8 \quad 3D = l^2 + l^3 + 7l^5 + 5l^7$$
$$A - B = E, \quad C - D = F, \quad \mathfrak{C} = E + F\cos 30^0.$$

Nach den angeführten Beobachtungen ist:

14,32	5,90	7,16	5,90
38,00	4,87	19,00	4,87
81,12	61,27	43,68	38,99
27,80	53,36	13,90	33,35
$6A = 161{,}24$	$6B = 125{,}40$	$3C = 83{,}74$	$3D = 83{,}11$
	$6A = 161{,}24$		$3C = 83{,}74$
	$6E = 35{,}84$		$3F = 0{,}63$
	$E = 5{,}9733\ldots$		$F = 0{,}21$
	$F\cos 30^0 = 0{,}1818$		
	$\mathfrak{C} = 6{,}1552.$		

Die genaueste Mittelwärme ist hier also um $0^0,38$ kleiner, als sie aus der siebengliedrigen Formel gefunden wird.

Professor Plantamour zu Genf hat denselben Gegenstand in der *Bibliothèque universelle*, Mai 1850, *Archives des sciences physiques et naturelles*, XIV, 7 behandelt. Bei dem von ihm gewählten fünfgliedrigen Ausdruck benutzt er das Besselsche Verfahren mit folgender Abänderung. Für die fünf Coefficienten werden gewisse genäherte Werthe angenommen, die dort ohne weitere Begründung mitgetheilt sind. Mit Hülfe derselben werden bei neun Tagesbeobachtungen die drei fehlenden Nachtbeobachtungen berechnet und dann in die Formel gesetzt. Die hiedurch erlangten genauern Werthe dienen zu einer zweiten Annäherung. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis völlige Uebereinstimmung erfolgt.

Nach dieser ungemein weitläufigen Art sind S. 9 für das Jahr 1849 die zwölf monatlichen Mitteltemperaturen berechnet. Ich finde folgende viel einfachere Vorschrift für neun Beobachtungen und fünf Glieder:

$$888\,E = 187\,(t^1+t^9)+33\,(t^2+t^8)+30\,(t^3+t^7)+105\,(t^4+t^6)+178\,t^5$$
$$444\,F = 64\,(t^1+t^9)-17\,(t^2+t^8)-39\,(t^3+t^7)-7\,(t^4+t^6)-2\,t^5$$
$$\mathfrak{C} = E + F\cos 30^0.$$

Als Beispiel wähle ich in der von Plantamour S. 9 gegebenen Tafel den Monat Julius:

14,85	18,21	19,98	21,85	23,47	23,18	22,02	19,85	17,77

$187 \cdot 32,62 =$	6099,94	$64 \cdot 32,62 =$	2087,68
$33 \cdot 38,06 =$	1255,98	$17 \cdot 38,06 =$	− 647,02
$30 \cdot 42,00 =$	1260,	$39 \cdot 42,00 =$	− 1638,
$105 \cdot 45,03 =$	4728,15	$7 \cdot 45,03 =$	− 315,21
$178 \cdot 23,47 =$	4177,66	$2 \cdot 23,47 =$	− 46,94
$888\,E =$	17521,73	$444\,F =$	− 559,49
$E =$	19,7316	$F =$	− 1,2601
		$F\cos 30^0 =$	− 1,0913
		$E =$	19,7316
		$\mathfrak{C} =$	18,6403
		nach Plantamour =	18,62

Auch hier ist es genauer, statt eines fünfgliedrigen einen neungliedrigen Ausdruck anzunehmen. Dann ist

$$A = \tfrac{1}{2}(l^1 + l^9) + (l^3 + l^7) + \tfrac{4}{3}l^5 \qquad B = \tfrac{1}{2}(l^2 + l^8) + (l^4 + l^6)$$
$$C = \tfrac{3}{3}(l^2 + l^8) + \tfrac{1}{3}(l^4 + l^6)$$
$$A - B = E, \quad C - B = F, \quad \mathfrak{C} = E + F\cos 30^0.$$

Nach obigem Beispiel ist:

10,8733	19,03	25,3733
42,	45,03	60,04
31,2933	$B = 64{,}06$	$C = 85{,}4133$
$A = 84{,}1666\ldots$	$A = 84{,}1666\ldots$	$A = 84{,}1666$
	$E = 20{,}1066\ldots$	$F = -\ 1{,}2466\ldots$
		$F\cos 30^0 = -\ 1{,}0796$
		$E = \quad 20{,}1066$
		$\mathfrak{C} = \quad 19{,}0270.$

Hier ist die genaueste Mittelwärme um $0^0{,}38$ grösser, als die aus der fünfgliedrigen Formel gefundene.

Es kann also den Physikern nicht dringend genug empfohlen werden, dass sie ihrer Formel genau so viel Glieder geben, als Beobachtungen vorliegen, weil sie sich sonst einem erheblichen Fehler in der Mittelbeobachtung aussetzen.

Man nehme drei Beobachtungen und einen dreigliedrigen Ausdruck. Die Abstände der ersten Beobachtung von der zweiten und dritten seien $2u$ und $2v$, die Mittelbeobachtung sei

$$a'l' + a''l'' + a'''l''',$$

so ist

$$a' = \frac{\cos(v-u)}{2\sin u \sin v}, \quad a'' = -\frac{\cos v}{2\sin u \sin(v-u)}, \quad a''' = \frac{\cos u}{2\sin v \sin(v-u)}.$$

Bei drei Beobachtungen von siebenstündiger Zwischenzeit ist

$$a' = a''' = 0{,}3972 \text{ sehr nahe } \tfrac{2}{5}$$
$$a'' = 0{,}2056 \text{ sehr nahe } \tfrac{1}{5}.$$

Es ist also unrichtig, wenn einige Physiker in diesem Falle $a' = a'' = \frac{1}{4}$ und $a''' = \frac{2}{4}$ setzen.

Für drei Beobachtungen von achtstündiger Zwischenzeit ist genau $a' = a'' = a''' = \frac{1}{3}$.

Die Ausgleichungsrechnung.

Meine Auffassung der Ausgleichungsrechnung weicht in mancher Hinsicht von den üblichen ab. Ich führe die Beobachtungen nicht unmittelbar in die Rechnung, sondern bestimme die Zahlen, mit denen sie multiplicirt werden müssen. Die Beobachtungen selbst werden ganz zuletzt eingesetzt. Wenn also an die Beobachtungen Verbesserungen gebracht werden, so hat man nicht nöthig, die ganze Rechnung zu wiederholen. Ferner habe ich ein schärferes Verfahren gefunden, um aus den die Beobachtungen behaftenden Mittelfehlern erster Ordnung die durch die Ausgleichung bedingten Mittelfehler zweiter Ordnung zu bestimmen. Endlich liefert mein Verfahren mehrere neue Prüfungsmittel und neue Sätze. Ich habe dasselbe zwar in die kurländischen Arbeiten Heft VI, VIII, IX niedergelegt. Da aber diese Aufsätze weniger bekannt geworden sein dürften, so finde ich mich veranlasst, das Wesentliche hier wiederzugeben.

Eine Beobachtung λ, welche das Mittel von mehrern unter gleichen Umständen angestellten ist, heisst eine unbeziehliche (absolute). Ihr Mittelfehler erster Ordnung sei ε.

Bei mehrern unbeziehlichen Beobachtungen $\lambda' \lambda'' \ldots$, die unter verschiedenen Umständen angestellt worden sind, wählt man Gewichte von willkührlicher Einheit, deren Verhältnisse zu einander durch die Mittelfehler erster Ordnung bestimmt werden, so dass

$$gg = p'\varepsilon'\varepsilon' = p''\varepsilon''\varepsilon'' \ldots$$

Um die unbeziehlichen Beobachtungen gegen einander auszugleichen, muss jede vorher mit dem entsprechenden $\sqrt{p}$ multiplicirt werden. Dadurch werden die unbeziehlichen Beobachtungen zu einheitlichen gemacht. Die unausgeglichenen einheitlichen Beobachtungen sind dann $l' = \lambda'\sqrt{p'}$, $l'' = \lambda''\sqrt{p''}$ .... und es ist g der gemeinsame einheitliche Mittelfehler erster Ordnung, der unausgeglichenen einheitlichen Beobachtungen.

Die den verschiedenen Beobachtungsumständen entsprechenden Coefficienten müssen ebenfalls durch Multiplikation

mit den betreffenden Vp auf einheitliche Werthe gebracht werden. Diese einheitlichen Coefficienten $a', a'' \ldots b', b'' \ldots$ heissen die primitiven Theile.

Die einheitlichen Beobachtungen l, ihr gemeinsamer einheitlicher Mittelfehler $\mathfrak{g}$, und die einheitlichen primitiven Theile $a, b \ldots$, sind der Quadratwurzel der Gewichtseinheit verhältlich.

Die Summenzahlen bezeichne ich durch einen untergesetzten Bogen, also

$$\underset{\smile}{aa} = a'a' + a''a'' \ldots \quad \underset{\smile}{ab} = a'b' + a''b'' \ldots$$

Die aus den einheitlichen primitiven Theilen gebildeten Summenzahlen geben das primitive System, dessen Glieder der Gewichtseinheit verhältlich sind:

$$\begin{array}{lll} \underset{\smile}{aa} & \underset{\smile}{ab} & \underset{\smile}{ac} \ldots \\ \underset{\smile}{ab} & \underset{\smile}{bb} & \underset{\smile}{bc} \ldots \\ \underset{\smile}{ac} & \underset{\smile}{bc} & \underset{\smile}{cc} \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

Aus dem primitiven System wird das polare System durch folgende Identitätsgleichungen abgeleitet:

$$\underset{\smile}{aa}\,\underset{\smile}{\mathfrak{aa}} + \underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{\mathfrak{ab}} \ldots = 1 \qquad \underset{\smile}{aa}\,\underset{\smile}{\mathfrak{ab}} + \underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{\mathfrak{bb}} \ldots = 0$$

$$\underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{\mathfrak{ab}} + \underset{\smile}{bb}\,\underset{\smile}{\mathfrak{bb}} \ldots = 0 \qquad \underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{\mathfrak{ab}} + \underset{\smile}{bb}\,\underset{\smile}{\mathfrak{bb}} \ldots = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

Eine andere Berechnungsart werde ich weiter unten angeben. Das polare System, dessen Glieder der Gewichtseinheit umgekehrt verhältlich sind, ist dann

$$\begin{array}{lll} \underset{\smile}{\mathfrak{aa}} & \underset{\smile}{\mathfrak{ab}} & \underset{\smile}{\mathfrak{ac}} \ldots \\ \underset{\smile}{\mathfrak{ab}} & \underset{\smile}{\mathfrak{bb}} & \underset{\smile}{\mathfrak{bc}} \ldots \\ \underset{\smile}{\mathfrak{ac}} & \underset{\smile}{\mathfrak{bc}} & \underset{\smile}{\mathfrak{cc}} \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

Mittels des polaren Systems findet man die einheitlichen polaren Theile $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'' \ldots \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'' \ldots$ durch folgende Gleichungen:

$$a' = \underbrace{aa}\, a' + \underbrace{ab}\, b' \ldots \qquad \mathfrak{b}' = \underbrace{ab}\, a' + \underbrace{bb}\, b' \ldots$$
$$a'' = \underbrace{aa}\, a'' + \underbrace{ab}\, b'' \ldots \qquad \mathfrak{b}'' = \underbrace{ab}\, a'' + \underbrace{bb}\, b'' \ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Die einheitlichen polaren Theile sind der Quadratwurzel der Gewichtseinheit umgekehrt verhältlich.

Die Richtigkeit der polaren Theile wird durch folgende Gleichungen geprüft:

$$a'a' + a''a'' \ldots = 1 \qquad a'\mathfrak{b}' + a''\mathfrak{b}'' \ldots = 0$$
$$\mathfrak{b}'a' + \mathfrak{b}''a'' \ldots = 0 \qquad \mathfrak{b}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{b}''\mathfrak{b}'' \ldots = 1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Aus den einheitlichen primitiven und polaren Theilen ergeben sich die Glieder des Grenzsystems durch folgende Ausdrücke:

$$1 - \underbrace{11} = a'a' + \mathfrak{b}'\mathfrak{b}' \ldots \qquad - \underbrace{21} = a'a'' + \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'' \ldots$$
$$- \underbrace{12} = a''a' + \mathfrak{b}''\mathfrak{b}' \ldots \qquad 1 - \underbrace{22} = a''a'' + \mathfrak{b}''\mathfrak{b}'' \ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Das Grenzsystem, dessen Glieder von der Gewichtseinheit unabhängig sind, ist dann:

$$\begin{array}{lll} \underbrace{11} & \underbrace{12} & \underbrace{13} \ldots \\ \underbrace{21} & \underbrace{22} & \underbrace{23} \ldots \\ \underbrace{31} & \underbrace{32} & \underbrace{33} \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

Die erste Prüfung gewährt die Gleichung der Seitenzahlen

$$\underbrace{12} = \underbrace{21} \qquad \underbrace{13} = \underbrace{31} \qquad \underbrace{23} = \underbrace{32} \ldots$$

Die zweite Prüfung erhält man durch die Summe der Querzahlen

$$\underbrace{11} + \underbrace{22} + \underbrace{33} \ldots = n - r$$

Hier ist n die Anzahl der Beobachtungen oder der Glieder in jeder Reihe des Grenzsystems, und r die Anzahl der Glieder in jeder Reihe des primitiven und polaren Systems.

Eine dritte Prüfung giebt der Satz, dass die Summe der Glieder des Grenzsystems gleich der Summe der Quadrate dieser Glieder ist. Es sei nämlich

$$\begin{aligned} \underbrace{a}\ \underbrace{a}+\underbrace{b}\ \underbrace{b}+\underbrace{c}\ \underbrace{c}\ldots &= S \\ \underbrace{11}+\underbrace{12}+\underbrace{13}\ldots &= v' \\ \underbrace{21}+\underbrace{22}+\underbrace{23}\ldots &= v'' \\ \underbrace{31}+\underbrace{32}+\underbrace{33}\ldots &= v''' \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} (1-v') + (1-v'') + (1-v''')\ldots &= S \\ (1-v')(1-v')+(1-v'')(1-v'')+(1-v''')(1-v''')\ldots &= S \\ v' + v'' + v'''\ldots &= n-S \\ v'v' + v''v'' + v'''v'''\ldots &= n-S \end{aligned}$$

Die vierte Prüfung gewähren die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \underbrace{11}\,a' + \underbrace{12}\,a''\ldots = 0 & \underbrace{21}\,a' + \underbrace{22}\,a''\ldots = 0 \\ \underbrace{11}\,b' + \underbrace{12}\,b''\ldots = 0 & \underbrace{21}\,b' + \underbrace{22}\,b''\ldots = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{11}\,a' + \underbrace{12}\,a''\ldots = 0 & \underbrace{21}\,a' + \underbrace{22}\,a''\ldots = 0 \\ \underbrace{11}\,b' + \underbrace{12}\,b''\ldots = 0 & \underbrace{21}\,b' + \underbrace{22}\,b''\ldots = 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Eine fünfte Prüfung führt zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft des Grenzsystems. Bei der Bildung des primitiven Systems schreibt man gewöhnlich die gleichnamigen primitiven Theile unter einander:

$$\begin{array}{lll} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ \multicolumn{3}{c}{\vdots} \end{array}$$

Man setze sie nun neben einander:

$$\begin{array}{lll} a' & a'' & a'''\ldots \\ b' & b'' & b'''\ldots \\ c' & c'' & c'''\ldots \\ \multicolumn{3}{c}{\vdots} \end{array}$$

Das gewöhnliche Verfahren giebt dann die Glieder:

$$\underbrace{I.I} = a'a' + b'b' + c'c' \ldots \qquad \underbrace{I.II} = a'a'' + b'b'' + c'c'' \ldots$$

$$\underbrace{II.II} = a''a'' + b''b'' + c''c'' \ldots$$

$$\vdots$$

Das Nebensystem der primitiven Theile, dessen Glieder der Gewichtseinheit verhältlich sind, ist also:

$$\begin{array}{lll} \underbrace{I.I} & \underbrace{I.II} & \underbrace{I.III} \ldots \\ \underbrace{I.II} & \underbrace{II.II} & \underbrace{II.III} \ldots \\ \underbrace{I.III} & \underbrace{II.III} & \underbrace{III.III} \ldots \end{array}$$

$$\vdots$$

Man erhält dann die einheitlichen primitiven Theile aus den einheitlichen polaren Theilen durch die Gleichungen

$$a' = \underbrace{I.I}\ a' + \underbrace{I.II}\ a'' \ldots \qquad b' = \underbrace{I.I}\ b' + \underbrace{II.II}\ b'' \ldots$$

$$a'' = \underbrace{I.II}\ a' + \underbrace{II.II}\ a'' \ldots \qquad b'' = \underbrace{I.II}\ b' + \underbrace{II.II}\ b'' \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Eben so gelten für die Glieder des Grenzsystems die Gleichungen:

$$0 = \underbrace{I.I}\ \underbrace{11} + \underbrace{I.II}\ \underbrace{12} \ldots \qquad 0 = \underbrace{I.I}\ \underbrace{21} + \underbrace{I.II}\ \underbrace{22} \ldots$$

$$0 = \underbrace{I.II}\ \underbrace{11} + \underbrace{II.II}\ \underbrace{12} \ldots \qquad 0 = \underbrace{I.II}\ \underbrace{21} + \underbrace{II.II}\ \underbrace{22} \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Die Anzahl der Glieder in jeder Reihe dieses Nebensystems ist gleich der Anzahl der Beobachtungen n. Aus demselben lässt sich nur dann eine vollständige Ausscheidung vornehmen, also ein bestimmtes Polarsystem bilden, wenn $n = r$ ist. In diesem Falle giebt dieses Polarsystem des Nebensystems mit den primitiven Theilen $a'a'' \ldots$, die polaren Theile $a'a'' \ldots$, mit den primitiven Theilen $b'b'' \ldots$, die polaren Theile $b'b''$ u. s. f. Auch folgt aus den obigen Gleichungen, dass in

diesem Falle, wo $n = r$ ist, sämmtliche Glieder des Grenzsystems verschwinden müssen,

$$\underbrace{11} = 0, \quad \underbrace{12} = 0, \quad \underbrace{22} = 0 \text{ u. s. f.}$$

Wenn $n - r = 1$ ist, so gelangt man durch $n - 2 = r - 1$ Ausscheidungen auf ein zweigliedriges identisches System. In diesem Falle besteht also zwischen allen gleichnamigen Gliederpaaren des Grenzsystems ein festes Verhältniss, z. B.

$$\underbrace{11} : \underbrace{12} = \underbrace{12} : \underbrace{22} = \underbrace{13} : \underbrace{23} \text{ u. s. f.}$$

Das Grenzsystem hat also in diesem Falle, wo $n - r = 1$ ist, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die Produkte der ein Kreuz bildenden Glieder einander gleich sind, z. B.

$$\underbrace{11} \cdot \underbrace{22} = \underbrace{12} \cdot \underbrace{12} \qquad \underbrace{11} \cdot \underbrace{23} = \underbrace{12} \cdot \underbrace{13} \text{ u. s. f.}$$

Wenn allgemein $n - r = m$ ist, so gelangt man durch $n - m - 1 = r - 1$ Ausscheidungen auf $m + 1$ identische Gleichungen. Diese Gleichung besteht alsdann zwischen je $m + 1$ auf einander folgenden gleichnamigen Gliedern des Grenzsystems, z. B. zwischen

$$\begin{aligned} &\underbrace{11} \quad \underbrace{12} \quad \underbrace{13} \ldots \\ \text{oder } &\underbrace{21} \quad \underbrace{22} \quad \underbrace{23} \ldots \\ \text{oder } &\underbrace{31} \quad \underbrace{32} \quad \underbrace{33} \ldots \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise, wie aus den primitiven Theilen, lässt sich auch aus den polaren Theilen ein Nebensystem bilden. Auch für dieses gelten die ähnlichen Schlüsse. Jedoch ist es nicht das Polarsystem des Nebensystems der primitiven Theile.

Nach allseitiger Prüfung des Grenzsystems erhält man in demselben die Vollendung der Ausgleichungsrechnung. Es giebt zuerst die einheitlichen Grenzabweichungen $k' k'' \ldots$, welche gewöhnlich Beobachtungsfehler genannt werden. Sie sind der Quadratwurzel der Gewichtseinheit verhältlich.

$$k' = \underbrace{11}\, l' + \underbrace{12}\, l'' + \underbrace{13}\, l''' \ldots$$

$$k'' = \underbrace{21}\, l' + \underbrace{22}\, l'' + \underbrace{23}\, l''' \ldots$$

$$\vdots$$

Zur Prüfung

$$\underbrace{k} = v'l' + v''l'' + v'''l''' \ldots$$

Hieraus die einheitlichen ausgeglichenen Beobachtungen, welche der Quadratwurzel der Gewichtseinheit verhältlich sind.

$$l' = l' - k',\ l'' = l'' - k'' \ldots$$

Ferner die einheitliche Grenzanlage, welche gewöhnlich die Summe der Fehlerquadrate genannt wird. Sie ist der Gewichtseinheit verhältlich.

$$\underbrace{kk} = k'k' + k''k'' \ldots$$

oder $\underbrace{kk} = k'l' + k''l'' \ldots$

oder $$\underbrace{kk} = \underbrace{11}\, l'l' + \underbrace{12}\, l'l'' + \underbrace{13}\, l'l''' \ldots$$
$$+ \underbrace{12}\, l'l'' + \underbrace{22}\, l''l'' + \underbrace{23}\, l''l''' \ldots$$
$$+ \underbrace{13}\, l'l''' + \underbrace{23}\, l''l''' + \underbrace{23}\, l'''l''' \ldots$$
$$\vdots$$

Die gewöhnliche Prüfung ist

$$\underbrace{ll} = \underbrace{al}\ \underbrace{al} + \underbrace{bl}\ \underbrace{bl} \ldots$$

und $\underbrace{kk} = \underbrace{ll} - \underbrace{ll}$

Diese Prüfung ist deswegen weniger genau, weil sie $\underbrace{kk}$ als den Unterschied zweier grossen Zahlen giebt.

Der einheitliche Mittelfehler zweiter Ordnung sei $= \mathfrak{f}$, so ist

$$(n - r)\ \mathfrak{ff} = \underbrace{kk}$$

Die Mittelfehler der ausgeglichenen Ursachen $\underbrace{al}$, $\underbrace{bl} \ldots$ seien $M'\ M'' \ldots$, so ist:

$$M'\ M' = \underbrace{aa}\ \mathfrak{ff} + \underbrace{a}\,.\,\underbrace{a}\ \mathfrak{gg}$$
$$M''M'' = \underbrace{bb}\ \mathfrak{ff} + \underbrace{b}\,.\,\underbrace{b}\ \mathfrak{gg}$$

Die Mittelfehler $M'\ M'' \ldots$ sind von der Gewichtseinheit unabhängig. Bei einem eingliedrigen System ist

$$M^2 = \frac{1}{\underbrace{aa}}\,\mathfrak{f}^2 + \left(\frac{\underbrace{a}}{\underbrace{aa}}\right)^2 \mathfrak{g}^2$$

Die Mittelfehler der einheitlichen ausgeglichenen Beobachtungen $l' l'' \ldots$ seien $m' m'' \ldots$, so ist

$$m' m' = (1 - \underset{\frown}{11})\, ff + (1 - v')\,(1 - v')\, gg$$
$$m'' m'' = (1 - \underset{\frown}{22})\, ff + (1 - v'')\,(1 - v'')\, gg$$
$$\vdots$$

Diese Mittelfehler $m' m'' \ldots$ sind der Quadratwurzel der Gewichtseinheit verhältlich. Bei einem eingliedrigen System ist $m' = a'M$, $m'' = a''M \ldots$

Die unbeziehlichen ausgeglichenen Beobachtungen seien $\mathfrak{L}' \mathfrak{L}' \ldots$, ihre Mittelfehler zweiter Ordnung $e' e'' \ldots$, so ist

$$\mathfrak{L}' = \frac{l'}{\sqrt{p'}} \qquad e' = \frac{m'}{\sqrt{p'}}$$
$$\mathfrak{L}'' = \frac{l''}{\sqrt{p''}} \qquad e'' = \frac{m''}{\sqrt{p''}}$$
$$\vdots$$

Diese unbeziehlichen ausgeglichenen Beobachtungen $\mathfrak{L}$ und ihre Mittelfehler e sind von der Gewichtseinheit unabhängig.

Zur Ableitung des polaren Systems aus dem primitiven gebe ich folgenden neuen Satz:

«Ein System primitiver Theile, welches die Ergänzung zweier anderer Systeme ist, giebt aus dem polaren System des einen das polare System des andern.»

Die primitiven Systeme seien M N, ihre Ergänzung O.

M	N	O
$a' \; b' \; c' \ldots$	$a' \; b' \; c' \ldots$	$A' \; B' \; C' \ldots$
$a'' \; b'' \; c'' \ldots$	$a'' \; b'' \; c'' \ldots$	$A'' \; B'' \; C'' \ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$A' \; B' \; C' \ldots$$
$$A'' \; B'' \; C'' \ldots$$
$$\vdots$$

M			N		
$\underbrace{aa}$	$\underbrace{ab}$	$\underbrace{ac}\ldots$	$\underbrace{aa}+\underbrace{AA}$	$\underbrace{ab}+\underbrace{AB}$	$\underbrace{ac}+\underbrace{AC}\ldots$
$\underbrace{ab}$	$\underbrace{bb}$	$\underbrace{bc}\ldots$	$\underbrace{aa}+\underbrace{AB}$	$\underbrace{bb}+\underbrace{BB}$	$\underbrace{bc}+\underbrace{BC}\ldots$
$\underbrace{ac}$	$\underbrace{bc}$	$\underbrace{cc}\ldots$	$\underbrace{ac}+\underbrace{AC}$	$\underbrace{bc}+\underbrace{BC}$	$\underbrace{cc}+\underbrace{CC}\ldots$
$\vdots$			$\vdots$		

Die polaren Systeme seien $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$.

$\mathfrak{M}$			$\mathfrak{N}$		
$\underbrace{aa}$	$\underbrace{ab}$	$\underbrace{ac}\ldots$	$\underbrace{\alpha\alpha}$	$\underbrace{\alpha\beta}$	$\underbrace{\alpha\gamma}\ldots$
$\underbrace{ab}$	$\underbrace{bb}$	$\underbrace{bc}\ldots$	$\underbrace{\alpha\beta}$	$\underbrace{\beta\beta}$	$\underbrace{\beta\gamma}\ldots$
$\underbrace{ac}$	$\underbrace{bc}$	$\underbrace{cc}\ldots$	$\underbrace{\alpha\gamma}$	$\underbrace{\beta\gamma}$	$\underbrace{\gamma\gamma}\ldots$
$\vdots$			$\vdots$		

Aus $\mathfrak{N}$ findet man $\mathfrak{M}$ durch folgende Rechnung:

Erste Hülfstheilreihe.

$$U' = A'\underbrace{\alpha\alpha} + B'\underbrace{\alpha\beta}\ldots \qquad V' = A'\underbrace{\alpha\beta} + B'\underbrace{\beta\beta}\ldots$$

$$U'' = A''\underbrace{\alpha\alpha} + B''\underbrace{\alpha\beta}\ldots \qquad V'' = A''\underbrace{\alpha\beta} + B''\underbrace{\beta\beta}\ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$1 - \underbrace{pp} = A'U' + B'V'\ldots \qquad -\underbrace{pq} = A''U' + B''V'\ldots$$

$$-\underbrace{qp} = A'U'' + B'V''\ldots \qquad 1 - \underbrace{qq} = A''U'' + B''V''\ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Hier sind die entsprechenden Seitenzahlen einander gleich, $qp = pq$ u. s. w. Aus dem primitiven Hülfssystem P wird das polare Hülfssystem $\mathfrak{P}$ gefunden.

P			$\mathfrak{P}$		
$\underbrace{pp}$	$\underbrace{pq}$	$\underbrace{pr}\ldots$	$\underbrace{\mathfrak{pp}}$	$\underbrace{\mathfrak{pq}}$	$\underbrace{\mathfrak{pr}}\ldots$
$\underbrace{pq}$	$\underbrace{qq}$	$\underbrace{qr}\ldots$	$\underbrace{\mathfrak{pq}}$	$\underbrace{\mathfrak{pq}}$	$\underbrace{\mathfrak{qr}}\ldots$
$\underbrace{pr}$	$\underbrace{qr}$	$\underbrace{rr}\ldots$	$\underbrace{\mathfrak{pr}}$	$\underbrace{\mathfrak{qr}}$	$\underbrace{\mathfrak{rr}}\ldots$
$\vdots$			$\vdots$		

Zweite Hülfstheilreihe.

$$u' = U'\underset{\smile}{pp} + U''\underset{\smile}{pq}\ldots \qquad v' = V'\underset{\smile}{pp} + V''\underset{\smile}{pq}\ldots$$
$$u'' = U'\underset{\smile}{pq} + U''\underset{\smile}{qq}\ldots \qquad v'' = V'\underset{\smile}{pq} + V''\underset{\smile}{qq}\ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Hieraus die Glieder des Polarsystems $\mathfrak{N}$:

$$\underset{\smile}{aa} = \underset{\smile}{\alpha\alpha} + \underset{\smile}{Uu} \qquad \underset{\smile}{ab} = \underset{\smile}{\alpha\beta} + \underset{\smile}{Uv}\ldots$$
$$\underset{\smile}{ab} = \underset{\smile}{\alpha\beta} + \underset{\smile}{Vu} \qquad \underset{\smile}{bb} = \underset{\smile}{\beta\beta} + \underset{\smile}{Vv}\ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Hier sind die entsprechenden Seitenzahlen einander gleich, $\underset{\smile}{Uv} = \underset{\smile}{Vu}$ u. s. w.

Auf dieselben Zahlen gelangt man bei der Bestimmung von $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{M}$. Die zweite Hülfstheilreihe in dem einen Fall ist gleich der ersten Hülfstheilreihe in dem andern Fall, das primitive Hülfssystem P in dem einen Fall ist gleich dem polaren Hülfssystem in dem andern Fall, die Produkte $\underset{\smile}{Uu}$, $\underset{\smile}{Uv}$, $\underset{\smile}{Vv}$ ... sind in beiden Fällen dieselben.

Der vorstehende Satz giebt folgenden neuen Weg, um aus einem primitiven System dessen polares System abzuleiten.

Aus einem gegebenen primitiven Systeme M bildet man durch fortgesetzte Erniedrigung die primitiven Systeme M' M''...

M				M'			M''	
$\underset{\smile}{aa}$	$\underset{\smile}{ab}$	$\underset{\smile}{ac}$	$\underset{\smile}{ad}\ldots$	$\underset{\smile}{b'b'}$	$\underset{\smile}{b'c'}$	$\underset{\smile}{b'd'}\ldots$	$\underset{\smile}{c''c''}$	$\underset{\smile}{c''d''}\ldots$
	$\underset{\smile}{bb}$	$\underset{\smile}{bc}$	$\underset{\smile}{bd}\ldots$		$\underset{\smile}{c'c'}$	$\underset{\smile}{c'd'}\ldots$		$\underset{\smile}{d''d''}\ldots$
		$\underset{\smile}{cc}$	$\underset{\smile}{cd}\ldots$			$\underset{\smile}{d'd'}\ldots$		
			$\underset{\smile}{dd}\ldots$					

Diese Erniedrigungen werden durch die Glieder der obern Reihe bewirkt:

$$\underset{\smile}{b'b'} = \underset{\smile}{bb} + \underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{ab} \qquad \underset{\smile}{b'c'} = \underset{\smile}{bc} + \underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{ac} \qquad \underset{\smile}{b'd'} = \underset{\smile}{bd} + \underset{\smile}{ab}\,\underset{\smile}{ad}$$
$$\underset{\smile}{c'c'} = \underset{\smile}{cc} + \underset{\smile}{ac}\,\underset{\smile}{ac} \qquad \underset{\smile}{c'd'} = \underset{\smile}{cd} + \underset{\smile}{ac}\,\underset{\smile}{ad}$$
$$\underset{\smile}{d'd'} = \underset{\smile}{dd} + \underset{\smile}{ad}\,\underset{\smile}{ad}$$

u. s. w.

Wie M zu M' erniedrigt wird, so M' zu M'' u. s. w. Diese Erniedrigung wird so lange fortgesetzt, bis man auf ein System gelangt, welches sich bequem in ein polares umwandeln lässt. Von diesem polaren System steigt man dann zum nächsthöhern hinauf. Das gegebene polare System sei $\mathfrak{R}'$, das nächsthöhere $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}'$			$\mathfrak{R}$			
$\underline{\beta\beta}$	$\underline{\beta\gamma}$	$\underline{\beta\delta}$	$\underline{aa}$	$\underline{ab}$	$\underline{ac}$	$\underline{ab}\ldots$
	$\underline{\gamma\gamma}$	$\underline{\gamma\delta}$		$\underline{bb}$	$\underline{bc}$	$\underline{bd}\ldots$
		$\underline{\delta\delta}$			$\underline{cc}$	$\underline{cd}\ldots$
						$\underline{dd}\ldots$

Aus $\mathfrak{R}'$ findet man $\mathfrak{R}$ mittels der obern Reihe von M durch folgende Rechnung:

$$\frac{1}{u} = 1 + \underline{aa}$$
$$-v = \underline{ab}\,\underline{\beta\beta} + \underline{ac}\,\underline{\beta\gamma} + \underline{ad}\,\underline{\beta\delta}\ldots$$
$$-w = \underline{ab}\,\underline{\beta\gamma} + \underline{ac}\,\underline{\gamma\gamma} + \underline{ad}\,\underline{\gamma\delta}\ldots$$
$$-x = \underline{ab}\,\underline{\beta\delta} + \underline{ac}\,\underline{\gamma\delta} + \underline{ad}\,\underline{\delta\delta}\ldots$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\lambda} = 1 - u + \underline{ab}\,v + \underline{ac}\,w + \underline{ad}\,x\ldots$$

$$\underline{aa} = u + \lambda uu \qquad \underline{ab} = \lambda uv \qquad \underline{ac} = \lambda uw\ldots$$
$$\underline{bb} = \beta\beta + \lambda vv \qquad \underline{bc} = \beta\gamma + \lambda vw\ldots$$
$$\underline{cc} = \gamma\gamma + \lambda ww\ldots$$

Sowohl bei den Erniedrigungen als bei den Erhöhungen geben die Summenzahlen leichte Prüfungsmittel.

Beispiel.

M			M'		76 $\mathfrak{R}'$	
4	1	−1	8	10	22	−10
	7	11		22		8
		21				

$$\frac{1}{u} = 5 \qquad \lambda u = \frac{76}{54} \quad \lambda v = -\frac{160}{54} \quad \lambda w = \frac{90}{54}$$

$$-v = \frac{22}{76} + \frac{10}{76} \qquad \lambda uu = \frac{76}{270} \quad \lambda uv = -\frac{32}{54} \quad \lambda uw = \frac{18}{54}$$

$$-w = -\frac{10}{76} - \frac{8}{76} \qquad \lambda vv = \frac{5120}{4104} \quad \lambda vw = -\frac{2880}{4104}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{5} - \frac{32}{76} - \frac{18}{76} \qquad \lambda ww = \frac{1620}{4104}$$

$\mathfrak{M}$			oder 54 $\mathfrak{M}$		
$\left(\frac{1}{5} + \frac{76}{270}\right)$	$\left(-\frac{32}{54}\right)$	$\left(\frac{18}{54}\right)$	26	— 32	18
$\left(\frac{22}{76} + \frac{5120}{4104}\right)$	$\left(-\frac{10}{76} - \frac{2880}{4104}\right)$		83	— 45	
	$\left(\frac{8}{76} + \frac{1620}{4104}\right)$				27

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. IX. No.* 8.)

$\frac{4}{13}$ Novembre 1850.

Évaluation de la masse de Neptune, par Auguste Struve, d'après les mesures micrométriques, exécutées au grand réfracteur de l'Observatoire de Poulkova, par M. O. Struve.

La série d'observations que je m'étais proposé de faire sur le satellite de Neptune, fut achevée vers la fin de l'année 1848. Le printemps suivant, je donnai ces observations à mon cousin, Auguste Struve, qui se proposa d'en déduire les valeurs les plus probables des éléments de l'orbite du satellite et de la masse de la planète. A peine avait il fini ces calculs, au commencement de l'année courante, qu'il nous fut arraché par une mort prématurée. Des voyages que j'avais à faire et d'autres travaux m'ont empêché jusqu'à présent de publier les résultats de ses recherches. Je remplis maintenant ce devoir.

Avant d'entrer dans les détails des calculs, il me paraît nécessaire de donner la liste totale des observations, quoiqu'une partie considérable, celle de 1847, en ait été publiée déjà, à une occasion précédente, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris et dans les «*Astronomische Nachrichten*».

Année	Date.	Temps sid. de l'obs.	Distance	Angle de pos.	Notes
1847	Sept. 11	23^h11^m	17″,91	46°,3	
—	— 13	23 21	15,54	203,5	Images très ondulantes, le satellite ne se voit qu'à peine. Par cette raison la mesure de la distance n'est pas très exacte.
—	— 14	21 38	18,29	223,7	Mesure bonne et exacte.
—	— 25	22 37	15,92	208,5	Le satellite fut reconnu avec sûreté, mais les mesures ont souffert du trouble des images.
—	— 28	0 37	17,30	37,55	Malgré sa position peu élevée, le satellite fut très bien visible.
—	— 30	22 11	5,07	144,6	Par un bon état de l'atmosphère, je ne doute pas, que je n'aie réellement observé le satellite, quoiqu'avec difficulté.
—	Oct. 8	23 4	14,70	233,2	Mesures très peu exactes, obtenues par des nuages.
—	— 25	22 8	18,73	219,1	
—	Nov. 3	21 19	17,05	37,55	
—	— 20	22 32		28,8	Des nuages empêchaient les mesures des distances.
—	— 27	21 32	16,30	38,5	Mesures très peu sûres, par un vent très fort et des images très ondulantes.
—	— 28	22 6	5,95	144,4	Les images sont bonnes. Je crois avoir reconnu le satellite avec sûreté, quoiqu'avec quelque difficulté.
—	Déc. 20	23 2	18,03	35,9	
1848	Sept. 6	21 36	18,95	215,7	
—	— 24	22 11	18,61	218.15	
—	— 27	22 43	17,14	43,35	Mesures bonnes et exactes, le satellite est très bien visible.
—	Oct. 2	22 38	14,70	26,25	Bonnes images et pellucidité extraordinaire de l'atmosphère.
—	— 3	21 35	16,19	42,35	
—	— 16	22 0	12,85	194,9	Le satellite est très faible. Les mesures de la distance ne peuvent prétendre à une grande exactitude.
	— 24	21 54	15,34	229,7	
1849	Nov. 18	22 38	17,31	32,3	

La dernière observation isolée de 1849 fut ajoutée, lorsque les calculs étaient déjà avancés considérablement, pour augmenter l'exactitude de la valeur à déduire du mouvement moyen du satellite.

Toutes les observations furent exécutées dans le champ obscur de la lunette, à l'aide de fils très peu illuminés. Mais quelque faible que fût l'illumination des fils, le satellite ne

pouvait supporter la bissection. Au moins je suis persuadé qu'en procédant de la manière usuelle des mesures micrométriques, l'exactitude des observations aurait dû souffrir considérablement. Or, je préférais, pour les mesures des distances, de tenir la planète sur l'un des fils et de visser l'autre fil, jusqu'à ce que le satellite me parût exactement au milieu entre les deux fils. L'estime des distances égales entre le satellite et les deux fils me paraît être susceptible d'une très haute exactitude. Il s'entend que cette opération fut toujours exécutée des deux côtés du fil fixe du micromètre, pour éliminer la détermination moins exacte de la coïncidence des deux fils faiblement éclairés. Les mesures des angles de position se faisaient comme de coutume, à la seule différence près que, pour affaiblir encore la quantité de lumière introduite dans le champ, je ne me servis que d'un seul fil que je plaçais alternativement de l'un et de l'autre côté des deux objets, afin de ne pas commettre des erreurs constantes dans le jugement du parallélisme entre la direction des deux objets et celle du fil.

Le grossissement employé dans ces observations a été constamment le même, de 279 fois. L'oculaire est un de ceux où les surfaces planes se regardent, ce qui détruit l'image de reflet qui se produit dans les oculaires de la construction de Ramsden. Ce grossissement a suffi pour montrer le disque de Neptune, dans toutes les circonstances atmosphériques, et de le reconnaître, par le disque, parmi les étoiles environnantes.

En premier lieu, Auguste Struve convertit les temps sidéraux des observations, en temps moyens de Poulkova. Puis, les angles de position, donnés par rapport aux cercles de déclinaison, furent réduits sur les cercles de latitude, et les distances apparentes du satellite changées en des distances correspondantes à la distance moyenne de Neptune au Soleil. Dans ces réductions, ainsi qu'en général dans le calcul des positions géocentriques de Neptune, Auguste Struve s'est servi des éléments de cette planète donnés par M. Walker dans les «*Astronomische Nachrichten* No. 628».

Voici comment se présentent les observations après ces réductions:

Année	Date	Temps moy. de l'obs.	Distances	Angles de pos.
1847	Sept. 11	11h50m	17″,315	66°38′
—	— 13	11 52	15,040	223 49
—	— 14	10 5	17,690	244 1
—	— 25	10 21	15,445	228 45
—	— 28	12 9	16,806	57 43
—	— 30	9 36	4,929	164 51
—	Octob. 8	9 56	14,336	253 25
—	— 25	7 54	18,416	239 16
—	Nov. 3	6 30	16,845	57 43
—	— 20	6 30		48 54
—	— 27	5 4	16,325	58 41
—	— 28	6 33	5,963	164 35
—	Déc. 20	5 8	18,283	56 9
1848	Sept. 6	10 28	18,290	236 29
—	— 24	9 56	18,038	238 51
—	— 27	10 16	16,620	64 3
—	Octob. 2	9 51	14,287	46 56
—	— 3	8 45	15,741	63 1
—	— 16	8 18	12,563	215 32
—	— 24	7 41	15,058	250 19
1849	Nov. 18	6 45	17,196	53 14

En partant de ces données, Auguste Struve calcula, en premier lieu, des éléments approximatifs, en y supposant que la forme de l'orbite réelle du satellite fut parfaitement circulaire. La comparaison des positions calculées sur ces éléments, avec les observations, prouva que les mesures du 27 novembre 1847, indiquées déjà, pendant les observations elles-mêmes, comme très peu sûres, ne s'accordent point avec les autres mesures. La même chose a lieu pour les mesures du 16 octobre 1848, mais qui ont été également notées comme peu certaines. Cependant ces dernières observations s'accorderaient très bien, soit en distance soit en position, si l'on supposait qu'une erreur soit commise dans la notation du jour de l'observation et qu'il fallait lire le 17 au lieu du 16 octobre. Néanmoins, comme je ne suis pas en état de vérifier cette dernière supposition, ces deux observations inexactes furent rejetées dans les calculs ultérieurs, ainsi que l'observation incomplète du 20 novembre 1847. Il restait donc

18 observations complètes et approximativement d'égale exactitude, dont il déduisit les éléments les plus probables de l'orbite elliptique du satellite, d'après la méthode des moindres carrés, en se servant de formules différentielles pour corriger les éléments primitifs. Sans m'étendre plus au large sur les détails des calculs exécutés avec le plus grand soin, je passerai directement aux résultats:

Demi grand axe $a = 17'',969$, erreur prob. $= 0'',129$
Mouvement moyen par jour $\mu = 61^{\circ},2625$
erreur probable . . . . . $= 0^{\circ},00383$
Argument de latitude pour l'époque de la première observation 1847 Sept. 11,495 t. m. $V = 128^{\circ}26'$, erreur probable . . . $= 1^{\circ}34'$
Inclinaison $i = 35^{\circ}6'$, erreur probable . . . $= 0^{\circ}40'$
Longitude du noeud ascendant $\Omega = 300^{\circ}5' = 1^{\circ}35'$
Différence en longitude entre le Périneptune et le noeud ascendant $U = 66^{\circ}51'$ . . . $= 19^{\circ}43'$.

Nous tirons encore du mouvement moyen, la période d'une révolution du satellite $R = 5$ j. $21^{h}1,8^{m}$, quantité sujette à une erreur probable seulement de $5,5^{m}$.

Le calcul préalable de l'orbite, fait dans la supposition d'une figure circulaire, avait fait ressortir une prépondérance considérable en exactitude pour les mesures des distances, comparées aux angles de position. Dans les calculs définitifs, Auguste Struve a eu égard en quelque sorte, aux différences des poids qu'il avait déduits précédemment, en attribuant aux distances le poids double de celui des angles. Les erreurs des équations de condition, trouvées par la substitution des valeurs finales des inconnues dans les équations, et comparées aux erreurs des observations tirées du calcul direct des lieux du satellite d'après les éléments précédemment donnés, nous ont fourni un contrôle très satisfaisant de l'exactitude de tous les calculs. Je donnerai maintenant la liste des erreurs des observations, en distance $= v$, en angle dP et $r \sin dP = v'$.

Année	Date	Calcul — Observation		
		v	$d.P$	v'
1847	Sept. 11	— 0″,36	— 3°17′	— 0″,97
—	— 13	— 1,00	— 0 12	— 0,05
—	— 14	+ 0,20	— 2 34	— 0,80
—	— 25	+ 0,51	— 0 24	— 0,11
—	— 28	— 0,38	— 5 50	— 1,67
—	— 30	+ 0,46	+ 2 50	+ 0,27
—	Oct. 8	— 0,47	— 1 39	— 0,40
—	— 25	— 0,10	— 1 36	— 0,51
—	Nov. 3	+ 0,46	+ 3 30	+ 1,06
—	— 28	+ 0,35	+21 55	+ 2,36
—	Déc. 20	— 0,75	+ 3 53	+ 1,19
1848	Sept. 6	— 0,59	— 2 52	— 0,88
—	— 24	+ 0,18	+ 1 5	+ 0,34
—	— 27	+ 0,59	— 1 0	— 0,30
—	Oct. 2	— 0,98	— 3 43	— 0,86
—	— 3	+ 1,21	+ 1 14	+ 0,36
—	— 24	— 0,20	+ 0 26	+ 0,11
1849	Nov. 18	+ 0,11	+ 2 32	+ 0,76

En prenant les sommes des carrés des v et des v', nous trouvons $\Sigma v^2 = 6{,}10$, $\Sigma v'^2 = 15{,}42$. Or le rapport de Σv^2 à $\Sigma v'^2$ nous apprend que le poids $^1/_2$ attribué aux mesures des angles de position, par rapport aux mesures des distances a été plutôt trop fort que trop faible. Cependant il faut remarquer qu'une augmentation considérable des erreurs des angles est due à la seule observation du 28 novembre 1847, observation qui, par la proximité du satellite à la planète, a été dite «très difficile» dans le journal. Je suis même d'avis qu'il aurait mieux valu omettre entièrement cette observation, comme étant troublée par la trop grande proximité de la planète, mais vu que, dans mon journal d'observations, je me suis exprimé distinctement que j'avais reconnu le satellite, notre calculateur ne s'y a pu résoudre.

Nous déduisons des Σv^2 et $\Sigma v'^2$ précédentes, l'erreur probable à craindre dans la détermination de la distance par les observations d'une seule nuit $= 0''{,}404$ et celle d'un seul angle de position, exprimée linéairement, ou la valeur probable d'un seul $v' = 0{,}642$.

A ce que nous avons vu, Auguste Struve avait aussi introduit dans ces équations, l'excentricité de l'orbite du satellite et a trouvé une valeur de cet élément deux fois plus grande que n'en est l'erreur probable. Néanmoins je crois qu'il ne faut pas encore accepter cette excentricité comme réellement existante dans l'orbite du satellite. Il me semble au contraire que, si nous la mettons $= 0$, c'est-à-dire, si nous supposons la forme circulaire de l'orbite, qu'alors les erreurs restantes des observations ne seront guère plus grandes qu'il ne les faut admettre en considérant l'extrême faiblesse de l'objet et la difficulté des mesures.

Nous parvenons maintenant à l'objet principal de ces recherches c.-à-d. à la détermination de la masse de Neptune $= M$. Elle se déduit simplement des valeurs précédemment données de a et de μ, qui nous fournissent:

$$M = \frac{1}{14446}, \text{ avec l'erreur probable} = 0{,}02157\ M.$$

Cette valeur de la masse de Neptune, qui ne diffère que très peu de la valeur que j'ai déduite des seules observations de l'année 1847, est considérablement plus grande que celle qui a été déduite des observations faites par MM. Bond à l'Observatoire de Cambridge *U. S.* $= \frac{1}{19400}$. La différence de nos déterminations provient évidemment d'une différence constante dans nos mesures respectives des distances du satellite. A juger par les valeurs trouvées du demi grand axe de l'orbite, cette différence constante doit s'élever à peu près à $1''{,}67$, quantité quatre fois plus grande que l'erreur probable d'une seule distance mesurée. Il s'en suit que cette différence ne s'explique nullement par des erreurs accidentelles d'observation, et il faut chercher l'origine dans les méthodes employées d'observation. Dans mes observations, la distance moyenne du satellite à la planète a été de $16''$ à peu près. Or, si l'erreur était de mon côté, j'aurais dû prendre pour égales les deux distances aux fils luisants, des deux côtés du satellite, tandis qu'elles auraient été réellement de $14''{,}3$ et de $17''{,}7$. En attribuant même un petit accroissement d'incertitude à la

faiblesse de l'objet observé, chaque astronome expérimenté conviendra qu'il est absolument impossible de se méprendre d'autant dans le jugement de l'égalité de deux distances juxtaposées et d'égale nature. Par ces considérations, je ne puis chercher l'origine de la différence ailleurs, que dans la méthode d'observation des astronomes de Cambridge U. S., sur laquelle il nous manque jusqu'à présent toute communication détaillée. Il faut cependant convenir qu'ils ont eu 17°23′ de différence de latitude ou de l'élévation de l'astre sur l'horizon, en faveur de leurs observations, ce qui leur a permis d'employer plusieurs fois des grossissements de 1200 et même de 1500 fois; mais d'un côté, un grossissement si fort n'est guère un avantage réel dans la mesure d'une distance de 16″, d'un autre côté, il paraît que, malgré ce grossissement énorme, MM. Bond n'ont pas vu la planète plus distinctement que nous, puisqu'ils nous informent (*Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*) que ce n'est que dans des circonstances atmosphériques favorables qu'ils en ont reconnu le disque circulaire. La supposition, que la différence constante soit provenue de la méthode d'observation des astronomes de l'Amérique, gagne encore un appui dans la circonstance que les observations de MM. Bond, père et fils, diffèrent entre elles considérablement et presque sans exception dans le même sens. En prenant les différences des distances mesurées les mêmes nuits, par ces deux astronomes, nous trouvons, en moyenne de 7 observations, $B^2 = B' + 0''{,}63$. Or la masse de Neptune, déduite des seules observations de B^2 serait plus grande que celle qui suit des observations de B', de très près en proportion de 8 à 7. J'ose donc exprimer ici le désir que MM. Bond publiassent le plus tôt possible les détails de leurs observations.

Il existe encore une troisième série d'observations faites sur le satellite de Neptune, celle de M. Lassell; mais une inspection superficielle des distances mesurées suffit pour montrer qu'elles ne possèdent pas ce degré d'exactitude, qui est nécessaire pour pouvoir concourir avec succès dans la détermination de la masse de la planète. A ce qu'il me paraît, le manque d'accord dans ces mesures a son origine dans une

construction défectueuse du micromètre employé. Mais M. Lassell possède aussi un micromètre filaire de Munich, et lors d'une visite que je lui ai rendue cette année à Starfield, il m'a indiqué son intention d'employer dorénavant ce nouveau micromètre plus parfait aux mesures du satellite. Il y a donc lieu d'espérer que, l'année prochaine, nous posséderons déjà une nouvelle détermination de la masse de Neptune, de la part de l'astronome distingué à qui nous sommes redevables de la découverte du satellite.

Poulkova, en octobre 1850.

Otto Struve.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. IX. No.* 8 et 9.)

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

TIRÉS DU

BULLETIN PHYSICO-MATHÉMATIQUE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

Tome I.

3^e^ LIVRAISON.

Avec deux planches.

(Prix: 55 Cop. arg. — 18 Ngr.)

St.-Pétersbourg,

de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.

1851.

Se vend chez MM. *Eggers* et *Comp.* libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky, No. $^1/_{10}$, et à Leipzic, chez M. *Léopold Voss.*

CONTENU.

Page.

W. Struve. H. C. Schumacher. Biographische Skizze. 215

D. G. Lindhagen. Bericht an den Herrn Director der Hauptsternwarte, über die im Sommer 1850 ausgeführte Expedition nach dem Norwegischen Finnmarken. 225

P. H. Fuss. Supplément à notre rapport relatif à la succession littéraire de Léonard Euler. 258

Dr. Clausen. Ueber den Werth des Kettenbruchs

$$\cfrac{a+b}{a+1+\cfrac{b+1}{a+2+\cfrac{b+2}{a+3+\text{etc.}}}}$$

wenn b grösser als $a+1$ ist. 271

Le même. Ueber die Form architektonischer Säulen. 279

Otto Struve. Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 28 (16) Juli 1851 in Lomsa. (Mit zwei Tafeln in Steindruck). .. 295

M. Ostrogradsky. Note sur le traité de trigonométrie à l'usage des écoles militaires. 309

Dr. Clausen. Ueber den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben. 313

28 März / 9 April 1851.

H. C. SCHUMACHER. Biographische Skizze von W. STRUVE.

Wenn ein Mann dahingeschieden ist, der wesentlich und bedeutsam auf den Gang und die Entwickelung der Wissenschaft, für welche er lebte, eingewirkt hatte: so ist es natürlich, dass vorzüglich die, welche nicht das Glück hatten mit ihm in engerer Verbindung zu stehen, ihn nicht persönlich kannten, den Wunsch hegen, von seinem Leben, besonders von seinem Bildungsgange nähere Kunde zu erhalten: weil ja in solcher Kunde sich oft erst der Schlüssel seines späteren Wirkens darbietet.

In dieser Hinsicht möchte es als eine Pflicht derer erscheinen, die ihm näher standen, von seinen Lebensverhältnissen dasjenige zu verzeichnen, was einem jeden genauer bekannt war, und auf diese Weise einen Beitrag zu einer künftigen würdigen Lebensbeschreibung zu liefern. Diese Betrachtung veranlasste mich die folgende Notiz niederzuschreiben, als ich vor kurzem von Herrn Airy, als Präsidenten der königlichen astronomischen Gesellschaft in London, aufgefordert wurde einige Mittheilungen aus Schumacher's Leben zu machen, damit er sie zu dem Denkvortrage verwenden könne, den er in der Gesellschaft, nach ehrenwerther Sitte, zu halten ver-

Bunden sei. Weit entfernt die nachfolgenden Zeilen für etwas anderes als eben für einen Beitrag ausgeben zu wollen, würde es mich freuen, wenn sie dahin wirken sollten, andere, die Schumachern noch näher standen, zu einer vollständigen Lebensbeschreibung des seltenen Mannes zu veranlassen, in welcher neben seinen äusseren Verhältnissen auch seine ganze so umfangsreiche, ja in vieler Rücksicht in ihrer Art einzig dastehende Wirksamkeit erörtert würde.

Ich übergebe daher diese Zeilen der Oeffentlichkeit, als einen schwachen Beweis meiner innigen Verehrung gegen einen vieljährigen unvergesslichen Freund, von dem ich so oft Belehrung und bei wichtigen Unternehmungen Anregung und Ermuthigung erhalten habe.

Heinrich Christian Schumacher war geboren zu Bramsted, einem Flecken in Holstein, am 3ten September 1780. Sein Vater war Amtmann zu Bramsted, nachdem er früher in einer Anstellung am Hofe in Kopenhagen, als Sekretair des Königs Christian des VII fungirt hatte. Er verstarb als Amtmann zu Segeberg, und seine Wittwe, die Conferenzräthin Schumacher, lebte von einer königlichen Pension in Altona, welchen Ort sie, als für die Erziehung ihrer beiden Söhne vorzüglich geeignet gewählt hatte. (Der jüngere Sohn starb als Adjutant des Königs Frederik VI.)

Unser Schumacher erhielt seine erste wissenschaftliche Bildung auf dem Gymnasio academico zu Altona, einer Anstalt, die damals unter dem Direktor J. Struve, dem Vater des Schreibers dieser Zeilen, stand, und namentlich eine treffliche classische Bildung gewährte. Dagegen war der mathematische Unterricht auf derselben mangelhaft, nicht weil er vernachlässigt wurde, sondern weil er sich in Händen eines schwachen Lehrers befand. Dies veranlasste den Direktor Struve, der neben seiner Philologie und Theologie die Mathematik mit Vorliebe trieb, während einer Reihe von Jahren, bis der mathematische Unterricht in gute Hände kam, den talentvolleren Zöglingen des Gymnasiums einen Unterricht in der Mathematik zu geben, der nach den Kegelschnitten mit den Anfangsgründen der *Analysis infinitorum* schloss. An diesem Unterrichte hatte unser Schumacher Theil, und erhielt als

der beste Schüler seines Coetus durch denselben die Grundlage seiner mathematischen Ausbildung.

Nach Vollendung des Gymnasialcursus ging Schumacher 1799 zur Landesuniversität Kiel, und widmete sich hier der Jurisprudenz. Das Jahr 1801 brachte er auf der Universität Göttingen zu; aber schon anfangs 1802 kehrte er nach Kiel zurück, wo er bis 1804 seine juridischen Studien mit grösstem Erfolge fortsetzte. 1806 wurde er auf eine der Universität Göttingen eingesandte Dissertation:

Dispunctionum juridicarum specimen. Dorpati 1805,

von dieser *in absentia* zum *Doctor utriusque juris* ernannt.

Auf der Universität Kiel fand Schumacher schwerlich Gelegenheit seine mathematischen Studien weiter zu verfolgen. Dagegen trieb er neben der Jurisprudenz Sprachstudien in grossem Umfange. Horaz war sein Lieblingsschriftsteller unter den Alten, und mit besonderer Zufriedenheit erwähnte er oft späterhin, dass er, wenn Horaz verloren ginge, im Stande sei ihn aus dem Gedächtniss vollständig niederzuschreiben. Zwei Abhandlungen Schumacher's:

De latitudine speculae Manheimiensis. Havniae 1816. 4°,

De latitudine speculae Havniensis. Altonae 1827. 4°,

sind wohl die einzigen Schriften, die Schumacher, ausser der juridischen Doctordissertation, in Lateinischer Sprache herausgegeben hat; sie beurkunden aber durch Klarheit und Correctheit eine seltene Meisterschaft in dieser Sprache.

Ueberdiess hatte Schumacher eine ungewöhnliche Kenntniss neuerer Sprachen sich erworben. Er schrieb, ausser seiner Deutschen Muttersprache, Dänisch, Französisch und Englisch mit einer Correctheit wie gewiss wenig Ausländer, und kannte das Italienische vollkommen.

Im Jahre 1802 hatte der Kaiser Alexander die Universität Dorpat errichtet und im Jahre 1804 wurde zu Dorpat das Gymnasium eröffnet. Der erste Oberlehrer der griechischen Sprache an dieser Anstalt war Dr. Carl Struve, mein älterer Bruder, der bis dahin Erzieher in einer adeligen Familie in Livland gewesen war. Mein Bruder wandte sich an Schumacher, seinen Schul- und Universitätscameraden, und forderte ihn auf, sein Nachfolger als Erzieher in der v. Mei-

ners'schen Familie auf dem Landgute Fölks, 70 Werst von Dorpat zu werden. Schumacher nahm diesen Antrag an und kam im Spätherbst 1804 nach Livland (am 9. November 1804 ging er zur See von Lübeck nach Riga ab). Hier scheint Schumacher sich wieder den mathematischen Studien zugewandt zu haben. Er fing nämlich seine deutsche Uebersetzung von Carnot's Géométrie de Position hier an, *ad recreationem animi*, wie er in der 1808 geschriebenen Vorrede sagt. Das Werk selbst, mit Zusätzen von Gauss, erschien Altona 1810. 2 Bände 8°.

Den Winter brachte die v. Meiners'sche Familie gewöhnlich in Dorpat zu, und so ist Schumacher wahrscheinlich den Winter 1805 auf 1806, und gewiss den Winter 1806 auf 1807 in Dorpat gewesen. Hier kam er in Berührung mit dem damaligen Professor der Mathematik und Astronomie J. W. Pfaff, einem Manne, der den höchsten Enthusiasmus für seine Wissenschaft hegte. Pfaff gab damals astronomische Beiträge Heft I und II, Dorpat 1806 und Heft III, ibid. 1807 heraus. Wir finden hier, Heft II Pag. 38, Schumacher zuerst als astronomischen Rechner erwähnt, der Sonnenörter aus Zachs Tafeln abgeleitet hatte. Im Heft III tritt Schumacher als astronomischer Schriftsteller mit einer Erklärung einer Stelle des Hyginus auf; dann als Beobachter durch die Bestimmung der Breite Dorpats aus Sextanten-Beobachtungen vom 27 März bis 8 April 1807, und mit einigen von ihm beobachteten Sternbedeckungen. So viel ist gewiss, Schumacher wurde in Dorpat für die Astronomie gewonnen. Dort auch fasste Schumacher den Entschluss nach Paris zu Lalande zu gehen. Er hatte sich mit Lalande in Correspondenz gesetzt, und dieser hatte ihm zustimmend geantwortet. Der Plan kam aber nicht zur Ausführung, da Lalande 1807 im April starb. Schumacher verliess indess im Sommer 1807 Livland und kehrte nach Holstein zurück, wo er im August eintraf und ich ihn im Hause meines Vaters wieder gesehen habe.

Die Dänische Regierung hatte ein bedeutendes Reisestipendium zu vergeben, für junge viel versprechende Gelehrte bestimmt. Es betrug, wie ich glaube, 250 Ducaten jährlich. Dies

ward Schumachern zu Theil. Er begab sich hierauf 1809 nach Göttingen, um bei Gauss zu arbeiten. Hier lernte er Olbers kennen. Im Herbst 1810 ward er als Professor extraordinarius in Kopenhagen angestellt, erhielt aber Urlaub bis zum Herbste 1811, um eine auf Repsold's Privatsternwarte in Hamburg angefangene astronomische Arbeit zu vollenden. Von dieser Arbeit ist nichts näheres bekannt geworden. — Im Herbst 1813 wurde er nach Barry's Tode, nach Manheim berufen, als Astronom der dasigen Sternwarte. Diese Stelle nahm er mit Zustimmung der Dänischen Regierung an, unter der Bedingung nach Kopenhagen zurückzukehren, wenn er dahin gefordert würde. Dies geschah, als der alte Bugge, Professor der Astronomie in Kopenhagen, gestorben war. Schumacher, zu dessen Nachfolger ernannt, verliess Manheim im Herbst 1815. Im Sommer 1815 habe ich ihn noch in Manheim besucht und einige Tage mit ihm gearbeitet und beobachtet. Schumacher war damals verheirathet, seine Familie aber schon nach Altona abgereist.

Mit der Rückkehr aus Manheim beginnt die bedeutendere wissenschaftliche Thätigkeit Schumacher's. Bis dahin war nichts astronomisches von ihm veröffentlicht worden, ausser den oben erwähnten Aufsätzen in Pfaff's Beiträgen, und einer kurzen Abhandlung über eine astronomische Aufgabe in Zach's *monatlicher Correspondenz* (Band XXI, p. 21. 1810). Diese Thätigkeit wurde ganz besonders dadurch gefördert, dass er dem Könige Frederik VI., der eine grosse Vorliebe für Astronomie und Geodäsie hegte, näher persönlich bekannt wurde, und dieser Monarch eine besondere Zuneigung und Hochachtung für Schumacher fasste, die bis zu des Königs Tode fortwährte, und Schumacher die vielen Hülfsmittel gewährte, mit denen er von nun an zum besten der Wissenschaft wirken konnte. Derselben Zuneigung erfreute sich Schumacher späterhin von Seiten des Königs Christian VIII.

Wahrscheinlich wurde Schumacher gleich nach seiner Berufung nach Copenhagen zum Chef einer neu zu unternehmenden trigonometrischen und topographischen Aufnahme der Dänischen Staaten ernannt, mit welcher eine Gradmessung verbunden werden sollte; und dies war die Veranlassung, da

zunächst die Herzogthümer und Jütland aufgenommen werden sollten, dass Schumacher sich in Altona niederliess, wo der König ein Haus zu seiner Wohnung ankaufte, in dessen Garten Schumacher eine zwar kleine, aber trefflich ausgerüstete Sternwarte anlegte, und zugleich in einem grossen Nebengebäude Raum hatte, alle geodätischen u. s. w. Apparate aufzustellen. — Wir finden Schumacher 1816 im Juni in München bei Reichenbach, um dort das erste für die Dänische Gradmessung bestimmte Instrument, einen Theodoliten, in Empfang zu nehmen. 1819 im Sommer machte er die Polhöhenbestimmung von Lauenburg mit dem Ramsdenschen Zenithsector, der von der Englischen Regierung der Dänischen zum Gebrauch bei der Gradmessung überlassen war. Hier besuchten ihn Olbers und Bessel, und, wenn ich nicht irre, datirt von der Zeit die persönliche Bekanntschaft mit Bessel, aus der eine sehr enge freundschaftliche Verbindung bis an des grossen Bessels Tode hervorging. Schumacher besuchte Bessel in Königsberg im Jahre 1828, und späterhin war Bessel wohl jedesmal, wenn er aus Preussen auf einige Zeit nach dem westlichen Deutschland reiste bei Schumacher zum Besuche.

Bei seinen geodätischen und astronomischen Arbeiten war ihm der ausgezeichnete Hamburger Künstler Repsold, der Vater, von grossem Nutzen. Schumacher und Repsold waren Busenfreunde. Von Repsold wurde der treffliche Apparat zur Basismessung bei Braack in Holstein construirt, den Schumacher in einem Schreiben an Olbers 1821 bekannt machte. Die Basismessung selbst begann 1820, und zwar waren, ausser mehreren Dänischen Officieren und Gehülfen, worunter sich Hansen befand, Gauss, W. Struve und andere Zeugen und Theilnehmer an dieser Operation, die aber erst 1821 geendigt ward.

Damals 1820 war Schumacher schon in dem Hause ansässig, welches der König für ihn erstanden hatte. Wann er es aber bezogen hatte, zwischen 1816 und 1820, weiss ich nicht. Die eigentliche Sternwarte existirte 1820 noch nicht, sondern wurde erst 1823 eingerichtet, durch Aufstellung des Meridiankreises von Reichenbach, an dem die erste

Beobachtung vom 18. September 1823 ist. (*A. N.* Vol. II, p. 241.)

Im Jahre 1821 begann Schumacher die Herausgabe der *Astronomischen Nachrichten* und der Sammlung *Astronomischer Abhandlungen*.

Von Altona, seinem bleibenden Wohnsitze bis zu seinem Tode, machte Schumacher in der Regel jährlich eine Reise nach Kopenhagen in Geschäften der Vermessung, seiner Sternwarte und um sich seinem königlichen Beschützer vorzustellen. Von anderen wissenschaftlichen Reisen sind mir folgende bekannt.

1. Im Jahre 1819 besuchte Schumacher England in Geschäften seiner Vermessung. Wenn ich nicht irre, holte er damals den Zenithsektor ab mit dem er selbst in Lauenburg 1849, und mit dem Gauss 1827 in Altona und Göttingen beobachtete.

2. Schumacher war 1826 zum zweiten Male in München (*A. N.* Band V. p. 209.)

3. Reise nach Pulkowa 1840, um die dasige Sternwarte kennen zu lernen. (*A. N.* Bd. XVIII, p. 33.)

4. Reise nach Wien im Sommer 1842, wo er die totale Sonnenfinsterniss beobachtete. Diess ist seine letzte wissenschaftliche Reise gewesen.

Schumacher war seit 1813 verheirathet mit einem in Altona gebornen Fräulein von Schon. Aus dieser Ehe hatte er 3 Söhne und 3 Töchter. Von den letzteren ist eine in Hamburg an einen Rechtsgelehrten de Drusina verheirathet, und durch sie war Schumacher Grossvater. Der älteste Sohn, Heinrich, der Jurisprudenz studirt hatte, starb als Beamter in den Dänischen Besitzungen von Guinea. Der zweite Johannes ist Architekt, jetzt in Gotha. Der dritte Sohn Richard, jetzt 21 Jahr alt, hat sich unter der unmittelbaren Leitung des Vaters, der Astronomie gewidmet. Die Leser der Astronomischen Nachrichten kennen ihn schon als einen der Mitarbeiter auf der Altonaer Sternwarte und trefflichen Beobachter und Rechner. Seit einigen Monaten befindet er sich in Königsberg, um unter der Leitung des Professor Peters und anderer dasiger Gelehrten seine Studien zu vollenden.

Nach einer zwischen Schumacher und W. Struve seit mehreren Jahren getroffenen Abmachung, wird Richard Schumacher, wenn er Königsberg verlässt, auf einige Zeit nach Pulkowa kommen.

In einem freundlichen Familienkreise, bestehend aus einer trefflichen Gattin, seinen Töchtern und seinen Söhnen, (zu welchem Kreise noch die Wittwe seines ältesten Sohnes, und sein geistreicher Schwager, H. von Schon gehörten), von denen der jüngste durch die Hoffnungen, die er erweckte, die grösste Freude des Vaters war; hochgeehrt von den ausgezeichnetsten Männern Altonas und des benachbarten Hamburgs; jüngeren durch ihn nach Altona hingezogenen Gelehrten Anweisung und Gelegenheit zu wissenschaftlicher Thätigkeit gebend; häufig aufgesucht von Männern der Wissenschaft, die sich bei ihm in wichtigen Unternehmungen Raths erholen wollten; in litterärischer Correspondenz mit fast allen Astronomen aller Welttheile, führte Schumacher ein glückliches und heiteres Leben. Sein Haus nahm gerne die näher mit ihm verbundenen Freunde auf, und dankbar werden mehrere, so wie der Schreiber dieser Zeilen, sich der frohen Tage erinnern, die sie unter Schumacher's gastlichem Dache zugebracht haben.

Die drei letzten Jahre seines Lebens wurden ihm durch die politischen Wirren seines Vaterlandes getrübt, die ihm, dem treuen Anhänger des Königshauses, dem die Astronomie seit Tycho so viel verdankt, besonders zu Herzen gingen. Die Existenz der Altonaer Sternwarte, der Fortgang der Astronomischen Nachrichten, waren gefährdet.

In dieser peinlichen Lage gewährte die Theilnahme, welche alle Astronomen der Altonaer Sternwarte und ihrem hochgeehrten Vorstand widmeten, indem sie ihre Stimme für die Erhaltung derselben erhoben, und Veranlassung wurden, dass auch namhafte Staatsmänner des Auslandes derselben ihre Aufmerksamkeit schenkten, Schumachern einen grossen Trost und Ermuthigung, und in den schwersten Momenten unterstützte ihn sein vieljähriger treuer Freund Herr Richard Parish in Hamburg mit Rath und That.

Schumacher war von schwächlichem Körperbau. Als ich

1815 bei ihm in Manheim war, traf ich ihn kränkelnd. Seine schwache Gesundheit suchte er durch Entsagungen und Regelmässigkeit zu stärken. Diese seine Kränklichkeit blieb zwar während der übrigen Lebenszeit, aber nicht zunehmend, sondern sich vielmehr so mindernd, dass Schumacher in späteren Jahren am geselligen Leben weit mehr Theil nehmen konnte als in früheren. Merkwürdig dass er sich zur See immer sehr wohl fühlte, und auch bösem Wetter wie ein Seemann trotzte.

Nach einer Krankheit von wenig Wochen starb Schumacher am 28. December 1850, in einem Alter von 70 Jahren und 3 Monaten.

Schumacher liebte im höchsten Grade, dass alles, was ihn umgab, ordentlich, zierlich sei, nicht prunkvoll. Im Umgange heischte er die grösste Decenz, wohl wissend aus seinen vielseitigen Erfahrungen, dass diese manchen Fehlgriff verhindert. Dem Fremden, der ihn zum ersten Male sah, erschien er daher nicht selten ceremoniel. Doch dieser Eindruck verschwand bei näherer Bekanntschaft, und seine Freunde kannten in Schumacher nur den gemüthlichen, geistreichen Gesellschafter.

Seine besondere Liebhaberei war das Schachspiel; doch spielte er selbst nur selten. Er zog es vielmehr vor, Zuschauer und Beurtheiler einer zwischen geschickten Spielern geführten Partie zu sein, und schwierige Probleme dieses Spiels zu prüfen. Auch führte er eine ausgebreitete Correspondenz mit ausgezeichneten Schachspielern fremder Länder, und studirte die meisten über dieses Spiel erschienenen Schriften mit Sorgfalt und Genuss.

Schumacher ward nach und nach Midglied und Correspondent fast aller namhaften Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften. Ihr Verzeichniss findet sich vollständig auf dem Titel des 30sten B. der Astron. Nachrichten, der 1850 im Juni geschlossen wurde. Die Königliche astronomische Gesellschaft in London ertheilte ihm überdies im Jahre 1829 ihre goldene Medaille, als Anerkennung seiner Verdienste um die Astronomie durch Herausgabe der Astron. Nachrichten und vieler Hülfstafeln. Vielfach erhielt er Aus-

zeichnungen von erleuchteten Fürsten, wie derselbe Titel belegt. Wie hoch ihn der König von Dännemark Christian VIII. ehrte, ergiebt sich daraus, dass dieser ihm das Grosskreuz des Dannebrogordens verlieh, eine Auszeichnung, die seit Tycho's Zeiten bis auf Schumacher und Oersted keinem Dänischen Gelehrten geworden war.

Pulkova, im Januar 1851.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém.* T. IX. No. 17.)

31 Januar
12 Februar 1851.

Bericht an den Herrn Director der Hauptsternwarte, über die im Sommer 1850 ausgeführte Expedition nach dem Norwegischen Finnmarken; von D. G. LINDHAGEN.

Der Zweck dieser Expedition war, die im Norwegischen Finnmarken angefangenen Gradmessungs-Operationen zur Vollendung zu bringen. Um nämlich die Dreiecke Russischer und Schwedischer Messung bis zur nördlichsten Spitze Europas fortzuführen, war in den Sommern 1845, 1846 und 1847, durch den Norwegischen Herrn Premier-Lieutenant Klouman, von den nördlichsten Endpunkten der Schwedischen Gradmessung aus bis nach Fuglenaes in der Nähe von Hammerfest, ein Dreiecksnetz ausgesteckt und die Winkel dieser Dreiecke gemessen worden. Dass diese Operationen mit nicht gewöhnlichen Schwierigkeiten verbunden gewesen sind, leuchtet von selbst jedem ein, dem die Natur der dortigen Gegenden etwas näher bekannt ist. Nichts desto weniger haben Sie selbst, nach einer genauen Durchsicht der Ihnen vorgelegten, hierzu gehörigen Tagebücher erklärt, dass die geschehene Wahl der Dreiecke eine glückliche gewesen ist, und dass die Winkelmessungen eine im Verhältniss zu den

obwaltenden Umständen befriedigende Genauigkeit besitzen. Es handelte sich nunmehr darum, erstlich die Länge einer der Dreiecksseiten durch Messung einer Basis und die dazu gehörigen Verbindungsoperationen zu bestimmen, zweitens die geographische Breite des nördlichsten Endpunktes, und drittens das Azimuth einer an diesem Punkte sich endigenden Dreiecksseite durch astronomische Beobachtungen auszumitteln. Ein Schriftwechsel über diesen Gegenstand zwischen Ihnen und dem Director der Norwegischen Vermessungen, Herrn Professor und Commandeur Hansteen, hatte zur Folge, dass die im Sommer 1850 vorzunehmende Ausführung dieser rückstehenden Arbeiten durch eine Königliche Resolution vom 27 December 1849 dem Herrn Lieutenant Klouman und mir anvertraut wurde, und dass die Direction der Norwegischen Vermessungen durch ein officielles Schreiben vom 15. Februar 1850 Sie ersuchte, von der Hauptsternwarte aus die Expedition mit den nöthigen Instrumenten und Apparaten auszurüsten. Schon im Herbst 1849 war ich von der Hauptsternwarte nach Christiania delegirt worden, um mit dem Herrn Professor Hansteen und den Norwegischen Geodäten mich über die Anordnung einer Expedition für die angegebenen Zwecke zu berathen. Die Ergebnisse dieser Reise sind Ihnen in einem besonderen Bericht vorgelegt. In Folge der bei dieser Gelegenheit gepflogenen Berathungen ward im nächstvergangenen Frühjahr Lieutenant Klouman von der Norwegischen Regierung hieher gesandt, um die für die Expedition von Ihnen bestimmten Instrumente und Apparate in Empfang zu nehmen, und um in Bezug auf die Behandlung derselben gemeinschaftlich mit mir von Ihnen die nöthigen Instructionen zu erhalten.

Während Lieutenant Kloumans Anwesenheit hieselbst ward unter Ihren Augen auf dem Gebiete der Hauptsternwarte eine kleine Basis von uns gemeinschaftlich gemessen, wodurch wir mit dem dabei angewandten und in Norwegen anzuwendenden Apparate und seiner Behandlung vertraut wurden, und nun im Stande waren auf eigene Hand eine ähnliche Operation auszuführen. Dieser Apparat mit einem dazu gehörigen Maassvergleicher war im vergangenen Win-

ter unter Ihrer Leitung von dem Mechaniker der Hauptsternwarte, Herrn Brauer, neu verfertigt, im Ganzen wohl nach der Idee des früheren bei der Russischen Gradmessung angewandten Apparats, aber im einzelnen doch mit nicht unwesentlichen Verbesserungen, welche sowohl eine gesteigerte Genauigkeit der Messungen als eine grössere Bequemlichkeit in der Anwendung bezweckten. — Vor seinem Gebrauche bei der erwähnten hier ausgeführten Probemessung ward derselbe von Ihnen selbst in unserer Anwesenheit genau untersucht und geprüft, so wie auch von Ihnen selbst die zu diesem Apparate gehörige Normalstange mit der auf der Hauptsternwarte aufbewahrten Normalstange der ganzen Russischen Gradmessung verglichen. — Zu dem Apparate gehören 19 Thermometer, welche alle von Lieutenant Klouman und mir, nach einer von Ihnen angegebenen Verfahrungsweise, in Bezug sowohl auf den Gefrierpunkt als auf einige andere zwischen 0° und 30° liegende Punkte geprüft wurden:

Die übrigen in Pulkowa getroffenen Vorbereitungen zu der Expedition bestanden in einer genauen Untersuchung der anzuwendenden astronomischen Instrumente. Diese Instrumente waren folgende

1. *Ein tragbarer Meridiankreis von* Repsold, welcher dazu bestimmt war, durch beobachtete Circummeridianzenithdistanzen geeigneter Sterne die Polhöhe des Beobachtungsortes zu geben. An diesem Instrumente wurden erhebliche Verbesserungen ausgeführt. Die beträchtliche Schwere des oberen beweglichen Theils des Instruments liess an der Berührungsfläche mit dem unbeweglichen unteren Theile eine so starke Reibung entstehen, dass die azimutale Bewegung nur mit Schwierigkeit auszuführen war. Diesem Uebelstande ward durch eine hebende Feder abgeholfen. Eine sorgfältige Untersuchung zeigte, dass die ursprünglichen Mikroscopschrauben erhebliche Unregelmässigkeiten hatten; es wurden deshalb diese verworfen und neue vollkommnere in der mechanischen Anstalt der Hauptsternwarte angefertigt. Nach der Idee der grossen Meridianinstrumente der Sternwarte wurden Objectiv und Ocular zum Umstecken eingerichtet, um

dadurch eine durch die Schwere verursachte Durchbiegung des Fernrohrs aus den Beobachtungen näherungsweise eliminiren zu können. — Bei einer Oeffnung des Objectivs von 2,1 Zoll war ein Ocular von 50-maliger Vergrösserung angewandt. Es war wahrscheinlich, dass dies Objectiv eine stärkere Vergrösserung vertragen könnte, ohne dass die Lichtstärke des Fernrohrs dadurch zum Nachtheil geschwächt würde. Desshalb wurde ein neues Ocular von 80-maliger Vergrösserung verfertigt, welches indess späterhin nicht benutzt worden ist, weil es ein nicht so präcises Bild gab als das ursprüngliche Ocular. — Schliesslich wurden von mir die Theilungsfehler des Kreises und die Biegungscoefficienten in den beiden Lagen des Objectivs und Oculars ausgemittelt, ersteres durch mikroscopische Ablesungen, letzteres durch Beobachtung der Amplitude zwischen aufeinander gerichteten Fernröhren.

2. *Ein tragbares Passageninstrument von* Brauer, an welchem, durch Beobachtungen von Zenithsternen in ihren Durchgängen durch den ersten Vertikal, Polhöhenbestimmungen gemacht werden sollten. Dies Instrument war kurze Zeit vor dem Abgange der Expedition neu aus der mechanischen Werkstätte der Hauptsternwarte hervorgegangen. Es ist mit einem ebenso sinnreich ausgedachten wie vortrefflich ausgeführten Mechanismus versehen, durch welchen das Fernrohr mit der grössten Leichtigkeit in hinreichend kurzer Zeit umgelegt werden kann, um einen und denselben Durchgang eines Sterns in den beiden Lagen beobachten zu können. Eine kleine Beobachtungsreihe von υ Ursae maj., welche ich im Frühjahr zum Versuch hier anstellte, und vor meiner Abreise Ihnen vorlegte, hatte die befriedigendsten Resultate gegeben.

3. *Ein Universalinstrument von* Ertel, zu Zeit- und Azimut-Bestimmungen. Auch dies Instrument ward in der mechanischen Werkstätte durchgesehen, gereinigt und verbessert.

Ausserdem ward die Expedition von hier aus mit folgenden Hülfsmitteln ausgerüstet:

a) zwei nach Sternzeit regulirte *Chronometer*, Kessels 1297 und Dent 1942;
b) zwei *Barometer* von Brauer neu angefertigt, welche vor der Abreise mit dem hiesigen Fortinschen Barometer, und später auf der Sternwarte in Christiania mit dem dortigen, Pistor No. 103, verglichen wurden;
c) ein *Niveauprüfer* von Brauer;
d) eine kleine Sammlung von mechanischen *Werkzeugen* und *Materialien*;
e) *Reserveniveaus*, *Lampen* und andere *Utensilien*.

Hierzu kam von Christiania aus:

f) 18 hölzerne *Böcke* zum Basisapparat und zum Comparateur;
g) ein kleineres *Universalinstrument* von Repsold;
h) ein Gaussisches *Heliotrop* von Meyerstein;
i) ein nach mittlerer Zeit gehender *Chronometer*, Dent 2103;
k) eine *Boussole* mit Stativ;
l) ein *Barometer*;
m) *Messband* und *Messkette*.

So ausgerüstet trat die Expedition, aus drei Personen bestehend, dem Herrn Premier-Lieutenant Klouman, mir und dem Mechanikergehülfen Herrn Lysander, wozu später von Christiania aus ein als Diener engagirter Soldat kam, ihre Reise am 21 Mai n. St. von Pulkowa aus an. Am Abend desselben Tages schifften wir uns in Kronstadt auf dem nach Kopenhagen bestimmten Englischen Dampfschiff *Neptun* ein, und langten nach einer 84-stündigen Reise den 25sten früh des Morgens in Kopenhagen an. Kurz nach unserer Ankunft lief auch das von Christiania kommende Norwegische Postdampfschiff *Nordcap* in den Hafen ein. Auf diesem letztgenannten fanden wir alles zu unserem Empfang vorbereitet, wie es auch später auf den längs den Norwegischen Küsten gehenden Postdampfschiffen der Fall war, indem vom Königl. Norwegischen Ministerium des Innern den Dampfschiffscapitainen der Befehl zugegangen war, die Expedition nebst allen ihren Sachen mit der ersten nach der Meldung stattfindenden Gelegenheit jedes Mal zu befördern. Ohne weiteres konnten wir daher hier alle unsere Apparate u. s. w. un-

mittelbar von dem einen Dampfschiffe auf das andere hinüberbringen. Umständlicher ward es die Instrumente von einer geforderten nicht unbedeutenden Sundzollabgabe zu befreien, was indes durch die Vermittelung der Norwegisch-Schwedischen Gesandtschaft in Kopenhagen zuletzt gelang. Am folgenden Tage, den 26sten Mai, verliessen wir Kopenhagen, und langten den 28sten in Christiania an. Mit derselben Umsicht, wie gewöhnlich, war auch hier im voraus dafür gesorgt, dass die Kasten der Instrumente unmittelbar, ohne Untersuchung von der Zollbehörde, in ein ausersehenes passendes Local gebracht werden konnten.

In Christiania brachten wir 13 Tage zu, während welcher Zeit die nöthigen oekonomischen Vorkehrungen für die weitere Reise getroffen wurden. Ausserdem benutzte ich diese Zeit um die mitgebrachten Chronometer und Barometer mit denen der Christianiaer Sternwarte zu vergleichen. — Auf den Wunsch des Herrn Professor Hansteen wurden an einem Tage die Kasten der Instrumente geöffnet, und diese von ihm und anderen sachverständigen Personen besehen; wobei besonders der Basisapparat und das neue Passageninstrument sich die allgemeine Aufmerksamkeit zuzogen. — Späterhin stellte Herr Professor Hansteen uns dem Minister des Innern, Herrn Staatsrath Stang, vor, unter dessen Ministerium die Vermessungen des Landes, und somit auch die hier in Frage stehenden Operationen der Gradmessung stehen. Wie Herr Professor Hansteen mir mehr als ein Mal erklärt hat, verdankt er es zum grossen Theil dem persönlichen Interesse des Herrn Ministers an der Beförderung der Wissenschaften im Allgemeinen, und ganz besonders an dem grossartigen Unternehmen, wovon die Norwegische Gradmessung einen wesentlichen Theil ausmacht, dass es ihm gelungen sei, alle auf diese Gradmessung bezügliche Maassregeln mit derjenigen Raschheit und Liberalität zu betreiben, welche Sie bei mehreren Gelegenheiten dankbar anerkannt haben. Ich nahm mir deswegen jetzt die Freiheit, dem Herrn Minister in Ihrem Namen für seine Förderung der Gradmessung mündlich zu danken.

Herr Lieutenant Klouman sah sich durch Familienange-

legenheiten genöthigt, einen Theil der Reise gegen Norden zu Lande zu machen, und verliess Christiania den 8ten Juni. Wir übrigen schifften uns mit dem ganzen Gepäck am 10ten auf dem Postdampfschiff »*Prinds Carl*« ein, und erreichten am 16ten Aalesund, wo das Dampfschiff gewechselt wurde. Mit dem neuen Dampfschiffe »*Prinds Gustav*« trafen wir am folgenden Tage in Drontheim ein und fanden hier Lieutenant Klouman schon vor. Von jetzt an vollzählig, setzte die Expedition ihre Reise fort nach *Bosekop* am Altenfjord, wo wir am 23sten Juni ankamen. In der Umgegend dieses Ortes sollte die Basismessung ausgeführt werden. Es ward desswegen der Basisapparat mit seinem Zubehör, begleitet von Herrn Lysander und dem Diener, ans Land gesetzt, während Lieutenant Klouman und ich mit den astronomischen Instrumenten auf dem Dampfschiff weiter bis nach *Hammerfest* reisten. Hier waren die Anstalten zu treffen, dass auf dem benachbarten *Fuglenaes* ein hölzernes Gebäude für die astronomischen Beobachtungen errichtet würde, während der Zeit dass wir die Basisbestimmung bei Bosekop ausführten. Diesen Zweck unseres Besuchs in Hammerfest erreichten wir auch dadurch vollkommen, dass ein Contract mit einem Tischler abgeschlossen ward, durch welchen er sich verpflichtete, nach drei Wochen das fragliche Gebäude fertig zu stellen, genau nach einer ihm übergebenen Zeichnung und nach den sonstigen besonders stipulirten Bedingungen construirt. Die mitgebrachten Instramente wurden bei einem auf Fuglenaes wohnenden Kaufmann deponirt. Nach so verrichteter Sache kehrten wir mit derselben Dampfschiffgelegenheit nach Alten zurück; und mit der Rückkunft nach Bosekop am 27sten Juni war die 17-tägige fast ununterbrochene Seereise von Christiania aus beendigt. Der Eindruck, den diese Reise nachgelassen hat, ist in der That nicht der behaglichste. Bekanntlich ist die Westküste von Norwegen mit ihrem, der ganzen Länge nach fast ununterbrochenen Archipelag nicht weniger häslich und einförmig, als das Innere von Norwegen schön und abwechselnd ist. Dieser Umstand musste schon die so lange dauernde Seereise etwas ermüdend machen; hierzu kam nun noch ein

über alle Massen schlechtes und stürmisches Wetter mit seinen für noch nicht abgehärtete Seefahrende schlimmen Folgen. Nach späteren Erfahrungen schien es uns, als ob dies Reisewetter gerade für unsere Expedition dazu bestimmt war, uns Geduld für das, was noch kommen sollte, beizubringen.

Unser erstes Geschäft in Alten ward, ein passendes Terrain für die Basismessung aufzusuchen. — Ich muss hier zuerst die Bemerkung vorausschicken, dass nach den Versicherungen des Herrn Lieutenant Klouman, der während 7 oder 8 Sommer mit Vermessungen in Finnmarken beschäftigt gewesen ist, und also die Natur des Landes genau kennt, gewiss nirgends im ganzen Norwegischen Finnmarken an die Möglichkeit einer Basismessung zu denken ist, wenn nicht in der Gegend um Altenfjord herum. — Das Terrain nun, was hier zu wählen war, musste leicht vorzubereiten sein, da wir auf die ganze Messungs-Arbeit nicht viele Wochen verwenden konnten, wenn überhaupt die Norwegische Gradmessung in diesem Sommer abgeschlossen werden sollte, was uns ja ein vorgestecktes Ziel war; und es musste das Terrain nach unserer Ansicht diese Eigenschaft besitzen, ohne dass deswegen etwas Wesentliches in Bezug auf die Länge der Basis und auf die Güte der Verbindungsdreiecke aufgeopfert würde. Bei meinem Besuch in Christiania im Herbst 1849 schlug Lieutenant Kloumann zum Terrain der Basismessung einen Theil des in östlicher Richtung von Bosekop laufenden, mit Kieferbäumen bewachsenen Sandrückens vor. Bei näherer Untersuchung fand sich aber, dass dies Terrain erst nach einer nicht weniger kostspieligen als zeitraubenden Vorbereitung anwendbar sein würde, indem der ganzen Länge nach nicht allein der Wald durchgehauen, sondern auch ein mit Heidekraut und anderen holzartigen Pflanzen dicht bewachsener Rasen abgenommen werden musste; wozu noch hier und da bedeutende Vertiefungen kamen, deren Füllung unerlässlich gewesen wäre. Die Länge der Grundlinie, welche hier erhalten werden konnte, beläuft sich auf etwa 1200 Toisen, und der nächste Dreieckspunkt für die Verbindung wäre in einer Entfernung von etwa

3500 Toisen. — Die erwähnten Schwierigkeiten in Bezug auf die Vorbereitung veranlassten uns nach einem andern Terrain uns umzusehen; und ein solches bot sich auch bald dar. Von Alteafjord aus schneidet ein kleinerer Meerbusen, Rafsbunden genannt, tiefer in das Land hinein. In diesen Meerbusen ergiesst sich der Altenfluss. Längs dem südlichen Ufer des Meerbusens und in einer von Osten nach Westen abnehmenden Entfernung läuft der soeben besprochene Sandrücken, zwischen dessen Fusse und dem Meerbusen eine triangelförmige Ebene liegt, welche zum Theil kahl, zum Theil mit Wald bewachsen ist. Der erstgenannte östliche und breitere Theil, in einer Länge von etwa 500 Toisen, brauchte gar keine Bereitung. Dieser Umstand war für den Gang unserer Arbeit besonders vortheilhaft, weil dadurch die Messungen des ersten und die Vorbereitungen des zweiten Theils gleichzeitig vorgenommen werden konnten. Eine auf dieser Ebene gemessene Grundlinie hat in Bezug auf die Verbindung vor der ursprünglich vorgeschlagenen den Vorzug, dass in dem ersten Dreiecke der der Basis gegenüberliegende Winkel durch die geringere Entfernung etwas weniger spitz ist. Um aber in Hinsicht auf die Länge der Basis nichts zu verlieren, war noch ein besonderes Hinderniss zu überwinden. Der Meerbusen schneidet nämlich auf einer Stelle, nahe an seiner südwestlichen Ecke, bis zum Fusse des Sandrückens ein, und diese Stelle musste überschritten werden. Weil nun der Boden sich sehr allmählig senkt, und beim Eintritt der Ebbe ein nicht unbedeutender Theil des Meeresgrundes entblösst wird, so liess sich die Messung des gedachten Stücks zur Zeit der Ebbe ausführen. Da hiernach keine weitere Schwierigkeit von Seiten des Bodens sich darbot, so ward dies Terrain für unsere Basismessung definitiv gewählt, und nun sogleich zur Ausführung geschritten. Zunächst ward die Grundlinie ausgesteckt und mit den Vorbereitungsarbeiten angefangen. Darnach wurden die Endpunkte auf eine genaue und bleibende Weise dadurch bezeichnet, dass an jedem Ende ein grosser Steinblock in die Erde versenkt wurde, dessen oberer Theil in einer Höhe von 8 Zoll über der Erde hervorragend blieb.

In den Block ward ein cylindrischer eiserner Bolzen versenkt und mit Blei senkrecht festgegossen. Zuletzt ward in dem Bolzen ein Loch gebohrt, worin eine Stecknadel los eingesetzt werden konnte, und durch den Mittelpunkt dieses Lochs schien uns der Endpunkt bezeichnend genug angegeben zu sein. Zu gleicher Zeit wurden die Endpunkte von uns nach den nächsten Wohnorten benannt, so dass der östliche Endpunkt durch den Namen *Elvebakkens Endpunkt*, und der westliche durch den Namen *Bugtens Endpunkt* künftig bezeichnet werden sollte. — An die Reihe kamen jetzt die Vergleichungen der vier Messtangen mit der Normalstange und die anderen vorbereitenden Untersuchungen des Messungsapparats. Diese wurden in einem, gegen Norden gelegenen, grossen Saale des Hauptgebäudes von Bosekop ausgeführt, welches Local sowohl durch seine Geräumigkeit als durch seine constante Temperatur für derartige Untersuchungen vortheilhafter war, als wir es hier zu finden erwartet hatten.

Nach Vollendung aller vorbereitenden Arbeiten ward jetzt zu der eigentlichen Messung der Grundlinie geschritten. Weil Bosekop etwa 6 Werst von dem Basisterrain entfernt liegt, so sahen wir uns genöthigt unseren bisherigen Wohnsitz zu verlassen. Ein in Altengaard wohnender Arzt, Dr. Klingenberg, hatte die Gefälligkeit, uns während der Messungstage in sein Haus aufzunehmen. Er hat uns ausserdem dadurch zu grossem Danke verpflichtet, dass er uns während der Messung selbst wesentlichen Beistand leistete. — Die Arbeit ward so methodisch wie möglich angeordnet, wodurch wir beabsichtigten so wohl eine grössere Sicherheit als Raschheit für die Operationen zu gewinnen. Das bei der Messung beschäftigte Personal bestand aus folgenden Personen: 1) Lieutenant Klouman und ich, welche die Stangen richteten und alle Ablesungen besorgten (über diese wurden doppelte Journäle geführt, welche wir für jede Stange verglichen), 2) Herr Lysander, welcher am Fernrohre postirt war, und die Stangen einvisirte, wozu das Christianiaer Universalinstrument benutzt wurde; 3) Dr. Klingenberg, welcher das Geschäft übernahm, den Transport und die Auf-

stellung der Böcke zu dirigiren; 4) vier Mann, welche zum Transportiren und Aufstellen der Böcke verwandt wurden.

Am 5ten Juli um $6^1/_2$ Uhr Nachmittags ward die erste Stange von Elvebakkens Endpunkt aus gelegt. Am 9ten erreichten wir mit der 294sten Stange die ungefähre Mitte der Basis. In der Absicht, durch eine trigonometrische Verbindung der beiden Basishälften eine Controlle für die Messungen selbst zu erhalten, ward das Ende der 294sten Stange genau bezeichnet. Ich nenne diesen Punkt die *Basismitte*. Am 12ten um 8 Uhr des Abends ward die letzte 577ste Stange gelegt, und der Abstand zwischen dem Ende dieser Stange und Bugtens Endpunkt abgemessen. — Da jede Stange nahezu 2 Toisen lang ist, und der abgemessene Ueberschuss über 577 Stangen etwa 1 Toise beträgt, so ist die Länge der ganzen Basis ungefähr 1155 Toisen. — Die Arbeit ging nicht ganz ununterbrochen fort. Am 6ten Juli ward die Messung wegen des den ganzen Tag fallenden Regens eingestellt. Den 9ten um $7^1/_2$ Uhr des Abends hatten wir die mit der Bereitung des Terrains beschäftigten Arbeiter schon eingeholt, und es ward deshalb nothwendig, für einen Tag die eigentliche Messung zu unterbrechen. Wenn ich mich sonst befugt fühle die Behauptung aufzustellen, dass Alles in der besten Ordnung, ruhig und ungestört fortging, so wird hierbei eine Reservation nöthig. Denn die andächtige Stille, womit sonst die Arbeit betrieben ward, wurde recht häufig durch unzarte Verwünschungen über Finnmarkens unersättliche Ruhestörer, — die Mücken — unterbrochen. Am Abend des 12ten, nach vollendeter Messung, wurden die Stangen nach Bosekop zurückgetragen, und in den zwei folgenden Tagen die Messtangen mit der Normalstange wieder verglichen, so wie die Neigungen der Nivellirungstische von neuem bestimmt. Die Resultate dieser Untersuchungen gewähren eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung mit den vor der Messung gemachten Bestimmungen. — Die Temperatur der Vergleichungen war vor der Basismessung $+15^0{,}1$, nach derselben $+15^0{,}8$, im Durchschnitt $+15^0{,}45$ C., also etwa $^3/_4{}^0$ niedriger als die Normaltemperatur des Pulkowaer Normalmasses. — Die mittlere Temperatur der Stangen wäh-

rend der Basismessung war +15°,00 C., also 1°,25 C. niedriger als dieselbe Normaltemperatur.

Nachdem auf diese Weise alles auf die Basismessung Bezügliche zu Stande gebracht war, blieb uns die Verbindungsoperationen und die astronomischen Beobachtungen auszuführen übrig. Da, wegen der in diesen Gegenden gewöhnlich sehr unbeständigen Sommerwitterung, jede von diesen Arbeiten allein für sich eine geraume Zeit in Anspruch nehmen konnte, so ward für's Rathsamste erachtet, sich sogleich zu trennen. Lieutenant Klouman übernahm deswegen das in der That wenig beneidenswerthe Geschäft, die für die Verbindung der Basis nöthigen trigonometrischen Operationen allein auszuführen. Nur an den drei Basispunkten, wo complicirtere und schärfere Centrirungen erforderlich waren, als dass die ihm zu Gebot stehenden Mittel ausreichten, sollten wir, nachdem die andern Punkte in dem Verbindungs-Dreiecks-Netze abgemacht waren, gemeinschaftlich arbeiten. Die Berathungen, welche wir vor unserer Trennung über diesen Gegenstand pflogen, führten ferner zu dem Resultate, dass die Grundlinie mit der südlich von derselben gelegenen Hauptdreiecksseite *Nuppivara-Lodizhjokki* verbunden werden sollte, und zwar aus folgenden Gründen. Erstens waren nicht an allen Punkten die Signale der früheren Operation unbeschädigt geblieben, so zum Beispiel auf dem Dreieckspunkte *Haldi*, so dass die westlich gelegenen Seiten *Haldi-Nuppivara* und *Haldi-Kaaven* für die Verbindung unbrauchbar waren. Zweitens würde es zur Erleichterung der Arbeit nicht wenig beitragen, wenn die Punkte des Verbindungs-Dreiecks-Netzes so entfernt wie möglich von der Küste lägen, weil die an der See gelegenen Bergspitzen fast beständig mit Nebel bedeckt sind. Nur in südlicher Richtung dringt man, das Gradmessungs-Netz verfolgend, tiefer in das Land hinein. Eine Verbindung mit der östlich gelegenen Hauptdreiecksseite *Balkisoäive-Lodizhjokki* war aus mehreren Gründen nicht vortheilhaft, und zwar hauptsächlich weil diese Seite die längste in dem ganzen Haupt-Netze ist, und beinahe doppelt so lang als die Seite *Nuppivara-Lodizhjokki*, welcher Umstand die Verbindungs-Operationen noch

weitläufiger gemacht hätte. — Etwas näheres über die dem Verbindungs-Dreiecks-Netze zu gebende Form konnte ohne eine speciell für diesen Zweck angestellte Untersuchung der Gegend nicht bestimmt werden; nur die nächsten Punkte wurden vor unserer Trennung festgesetzt, so wie Signale auf denselben und auf den drei Basispunkten errichtet.

Lieutenant Klouman hatte also zunächst eine Recognoscirungsreise vorzunehmen, um passende Dreieckspunkte aufzusuchen, und zu gleicher Zeit Signale zu errichten, weshalb während der Basismessung eine hinreichend grosse Anzahl Signale verfertigt wurden um auf seiner Reise mitgenommen zu werden. — In der Absicht später auf Lieutenant Klouman's Gebirgsexpedition und ihre Ergebnisse zurückzukommen, werde ich jetzt meine eigene fernere Geschicke erzählen, nachdem ich erst eine kleine Unterbrechung in unserem ernsthaften Geschäftsleben erwähnt haben werde.

Das Dampfschiff, welches Finnmarken mit dem Süden verbindet, macht gewöhnlich jährlich eine Lustreise nach dem Nordcap, welches etwa 13 geogr. Meilen von Hammerfest, dem sonst nördlichsten Anlaufsorte des Dampfschiffes; entfernt liegt. Die diesjährige Lustreise sollte jetzt mit dem nächsten von Bosekop aus erwarteten Dampfschiffe ausgeführt werden. Ich und Herr Lysander sollten ohnedies, wegen der jetzt anzufangenden astronomischen Beobachtungen auf Fuglenaes, mit dieser Gelegenheit nach Hammerfest gehen, und es ward als nothwendig angesehen, dass Lieutenant Klouman uns wenigstens so weit begleitete, bis der Dreieckspunkt *Jedki*, dessen Azimuth von Fuglenaes aus bestimmt werden sollte, zum Vorschein käme, damit ich nachher das dortige Signal mit Sicherheit erkennen könne. Wir hatten uns ausserdem noch nicht überführt, dass dieses Signal unbeschädigt erhalten war, was sich bei unserem ersten obenerwähnten Besuch in Hammerfest wegen der damals stattfindenden nebelichten Luft nicht ermitteln liess. Ein Mal mit der nach dem Nordcap gehenden Gesellschaft zusammengekommen, drängte sich uns leicht der verleitende Gedanke auf, ob wir es nicht auf unser Gewissen nehmen konnten, diese

Lustreise mitzumachen. Da der hierdurch verursachte Zeitverlust sich nur auf einen oder zwei Tage belaufen konnte, so wurden bald alle Bedenken beseitigt. Die Fahrt von Hammerfest nach dem Nordcap, von schönem Wetter begünstigt, währte nur 7 Stunden. Am herrlichen Abend des 16ten Juli bestiegen wir, eine in Bezug auf Nationalitäten und Sprachen recht bunte Gesellschaft beider Geschlechter, das berühmte Vorgebirge von der Seeseite aus, und begrüssten von seiner höchsten Spitze unter Musik und Becherklang die noch $2\frac{1}{4}^{0}$ hoch über dem Horizont stehende Mitternachtsonne. — Am folgenden Tage trafen wir wieder in Hammerfest ein, wo ich und Herr Lysander für unbestimmte Zeit, je kürzer desto besser, unseren Wohnsitz aufschlugen, während Lieutenant Klouman mit dem Dampfschiffe nach Bosekop zurückging, von wo aus er am 22sten Juli seine Gebirgsreise antrat.

Auf Fuglenaes fand ich das bestellte Beobachtungsgebäude fertig, und die hiesigen Arbeiten konnten sogleich ihren Anfang nehmen. Für dieselben entwarf ich mir einen Plan, welchen ich befolgen wollte, und dem ich, aller Widerwärtigkeiten zum Trotz, treu blieb. Die hier auszuführenden Beobachtungen waren:

1) *Zeit- und Azimut-Beobachtungen*, welche mittelst des Universalinstruments durch combinirte Azimutalbeobachtungen des Polarsterns und geeigneter Fundamentalsterne zu erlangen waren. Das Instrument ward genau über den Dreieckspunkt gestellt. Dieser Punkt war durch einen eisernen in den Felsen eingegossenen Bolzen bezeichnet, und über demselben ein Signal mit 4 Streben auf die Weise errichtet, dass die, am untern Ende mit einem concentrischen Bohrloch versehene, cylindrische Signalstange auf den Bolzen gesteckt und sorgfältig senkrecht gerichtet war. Weil das Aufmauern des Beobachtungspfeilers während meiner Abwesenheit geschehen musste, so war kein anderes Mittel, um mit Sicherheit den dem Dreieckspunkte entsprechenden Punkt des Pfeilers zu finden, als dem Baumeister vorzuschreiben, dass das Signal mit seinen Streben während des Mauerns ganz unverändert gelassen, und der Pfeiler um die

Signalstange herum aufgemauert werden sollte. Erst nach meiner Rückkunft wurden die Streben weggenommen und die Signalstange in der Höhe der Oberfläche des Pfeilers abgesägt. Das Centrum dieses kreisförmigen Durchschnitts der Signalstange ward als das richtige Signalcentrum angesehen. Um für die Zeitbestimmungen nicht genöthigt zu sein beide Sterne, den Polarstern und Fundamentalstern, gleichzeitig zu beobachten, bediente ich mich eines irdischen Absehens, dessen Azimut, einmal bestimmt, nachher durch den jedesmal beobachteten Azimutalunterschied des Fundamentalsterns die gesuchte Zeitbestimmung geben sollte. Dasselbe Absehen ward auch benutzt, um das Azimut von Jedki Signal zu erhalten, für welchen Zweck der Winkel zwischen den beiden Gegenständen, Absehen-Signal, gemessen wurde. Es ward diese Methode einer directen Bestimmung des gedachten Azimuts vorgezogen, nicht allein der Bequemlichkeit wegen, da Jedki Signal ziemlich weit vom Meridian abliegt, sondern auch und hauptsächlich weil dieses Signal so selten sichtbar war, dass die directe Bestimmung beinahe unmöglich ward. Als Absehen benutzte ich gewöhnlich einen auf dem Bergrücken, welcher längs dem entgegengesetzten südlichen Ufer der Bucht läuft, an welcher Hammerfest und Foglenaes liegen, schon früher und gewiss absichtlich errichteten, scharf zugespitzten Stein, welcher sich gegen den Himmel projicirte, und deshalb so wie auch wegen seiner regelmässigen Form, sich sehr genau beobachten liess. Die Entfernung desselben vom Beobachtungslocal schätzte ich zu 3 Werst, und seine Abweichung vom Meridian war nur $9^{0}\,35'$, so dass er, ohne besondere Vorrichtung, durch die Seitenluken der Sternwarte beobachtet werden konnte. Ich liess ausserdem nördlich von der Sternwarte eine zweite Marke so genau wie möglich in der Richtung des Meridians errichten. Sie sollte für Nachtbeobachtungen dienen, war daher zu nächtlicher Erleuchtung zweckmässig eingerichtet und befand sich in der mässigen Entfernung etwa einer Werst. Diese Marke ward durch Winkelmessungen nicht allein mit dem andern Absehen, sondern auch mit Jedki Signal direct verbunden. In Anwendung kam sie

erst in der letzten Zeit, als die Nächte dunkel wurden. — Für die Bestimmung der Azimute der beiden Absehen beobachtete ich den Polarstern in beliebigen Stundenwinkeln, doch mit der Beschränkung, dass bei der letzten Ergänzung der Beobachtungsreihe solche Zeiten für die Beobachtungen gewählt wurden, dass aus dem Mittel der ganzen Reihe die Einwirkung eines Fehlers sowohl in der ger. Aufsteigung als in der Declination des Sterns nahezu eliminirt wurde. Ich setzte es mir als Ziel vor, wenigstens 20 vollständige Sätze Polarsternbeobachtungen, jeden aus 2 Einstellungen des Sterns in der einen und 2 in der andern Lage des Instruments bestehend, zu erlangen, welches Minimum ich nicht allein erreichte, sondern sogar überschritt. — Für die Zeitbestimmungen wäre es gewiss nicht nöthig gewesen, besonders unter einem so hohen Breitengrade, sich nur auf kleinere Azimute zu beschränken; indessen konnte, wegen der Einrichtung des Beobachtungsgebäudes, eine gewisse Grenze nicht überschritten werden. Es wurde zur Regel, keinen Stern weiter vom Meridian ab zu beobachten, als 10 Zeitminuten vor oder nach der Culmination, und dies hauptsächlich nur um für das Aufsuchen der Sterne keiner ausführlichen Tafeln zu bedürfen, da ich mich, wegen der herrschenden Beschaffenheit der Witterung (worüber später etwas näheres), für diesen Zweck nicht mit einer ganz beschränkten Anzahl Sterne begnügen konnte. Weil die Nächte nicht selten recht kühl waren, und weil bei niedrigeren Temperaturen ein sonst gutes Chronometer selten seinen regelmässigen Gang beibehält, so musste ich suchen häufigere Zeitbestimmungen, als sonst nöthig gewesen wäre, zu bekommen. Ich liess desswegen keinen Beobachtungstag vergehen ohne den Stand meiner Chronometer ein oder zwei Mal durch Beobachtungen zu bestimmen. — Das für diese Beobachtungen angewandte Instrument, das Ertelsche Universalinstrument, gewährte anfangs nicht so genaue Resultate als ich erwartet hatte. In seinem anfänglichen Zustande zeigte das Instrument nämlich eine beträchtliche Veränderlichkeit, bestehend theils in einem durch die Wasserwage angegebenen Wackeln der Verticalachse, theils in einer starken gegenseitigen Verstellung

des Limbus- und des Nonius-Kreises bei jeder Bewegung des einen derselben. Es schien schwer diesen beiden gleichzeitigen Fehlern mit den uns zu Gebot stehenden Mitteln abzuhelfen; denn der erste hatte natürlicherweise seinen Grund darin, dass die Verticalachse durch die sie unterstützende untere Feder zu viel gehoben war, wogegen der zweite offenbar nur von einer zu starken Reibung an der Stelle herrühren konnte, wo die Büchse des Limbuskreises die Hauptachse, mit der der Noniuskreis verbunden ist, umschliesst. Diese Reibung hätte durch eine Senkung der Achse noch vermehrt werden müssen, wie es sich auch durch Versuche erwies. Die ersten Beobachtungen des Azimuts der Südmarke, die in diesem Zustande des Instruments gemacht wurden, waren daher nicht befriedigend. Dem zufolge liess ich das Instrument von H. Lysander ganz aus einander nehmen, und fand jetzt die Ursache der so gesteigerten Friction darin, dass bei der letzten Revision des Instruments in Pulkowa die Wirkung der Kreisfeder, welche den Limbuskreis unterstützt, durch Unterlegung eines Stahlringes auf eine schädliche Weise gesteigert worden war. Nach Wegnahme dieses Ringes, und frischer Oelung der sich berührenden Flächen, leistete das neu zusammengesetzte Instrument was nur gewünscht werden konnte (1).

---

(1) Mit diesem Instrumente liegen 13 Sätze des Azimuts der Südmarke von H. Dr. Lindhagen beobachtet, und schon reducirt vor und zwar 7 Sätze vor der Wegnahme des Ringes, und 6 Sätze nachher. Die ersten geben das Azimut

$$9^0\ 34'\ 56''{,}7 \pm 0''{,}96,$$

die letzten

$$9\ \ 34\ \ 58{,}9 \pm 0{,}36;$$

wobei die wahrscheinlichen Fehler eines Satzes sich zu $2''{,}56$ und $0''{,}88$, herausstellen. Man sieht hieraus, wie durch die Wegnahme des Ringes die Genauigkeit der Beobachtungen auf's dreifache gesteigert wurde, und Jeder wird gewiss mit mir einverstanden sein, dass die Bestimmung eines Azimuts bis auf $0''{,}36$, unter einer Polhöhe von $70^0\,40'$, eben so sehr Zeugniss giebt für die Güte des Instruments, wie für die Einsicht des Beobachters.

Struve.

2) *Polhöhenbestimmung* mittelst des Repsoldschen Vertikalkreises. Da es hierbei auf eine absolute Bestimmung (nicht allein auf eine Amplitudobestimmung zwischen Fuglenaes und dem südlichsten Endpunkte des Norwegischen Gradmessungsbogens) abgesehen war, so musste der Beobachter suchen seine Beobachtungen so anzuordnen, dass alle Quellen constanter Fehler beseitigt wurden. Solche Fehlerquellen sind zu suchen in den Positionen der benutzten Sterne, in den für die Beobachtungen angewandten Reductionsgrössen (Zeitbestimmung, Refraction), und in dem Instrumente selbst. Was zuerst die Sternpositionen betrifft, so ward vor meiner Abreise aus Pulkowa mir von Ihnen die Absicht mitgetheilt, die Declinationen aller bei den Gradmessungen in Russland, Schweden und Norwegen für Polhöhebestimmungen benutzten Sterne in einem Zusammenhange am hiesigen grossen Vertikalkreise neu bestimmen zu lassen. Abgesehen hievon, hielt ich es für geeignet, durch Beobachtung mehrerer Sterne den Einfluss der Unsicherheiten in der Declination möglichst zu verkleinern. — Wenn in den geraden Aufsteigungen und in den Zeitbestimmungen ein constanter Fehler vorkommt, so kann er gewiss verhältnissmässig nur sehr gering sein, und sein Einfluss auf die Zenithdistanzen in geringen Entfernungen vom Meridian darf als verschwindend angenommen werden. Anders verhält es sich, wenn die Zenithdistanz des Polarsterns in grösseren Stundenwinkeln (um 90^0 und 270^0 herum) für die Polhöhe beobachtet wird. In diesem Fall können aber die Beobachtungen leicht so gewählt werden, dass ein constanter Fehler in dem Stundenwinkel (in gerader Aufsteigung und Zeitbestimmung) aus dem Mittel der ganzen Beobachtungsreihe verschwindet. — Es könnte vielleicht in Frage gestellt werden, ob die Strahlenbrechung, unter so hohen Breitengraden und bei einem von der mitteleuropäischen so verschiedenen (ungemein feuchten) atmosphärischen Zustande, vollkommen dasselbe Gesetz befolgt, welches den gebräuchlichen Refractionstafeln zu Grunde gelegt ist. Wenn wirklich eine Abweichung von diesem Gesetze stattfinden sollte, so muss eine Polhöhenbestimmung durch Meridianzenithdistanzen zweier Sterne, welche in glei-

ober Entfernung nördlich und südlich vom Scheitel und bei gleichen atmosphärischen Zuständen culminiren, von einem aus dieser Quelle entspringenden Fehler im Mittel frei werden. — Die zuletzt angedeutete, im Instrumente selbst liegende Fehlerursache ist ohne Zweifel die complicirteste von allen. Wenn unstreitig, durch die oben erwähnten ausgeführten Verbesserungen in der Construction des Instruments, und durch die geschehene Untersuchung der Theilungsfehler des Kreises und der Biegung des Fernrohrs, Alles gethan war, was im Voraus thunlich ist, so bleiben doch mögliche Fehlerquellen noch übrig, zu denen ich eine Unsicherheit in der Bestimmung der Biegungscoefficienten oder selbst in der Theorie der Biegung, und eine ungleichförmige Einwirkung der beim Beobachten stattfindenden Wärmestrahlung auf die verschiedenen Theile des Instruments rechnen möchte. — Nach diesen Betrachtungen traf ich nun die Auswahl der zu beobachtenden Sterne. Zunächst sollte der Polarstern, welcher hier über dem Pol in einer Zenithdistanz von 17° 50′ und unter dem Pol von 20° 49′ culminirt, beobachtet werden, und zwar, um eine hinreichende Anzahl Beobachtungen in möglichst kurzer Zeit zu erlangen, in verschiedenen Stundenwinkeln, wobei doch darauf gesehen werden musste, dass der Complex aller Beobachtungen von der Declination des Sterns und von dem Stundenwinkel unabhängig wurde. Ferner wählte ich mir drei Sterne von nahezu derselben Declination aus, welche im Mittel genau in derselben Zenithdistanz südlich vom Scheitel culminiren, als der Pol nördlich vom Scheitel abliegt. Diese Sterne waren: *η Ursae maj.* mit der Meridianzenithdistanz 20° 36′, *β Draconis* mit der Meridianzenithdistanz 18° 15′ und *γ Draconis* mit der Meridianzenithdistanz 19° 9′. Die mittlere Meridianzenithdistanz der drei Sterne ist also 19° 20′, der Aequatorshöhe von Fuglenaes oder dem Mittel der beobachteten Zenithdistanzen des Polarsterns genau gleich. Wenn ich noch hinzufüge, dass ich mir es als ein zu erstrebendes Ziel stellte, 20 Beobachtungssätze des Polarsterns und 10 Beobachtungssätze jedes der drei andern Sterne zu erlangen, so ist die Absicht dieser Anordnung der Beobachtungen einleuchtend.

Einerseits beabsichtigte ich durch eine gleiche Anzahl von Beobachtungen den Polhöhebestimmungen durch südliche und nördliche Zenithdistanzen dasselbe Gewicht zu bereiten, nachdem ich durch Anwendung dreier Sterne südlich vom Scheitel den Vorzug einigermaassen aufzuwiegen gesucht hatte, welchen die Polarsternsbeobachtungen dadurch besitzen, dass der Ort des Sterns aus dem Resultate eliminirt werden konnte; andererseits musste durch gleiche Zenithdistanzen nördlich und südlich vom Scheitel eine Unsicherheit in der Strahlenbrechung und in der Biegung des Fernrohrs unschädlich gemacht werden, wenn angenommen werden kann, dass die beiderlei Beobachtungen unter ungefähr gleichen atmosphärischen Zuständen gemacht sind, was im Mittel gewiss nahezu der Fall ist. Es war ausserdem ursprünglich meine Absicht, noch vier Sterne am Vertikalkreise zu beobachten, nämlich 2 Sterne südlich vom Scheitel in den Meridianzenithdistanzen 40° und 60°, und 2 Sterne mit denselben Meridianzenithdistanzen nördlich vom Scheitel, einzig und allein um dadurch den Gang eines möglicherweise stattfindenden Unterschieds zwischen nördlichen und südlichen Beobachtungen zu verfolgen. Ich sah mich aber bald genöthigt, diesen letzten Theil des Plans in seinem ganzen Umfange als zu zeitraubend aufzugeben, und beschränkte mich darauf, einen Stern südlich vom Scheitel, *Gemma*, mit der Meridianzenithdistanz 43° 27′, und einen nördlich, *Capella in der unteren Culmination*, mit der Meridianzenithdistanz 63° 30′ zu beobachten. Den so modificirten Plan für die Beobachtungen am Vertikalkreise gelang es mir zuletzt auch vollständig auszuführen. In dem Mittel aller erhaltenen Polarsternsbeobachtungen wird die beabsichtigte Fehlerelimination nicht vollkommen sein, was daher herrührt, dass die gewünschte Anzahl Beobachtungen dieses Sterns früher erhalten ward als die der übrigen Sterne, und dass ich, um die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen südlich und nördlich vom Scheitel desswegen nicht aufzugeben, noch fortfuhr den Polarstern zu beobachten, aber nur zu bequemeren Zeiten. — Das Instrument hatte seinen Platz auf einem nördlich vom Signalcentrum aufgemauerten Ziegelsteinspfeiler. Es bewährte auch

jetzt seine bei früheren Gelegenheiten erprobte Vortrefflichkeit.

3) *Polhöhenbestimmung* mittelst des Passageninstruments im ersten Vertikal. Da es auch hierbei auf eine absolute Bestimmung ankam, so hatte ich bei der Auswahl der Sterne hauptsächlich darauf zu sehen, dass, unter Voraussetzung bekannter Sterndeclinationen, die Beobachtungen an und für sich die grösst-mögliche Schärfe besässen, welche Bedingung mich auf dem Scheitel sehr nahe liegende Sterne anwies. Schon in Pulkowa vor meiner Abreise ward an zwei hierfür geeignete Sterne gedacht, *β Cephei* und *κ Draconis*. Der letztere ward indess nicht benutzt, weil seine Culminationszeit dem Mittage zu nahe lag, um ihn durch das Fernrohr des Passageninstruments sehen zu können. *β Cephei* ward dagegen beibehalten, und ich fügte noch zwei, aus Argelanders Uranographie ausgewählte Sterne hinzu, nämlich *ε Draconis* und einen kleinen Stern 5ter Grösse im *Cepheus*, den ich im Journal mit dem Namen *Anon. Cephei* bezeichnet habe. Es waren also folgende drei Sterne, welche ich zu beobachten hatte:

	Mer.-Zen.-Dist.	Zeit-Unterschied zwischen den Durchgängen durch *Ost- und West-Vert.*
β Cephei	0° 46′	$2^h\ 12^m$
ε Draconis	0 46	2 12
Anon. Cephei	0 3	0 34

In Bezug auf die erforderliche Anzahl der Beobachtungen sah ich es, mit Hinsicht auf die Eigenschaften des Instruments, als vollkommen hinreichend an, wenn jeder Stern 8-Mal beobachtet wurde. Ich bekam zuletzt für jeden Stern 10 Beobachtungen. — Das Instrument stand auf einem Ziegelsteinpfeiler nordwestlich vom Signalcentrum. Es braucht hier kaum besonders erwähnt zu werden, dass Abstände und Richtungswinkel der beiden excentrisch stehenden Instrumente genau gemessen wurden. — In so weit ich, vor der vollständigen Reduction der Beobachtungen, aus ihrem Gange zu urtheilen im Stande bin, lässt das Instrument in jeder Hinsicht nichts zu wünschen übrig.

"Nachdem ich Ihnen so den entworfenen Beobachtungsplan

und meine endliche Ausführung dargelegt habe, bleiben mir noch die äusseren Umstände zu berühren, von welchen die Arbeiten auf Fuglenaes begleitet waren.

Fuglenaes und Hammerfest liegen auf der Insel Qualoe, welche sich von 70° 30′ bis 70° 45′ nördl. Breite erstreckt, und eine Ausdehnung von Nord nach Süd von etwa 22 Werst, von Ost nach West von 15 Werst hat. Sie ist wie die Scheeren längs der Norwegischen Westküste überhaupt, felsig, und erhebt sich allenthalben steil, so dass Bergspitzen vorkommen, welche eine Höhe von 1300 Fuss erreichen, was zum Beispiel mit Tyvfjeld, einem der Gradmessungsdreiecks-punkte und der höchsten Spitze auf der Insel, nicht weit südlich von Hammerfest, der Fall ist. — Da hier fast alle Vegetation aufgehört hat, und nur in den engen, gegen die Winde geschützten Thälern etwas Graswuchs vorkommt, so kann das Leben der Menschen und Hausthiere nur ein künstliches sein. Fischfang und Handel mit Fischen sind auf den Inseln, wohin die Rennthiere nicht kommen, die einzigen ursprünglichen Nahrungszweige, und überhaupt im ganzen Finnmarken die Hauptquellen des Wohlstands. Man könnte leicht verleitet werden zu glauben, dass das Menschenleben hier ein äusserst kümmerliches sei. Dies ist wohl der Fall in Bezug auf die eigentlich Lappische Bevölkerung; mit der übrigen Bevölkerung aber verhält es sich ganz anders. Unter den Kaufleuten und Beamten herrscht Wohlstand, ja ein Luxus, den man in Gegenden, welche von der Natur weit weniger stiefmütterlich behandelt sind, nicht häufig trifft. Die Traube wird sicherlich hier nicht reif, aber ihre Säfte kommen hier so reichlich vor, dass man meinen könnte, sie gehorchen einer gewissen intensiven Polarattraction. Wenn ich dies hier erwähne, wo die Rede von den äussern Umständen ist, unter welchen die astronomischen Beobachtungen ausgeführt sind, so wird es nöthig sein hinzuzufügen, dass gewiss weder constante noch zufällige Beobachtungsfehler durch diesen letzten Umstand hervorgerufen sind. — Die Stadt Hammerfest, wo die eigentliche Bevölkerung der Insel concentrirt ist (man findet sonst an den Küsten nur hier und da einzelne Fischerhütten), zählt etwa 700 Einwoh-

ner, und liegt auf der Westküste, im südöstlichen Winkel einer kleinen Bucht, welche in ONOstlicher Richtung etwa $1^1/_2$ Werst tief ins Land einschneidet. Diese Bucht ist nach dem Meere zu durch vorliegende Inseln gedeckt, und bietet einen guten Hafen, welcher jährlich von etwa 300 Segelschiffen aus allen Weltgegenden besucht wird. Die Bucht ist ringsum fast ohne Unterbrechung eng von Bergen umschlossen, und nur das innere östliche Ufer hat einen schmalen flachen Saum, auf welchem die Stadt liegt. An dem äussersten nordwestlichen Theile der Bucht läuft eine schmale Landzunge ins Meer, welche ebenfalls ziemlich flach ist, und *Fuglenaes* genannt wird. Hier liegt der Nordpunkt der Gradmessung unter $70^0\ 40'$ der Breite am höchsten Punkte der Landzunge, nur 45 Fuss über dem Meere. — Es war hier wohl nicht ganz bequem, dass der Beobachter in Hammerfest wohnen musste, von wo Fuglenaes zur See eine Werst, zu Lande etwa zwei Werst entfernt liegt, besonders wenn die häufigen und plötzlichen Wechsel des Zustandes des Himmels, welche hier vorkommen, berücksichtigt werden. Wenn ich die 14 allerletzten Tage meines Aufenthaltes in Hammerfest ausnehme, so kam es nicht ein einziges Mal vor, dass der Himmel sich 24 Stunden ununterbrochen klar hielt. Als ein nach den dortigen Vorstellungen sogenannter schöner Tag eintraf, verhielt es sich gewöhnlich so, dass ein Paar klare Stunden mit eben so vielen trüben immerfort abwechselten. Auf diese Weise war der Beobachter veranlasst, entweder ebenso oft zwischen seinem Wohnorte und der Sternwarte hin und her zu wandern, als eine Aufklärung oder Bewölkung des Himmels stattfand, oder manchen ganzen Tag umsonst auf dem öden Felsen zuzubringen. Zu Anfange wählte ich das erste, nachher zog ich das letzte vor. Es ist wohl möglich, dass auf solche Weise anfänglich einige isolirte klare Stunden verloren gingen. Mit Bestimmtheit kann ich jedoch die Behauptung aufstellen, dass niemals ein über zwei Stunden dauernder klarer Himmel unbenutzt gelassen wurde. Schlimmere Folgen hatte diese Unbeständigkeit des Wetters aber dadurch, dass Beobachtungen, welche zu bestimmten Zeiten auszuführen waren, selten erhalten werden konnten.

Polarsternbeobachtungen, welche sowohl für die Azimut- als für die Polhöhen-Bestimmungen in allen Stundenwinkeln des Sterns angestellt wurden, waren durch Benutzung isolirter klarer Augenblicke leichter zu bekommen, und wurden auch verhältnissmässig recht bald in hinreichender Anzahl erhalten. Ebenso hatte es keine grosse Schwierigkeit Sterne für die Zeitbestimmungen zu bekommen, weil ich dabei unter der grossen Menge nach Belieben zu wählen hatte. Dagegen war es eine grosse Noth mit den Sternen, welche ich für die Beobachtungen im ersten Vertikal ausgewählt hatte, so wie auch mit der beschränkten Anzahl Sterne, welche, ausser dem Polarstern, am Vertikalkreise zu beobachten waren. — Diese Bemerkungen gelten von den 5 ersten Wochen meines Aufenthalts in Hammerfest, während welcher Zeit es doch dann und wann möglich war eine Beobachtung zu erhaschen. Nachher trat eine wahre Verzweiflungsperiode ein, und es verstrich ein ganzer Monat, ohne dass ein einziges Mal ein klarer Fleck auf dem Himmel sich zeigte. Während dieser Periode bekam ich, am 22 August, von Lieutenant Kloumann einen Brief, welcher mir die frohe Nachricht brachte, dass er von seiner Gebirgsreise glücklich nach Alten zurückgekommen sei, dass er an allen entfernteren Punkten des Verbindungsnetzes die Winkelmessungen beendigt habe, und nur das erste, die Basis einschliessende, Dreieck noch übrig sei. Mit dieser Nachricht war die Aufforderung an mich verbunden, nach Alten zu kommen, um an der Abschliessung der dortigen Arbeiten Theil zu nehmen. Zu dieser Zeit hatte ich noch bei weitem nicht die volle Anzahl von astronomischen Beobachtungen bekommen, welche ich als ein Minimum angesetzt hatte. Es war also nicht daran zu denken, bei dieser Gelegenheit Hammerfest schon für immer zu verlassen. Die Reise musste vorgenommen werden, da die eine Arbeit nicht weniger wichtig war als die andere, und weil mit der fortschreitenden Jahreszeit geodätische Feldarbeiten mehr und mehr an Schwierigkeit zunehmen mussten; ein Aufschieben derselben aus dem Grunde also nicht rathsam sein konnte. Mit einer noch nicht ganz aufgegebenen Hoff-

nung auf bessere Zeiten trat ich also, das Universalinstrument mitbringend, am folgenden Tage, die Reise mit einem Segelboot an, und traf am 26sten in Bosekop ein. Herr Lysander blieb in Hammerfest zurück, um die andern Instrumente zu überwachen, und um das tägliche Aufziehen der Chronometer zu besorgen.

In der Absicht auf denselben Gegenstand nicht wieder zurückzukommen, werde ich jetzt die auf die Basisverbindung bezügliche, von Lieutenant Klouman ausgeführten Operationen etwas näher besprechen. Zum bessern Verständniss füge ich hier eine Zeichnung des Verbindungsdreiecksnetzes bei.

An der Spitze einer reitenden Karavane, bestehend, wenn ich mich recht erinnere, aus 6 lasttragenden Pferden mit ihren Führern, trat Lieutenant Klouman am 22sten Juli seine Reise nach den innern Gebirgsgegenden an. Da während derselben nicht allein die Dreieckspunkte für die Basisverbindung aufgesucht und die Signale errichtet, sondern auch die Winkelmessungen ausgeführt werden sollten, und da ferner die zu besuchenden Gegenden gänzlich unbewohnt sind, so war eine bedeutende Ausrüstung nöthig, indem nicht nur Instrumente und fertige Signale mitgenommen werden mussten, sondern auch für die nothwendigen Lebensbedürfnisse während einer geraumen Zeit zu sorgen war. Bei den bestmöglichen Anstalten in letzter Hinsicht, musste die Reise immer noch mit grossen Mühseligkeiten und Entsagungen, ja sogar Gefahren verbunden sein. Das Karavanenleben in den tropischen Ländern lässt sich noch mit anmuthigen Farben beschreiben: aber unter dem 70sten Breitengrade hört doch das Erfreuliche wohl auf. Lieutenant Klouman brachte einen ganzen Monat in den Gebirgen zu, und während der Zeit hatte er nicht ein einziges Mal Gelegenheit eine Nacht anders zuzubringen als in seinem Zelt, welches aufgeschlagen war entweder auf einem mit Schnee bedeckten kahlen Felsen 2 bis 3000 Fuss über dem Meere, oder in einer morastigen Gegend, wo die Feuchtigkeit und die Mücken keine besonders behagliche Ruhe zuliessen. Nicht weniger kümmerlich muss die Erfüllung eines andern Le-

bensbedürfnisses, der Nahrung, gewesen sein. Lieutenant Klouman hatte sich für diesen Zweck mit Jagd- und Fischer-Geräthen versehen, zu welchen auch, wann Gelegenheiten sich darboten, die Zuflucht genommen ward. — Ich habe diese Verhältnisse, welche in den andern Jahren, die Lieutenant Klouman wegen der Gradmessung in Finnmarken zugebracht hat, ungefähr dieselben gewesen sind, besonders hervorheben wollen, weil die Beharrlichkeit und Selbstaufopferung, mit denen er alle Hindernisse und Schwierigkeiten für das Erreichen des wichtigen Ziels beseitigt hat, gewiss nicht Anerkennung genug finden kann.

Ueber den Fortgang der Arbeiten lasse ich jetzt Lieutenant Klouman's eigene brieflichen Mittheilungen sprechen. Der erste Brief, den ich von seiner Reise bekam, lautete folgendermaassen:

Loditzjokki, d. 2 August.

»Da die Zeltstange im Winde eine unbequeme Station für einen Schreibtisch ist, den ich in Folge davon und aus andern Unbequemlichkeitsursachen, die Kälte einberechnet, sobald wie möglich zu verlassen wünsche, so mag es mir verziehen werden, wenn ich mich möglichst kurz fasse. Aus diesem Grunde wähle ich die historische Form für folgende Mittheilungen. An demselben Tage als ich aus Hammerfest zurückkam, Donnerstag den 18 Juli, war ich auf *Skuodevara* und setzte dort das Signal auf. Die zwei nachfolgenden Tage waren so sturm-, nebel- und regen-voll, dass ich mich nicht nach *Reipas* begeben konnte, wohin ich erst am Sonntage gelangte. Ich errichtete dann Signale nicht allein auf *Gr. Reipas* sondern auch auf *Kl. Reipas*, welcher letzte Punkt die Verbindung bedeutend verstärkt, um so mehr da eine Visirlinie zwischen *Elvebacken*, Endpunkt und *Skuoderara* nicht zu bekommen war. Am Montage trat ich meine Gebirgsreise an, und errichtete in den folgenden Tagen Signale auf allen denjenigen Punkten, welche meiner Meinung nach mitgenommen werden mussten. Die durch diese Punkte gewonnene Verbindung scheint mir vollkommen genügend, und auf jeden Fall die beste, welche das Terrain gestattet. Da ich schon vom Anfange an die Furcht hegte, dass die op-

tische Kraft meines Fernrohrs sich zu gering zeigen würde, wenn die Signale sich nicht gegen den Himmel projiciren, so versah ich an allen Punkten, *Kongshavnsfjeld* einberechnet, die Spitzen der Signalstangen mit Halbtonnen, welche ich mit Kalk weiss anstreichen liess. Aber leider zeigte sich auch dies Mittel bei den grössten Entfernungen als unzulänglich, und um die Auffassung der Signale zu erleichtern, habe ich einen Kerl herumgeschickt, um längs den Signalstangen bis zu der Befestigung der Streben ein steinernes Gemäuer aufzuführen. Auf *Lodizhjokki* war die Stange mit der Tonne weg, wogegen das Loch, worin die Stange gestanden hatte, ganz deutlich zu erkennen war, und ich bin vollkommen überzeugt, dass die neue Stange ganz genau auf dem Platze der alten steht. Nach dieser Digression über die Signale setze ich die abgebrochene Reiseerzählung fort. Ohne andere Fatalitäten, als dass ein Tag durch die Desertion der Pferde verloren ging, beendigte ich am Freitage (d. 26 Juli) meine Signalrunde, indem ich *Vuosgoivara* erreicht hatte. Obwohl das Wetter am folgenden Tage günstig war, liessen sich doch keine Messungen ausführen, wegen der geringen Sichtbarkeit der Signale; und es war von hier aus dass ich die Anstalt zu den steinernen Gemäuern traf, auf die ich indess nie einvisire, sondern die ich nur als leitend für das Aufsuchen benutze. Am Montage wurden auf *Vuosgoivara* und am Mittwoch auf *Nuppivara* die Winkelmessungen ausgeführt. Das Wetter war nicht mehr so vortheilhaft wie in der ersten Woche, welche zur Errichtung der Signale verwandt war, aber ich glaube doch mit den Messungen zufrieden sein zu können; das heisst: nach einem ungefähren Ueberschlag sind sie von demselben Gehalte, wie die früheren. Von *Nuppivara* aus konnte ich leider das Signal auf *Skuoderara* nicht sehen, und deswegen geht dies Neben-Dreieck verloren. Ich wartete gestern noch etwas, ehe ich diese Stelle verliess, um zu erfahren, ob das Wetter nicht endlich günstiger werden wollte; aber der entgegengesetzte Fall trat ein. Heute um Mittagszeit kam ich hier an.«

In einem zweiten Briefe, datirt Bosekop den 18 August,

theilt Lieutenant Klouman mir mit, dass die Winkelmessungen an den übrigen entfernteren Punkten in gehöriger Ordnung fortgegangen waren, und dass er, nach der Vollendung derselben, am selben Tage nach Alten zurückgekommen war. — Es war dieser Brief, der mich veranlasste, mich nach Alten zu begeben, wo ich am 26 August eintraf.

„Während meiner Anwesenheit hier wurden von mir mit dem Pulkowaer Universalinstrumente die Winkelmessungen auf den drei Basispunkten und auf *Rafsholmen* ausgeführt. Das kleinere Christianiaer Universalinstrument ward dabei für die Centrirungen angewandt. — Um den mittleren Wasserstand des Meerbusens, an welchem das Basisterrain liegt, auszumitteln, war an einem der letzten Tage meines vorigen Aufenthalts in Alten eine eingetheilte Stange im Wasser, dem Ufer des südwestlichen Theils des Meerbusens so nahe wie möglich aufgestellt. Nach seiner Rückkunft in diese Gegenden hatte Lieutenant Klouman einige Fluth- und Ebbe-Ablesungen gemacht. Diese Beobachtungen wurden während meiner jetzigen Anwesenheit fortgesetzt, und die nöthigen Operationen, um den Höhenunterschied auszumitteln zwischen *Bugten* Endpunkt und dem Punkte der Stange, welcher dem mittleren Wasserstande entsprach, ausgeführt. Da Lieutenant Klouman noch einige Zeit übrig hatte bis zu der nächsten Dampfschiffsgelegenheit, mit welcher er seine Rückreise nach dem Süden antreten sollte, so forderte ich ihn auf, diese Operationen unabhängig von mir zu wiederholen. Ich wünschte nämlich, dass die Höhenbestimmung von *Bugten* Endpunkt mit grösserer Sicherheit erhalten werde, als sonst für die Reduction der Basis auf die Meeresfläche nöthig gewesen wäre, weil ich durch einen Brief des Herrn Professor Selander in Stockholm die Aufforderung bekommen hatte, alles zu thun, was meine Zeit erlauben könnte, um ein, dem Herrn Professor von der Stockholmer Akademie der Wissenschaften aufgetragenes Nivellement zwischen dem Bottnischen Meerbusen und Altenfjord zu befördern. Mehr ward uns nicht möglich hierfür auszurichten, als noch durch gleichzeitige reciproke Beobachtungen den Höhenunterschied zwischen *Bugten* End-

punkt und dem Verbindungsdreieckspunkte *Kongshavnsfjeld* mit erforderlicher Schärfe zu bestimmen. — Nach der Vollendung dieser Arbeiten verliess ich Alten. — Ein Paar hier noch übrige Geschäfte führte Lieutenant Klouman nachher allein aus. Diese waren die Vertikalwinkelmessungen an den beiden Endpunkten, und das Uebermauern dieser Punkte; das letztere in der Absicht, die genauen Bezeichnungen der Enden der Grundlinie gegen Zerstörung zu bewahren, da es doch möglich ist, dass unsere Basis künftig wieder für besondere Vermessungen in Anwendung kommt. — Frohlockend kehrte Lieutenant Klouman am 20 September nach dem Süden zurück, in der Hoffnung diese Gegenden nimmer wiederzusehen. Nach Uebereinkunft nahm er den Basisapparat mit sich nach Christiania.

Am 8 September traf ich in Hammerfest wieder ein. Selten ist wohl ein Wunsch inniger gewesen, als meiner jetzt war, in den noch übrigen 11 Tagen bis zur nächsten Dampfschiffsgelegenheit (derselben, mit der Lieutenant Klouman seine Rückreise antreten sollte) so viel klares Wetter zu bekommen, dass ich, in der Ueberzeugung hinreichend sichere Resultate erlangt zu haben, mit gutem Gewissen Finnmarken verlassen könnte. Aber anders stand es in den Sternen geschrieben. Ich bekam in dieser Zeit keine einzige Beobachtung. Ich will nicht versuchen meine verzweifelte Lage zu beschreiben, als am 18ten ein Entschluss gefasst werden musste. Einerseits kam der Umstand in Erwägung, dass, wenn diese Reisegelegenheit nicht benutzt würde, die darnach folgende, die letzte in dem laufenden Jahre, eine zu späte Ankunft in Christiania darböte, als dass ich von dort aus weitere Dampfschiffsgelegenheiten vorfinden könnte; wodurch nicht allein die weitere Rückreise, da sie zu Lande geschehen müsste, weit langsamer und unbequemer in der späten Jahreszeit würde, sondern auch der mir von Ihnen gegebene Auftrag, die Instrumente nach Stockholm zu bringen, nicht erfüllt werden könnte; in der andern Wagschale lag aber ein schweres Gewicht, die Vorstellung nämlich, dass die erhaltene Anzahl Beobachtungen von Ihnen würde ungenügend befunden werden, wodurch also die Ausrü-

stung und Versendung einer neuen Expedition als die Folge einer zu frühen Abreise mir vorschwebte. *Salvavi animam meam*: ich blieb in Hammerfest, und zwar mit dem festen Entschlusse, den Winter dort zuzubringen, wenn ich nicht in den folgenden drei Wochen Gelegenheit fände, mein vorgesteckles Ziel vollständig zu erreichen. Glücklicher Weise brauchte diese letzte Drohung nicht zur That zu werden; denn in den letzten zwei Wochen bekam ich endlich mehrere recht schöne Beobachtungstage, so dass ich am 12ten October die Instrumente ruhig einpacken und auf das Dampfschiff bringen lassen konnte.

Für das Aufbewahren des Dreieckspunkts von Fuglenaes ward zuletzt folgendermaassen Sorge getragen. Der Ziegelsteinpfeiler, welcher über dem Dreieckspunkte aufgemauert war, und auf welchem das Universalinstrument seinen Platz gehabt hatte, ward, bis zur Blössung des in dem Felsen eingegossenen eisernen Bolzens, gänzlich abgebrochen. Ich liess den Bolzen mit einer dichten Schichte von Talg umgeben und zunächst mit einem eng schliessenden hölzernen Deckel bedecken, und darüber zuletzt ein Gemauer aus Schlackensteinen von beträchtlicher Grösse und Schwere aufführen. Beim Abgeben des Schlüssels der Sternwarte an den Herrn Bürgermeister der Stadt fügte ich ein Schreiben bei, durch welches ich, die Wichtigkeit des Aufbewahrens des nördlichsten Endpunkts aller Gradmessungen hervorhebend, ihn ersuchte, geeignete Maassregeln zu ergreifen, damit jetzt und in Zukunft der bezeichnete Punkt auf Fuglenaes unter dem Schutze der Bürgermeisterschaft von Hammerfest gestellt bleibe. Später nach meiner Rückkunft nach Christiania traf ich mit dem Herrn Professor Hansteen die Uebereinkunft, dass das Beobachtungsgebäude auf Fuglenaes stehen bleiben sollte, so lange es aushalten würde, und dass ein offizielles Schreiben vom Ministerium des Innern ausgewirkt werden sollte, wodurch die Beaufsichtigung und Erhaltung des Punktes auf Fuglenaes dem gedachten Herrn Bürgermeister ganz besonders anempfohlen wurde.

Den 13ten October endlich verliessen wir Nachgebliebenen Hammerfest. Nach einer nichts weniger als angenehmen

dreiwöchentlichen Seereise langten wir am 2ten November in Christiania an. Weil die Dampfschiffsverbindungen mit Petersburg sowohl durch Schweden als auf der Ostsee schon aufgehört hatten, so musste der ursprüngliche Plan für die weitere Rückreise bedeutend modificirt werden. Es war nämlich ursprünglich meine Bestimmung, auf der Rückreise mit den Instrumenten über Schweden zu gehen, und, mit Ausnahme des Vertikalkreises, alle Instrumente in Stockholm zu deponiren, weil wenigstens ein Theil von ihnen im nächsten Sommer im Schwedischen Lappmarken angewandt werden sollte. Der Vertikalkreis sollte nach Pulkowa mitgenommen werden, um in Bezug auf die Biegung weiter untersucht zu werden. Diese Nebenzwecke der Reise mussten jetzt unberücksichtigt gelassen werden, und ich sah mich genöthigt, alle Instrumente in Christiania zu deponiren. Die Chronometer wurden auf die Sternwarte gebracht und unter Professor Hansteen's Schutz gestellt. Die astronomischen Instrumente fanden einen vortheilhaften Platz in dem Local der Direction der Landesvermessungen. Der Basisapparat ward in einem Zimmer des Zollgebäudes aufbewahrt. Alle Kasten wurden geöffnet, und alle Instrumente vollkommen wohlerhalten gefunden. In Bezug auf das weitere Befördern der Instrumente ward mir das Versprechen gegeben, dass, nach der Eröffnung der Dampfschiffscommunicationen in Schweden im nächsten Frühjahr, sie mit derjenigen Gelegenheit, welche von Pulkowa aus gewünscht würde, nach Stockholm expedirt werden sollten; und sollte es von Ihnen abhängen, ob Lieutenant Klouman, welcher als Begleiter der Instrumente designirt ward, da er mit ihrer Behandlung auf Reisen schon vertraut ist, sie nur nach Gothenburg begleiten, um dort ihre Versendung nach Stockholm zu besorgen, oder ob er selbst nach Stockholm mitgehen sollte. — Für Herrn Lyaander's und meine fernere Rückreise stand die Wahl zwischen zwei Wegen offen. Entweder konnten wir zu Lande durch Schweden reisen und nachher von Stockholm aus uns über das Alands Meer übersetzen lassen, um ferner durch Finnland die Reise bis nach St. Petersburg fortzusetzen; oder wir konnten über Kopenhagen

nach Travemünde oder Wismar gehen, und von einem dieser beiden Oerter über Norddeutschland und die Russischen Ostseeprovinzen nach Petersburg gelangen. Wegen der Quarantainen an den Schwedischen Küsten und wegen der durch die Cholera ausserdem veranlassten Absperrungen der Städte im Innern dieses Landes, ward der erste Reiseplan, wenn überhaupt ausführbar, wenigstens als zu zeitraubend aufgegeben, und der letzte gewählt. Mit dem Dampfschiffe «*Christiania*» verliessen wir die Stadt Christiania am 6ten November, und langten am 8ten früh des Morgens nach dem Quarantaine-Orte Klampenborg in der Nähe von Kopenhagen an, wo wir eine dreitägige Quarantaine durchmachen mussten. Nach einem Anfenthalte von anderen drei Tagen in Kopenhagen gingen wir am 14ten mit dem Dampfschiffe «*Obotrit*» hinüber nach Wismar, von wo aus wir mit der Eisenbahn am 16ten November in Berlin anlangten. In Berlin hielten wir uns 4 Tage auf, nach deren Verlauf wir am 21sten auf der Eisenbahn über Stettin nach Woldenberg gingen. Die weitere Reise mit der Post bis nach Königsberg, wo wir den 23sten ankamen, ging glücklich vor sich. Hier aber traf mich die Unannehmlichkeit, dass mein Reisegefährte, Herr Lysander, krank an Unterleibsschmerzen wurde, und die Fortsetzung der Reise, welche zum 25sten angesetzt war, aufgeschoben werden musste. Herrn Lysander's Unwohlsein schien im Anfange ganz unbedeutend, und der Arzt, welcher gleich nach dem Erkranken gerufen ward und dem Patienten seine regelmässigen Besuche machte, glaubte mich versichern zu können, dass die Abreise höchstens ein Paar Tage verspätet werden würde. Noch am Vormittage des 28sten war der Zustand des Kranken ganz erfreulich. Aber vom Mittage desselben Tages an nahm die Krankheit so plötzlich eine schlimme Wendung, dass es am selben Abend ganz bedenklich mit meinem armen Reisegefährten aussah. Diese Verschlimmerung nahm nachher rasch zu, und am Abend des folgenden Tages gab der Arzt schon alle Hoffnung auf. Die traurige Crisis trat auch bald ein. Um 1 Uhr in der Nacht zwischen dem 29sten und 30sten November verschied mein treuer und theurer Gefährte. — In einem

mir gütigst abgegebenen Krankheitsbericht sagt der Arzt zuletzt: »Es unterliegt keinem Zweifel, dass hier eine heftige schnell sich ausbildende Tympanitis stattgefunden und den Tod herbeigeführt hat.» — Alle auf diesen Vorfall bezüglichen Documente habe ich, nach dem Auftrage des Russischen General-Consuls in Königsberg, gleich nach meiner Rückkunft Ihnen vorgelegt und abgegeben. — Eine Menge Geschäfte, welche die nächsten Folgen dieses traurigen Todesfalls wurden, hielten mich eine längere Zeit in Königsberg auf. Erst am 7ten December verliess ich diese Stadt, und langte am folgenden Tage in Tauroggen an. Am 11ten erhielt ich einen Platz in dem Postwagen, und setzte so meine Reise fort über Mitau, Riga und Dorpat nach St. Petersburg, wo ich am 16ten December ankam. An demselben Tage sah ich auch Pulkowa wieder.

Pulkowa, den $\frac{29}{17}$ Januar 1851.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. IX. No.* 18.)

$\frac{27 \text{ Juin}}{9 \text{ Juillet}}$ 1851.

Supplément à notre rapport relatif à la succession littéraire de LÉONARD EULER; par P. H. FUSS.

Le rapport dont il s'agit fut lu à l'Académie le 15 (27) décembre 1848 et publié dans le tome VII du Bulletin de la Classe physico-mathématique pagg. 337 — 369 *). Il avait le triple but: d'abord, de servir de préface aux *Commentationes arithmeticae*, c'est à dire de mettre l'Académie et les lecteurs de cet ouvrage au courant des principes par lesquels les éditeurs s'étaient fait guider dans cette publication, et de la marche qu'ils se proposaient de suivre dans la publication des volumes subséquents; ensuite, de porter à la connaissance du monde savant le catalogue complet et raisonné des oeuvres *posthumes* et *inédites* du grand géomètre de Pétersbourg, toutes *autographes* et que le hasard m'avait fait découvrir, depuis 1844; enfin, de compléter la liste de ses oeuvres publiées, liste qui, bien que considérablement augmentée déjà, en 1843, dans la *Correspondance* (Tome 1er pagg. LI — CXXI) ne lais-

*) Il en fut tiré une édition à part portant le double titre: 1 P. H. Fuss, Nachricht über eine Sammlung unedirter Handschriften Leonhard Euler's und über die begonnene Gesammtausgabe seiner kleineren Schriften. 2. Ueber *Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae* etc. Bericht an die K. Akad. d. W. von P. H. Fuss (zugleich als Vorrede zu obigem Werke). St. Petersburg, 1849. 8vo. Les citations des pages en parenthèses se rapporteront à cette édition.

sait cependant pas que d'offrir encore quelques lacunes et inexactitudes.

Quant à la collection des oeuvres inédites, il y avait très peu de chances à la voir complétée encore par de nouvelles découvertes; les deux sources principales qui avaient fourni cette collection — les Archives de l'Académie et celles de la famille Euler — ayant été entièrement épuisées. Cependant, le hasard nous a singulièrement servi en cette occasion. M. Posselt, adonné à des études historiques à Moscou, et ayant libre accès non seulement aux archives du gouvernement, mais encore à de nombreuses collections privées que récèle l'antique capitale, a été assez heureux pour rencontrer, dans l'une de ces dernières, deux mémoires complets, autographes et inédits d'Euler qu'il a su se procurer à l'effet de les offrir à l'Académie. Ces mémoires nettement écrits portent les titres suivants:

1. Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime investiganda. 15 pages in 4to d'écriture serrée §§ 1—19.
2. De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur. 16 pages in 4to §§ 1 — 31 avec une planche renfermant 5 figures *).

Il était naturellement plus facile de compléter la liste des oeuvres publiées de notre immortel Géomètre. Aux *dix-sept* numéros dont nous avions, en 1848, enrichi notre liste de 1843 (voir notre premier rapport pp. 363 à 366 (éd. sép. pp. 40 — 46)) nous pouvons en ajouter encore trois, savoir:

No. 18.

De Indorum anno solari astronomico, mémoire renfermé dans l'ouvrage intitulé: *Bayeri Historia regni Graecorum Bactriani.* Petrop. 1738. 4to depuis la page 201 à la p. 213. Je dois cette notice à M. Weichhard, inspecteur du magasin des livres de fonds de l'Académie. L'édition de ce livre est épui-

*) Voir à ce sujet le Compte rendu à la page 154 de ce tome IXème du Bulletin.

sée depuis longtemps, car on ne le rencontre dans aucun de nos catalogues; le mémoire d'Euler qu'il renferme a cela de particulier, que, dans une Collection des Oeuvres complètes de notre Géomètre, il devrait constituer une division à part, étant le seul qui traite un sujet de *Chronologie*.

No. 19.

La bibliothèque publique de Bâle possède un livre intitulé:

Vernünftige Gedanken von dem Raume, dem Orth, der Dauer und der Zeit; theils aus dem Französischen des Herrn Professor Eulers übersetzt, theils aus verschiedenen ungedruckten Briefen dieses berühmten Mannes mitgetheilt. Nebst einigen Anmerkungen und einem Versuche einer unpartheyischen Geschichte der Streitigkeiten über diese Dinge. Quedlinburg, bei Gottfried Heinrich Schwans Witwe. 1763 petit in-8vo (préface et 231 pages).

L'éditeur ne s'est point nommé; le livre contient, en fait de travaux d'Euler, 1. une traduction allemande de ses considérations sur l'espace et le temps, publiées en français dans le tome IV des Mémoires de l'Académie de Berlin (Année 1748 p. 324) N. 746 de notre Liste (B); 2. une lettre d'Euler à l'éditeur du 16 février 1760, p. 18. 19; 3 et 4. deux lettres d'Euler à un nommé D. Venzky, recteur de l'école de Prenzlau, du 5 janvier et du 2 août 1751 pp. 41 — 43 et 100 à 104.

No. 20.

A la même bibliothèque se trouve

Jos. Strepling, in Univ. Pragensi disciplinarum mathem. et physic. Directoris etc. Litterarum Commercium eruditi cumprimis argumenti. Wratisl. 1782. 8vo.

Ce livre renferme aussi deux lettres d'Euler dont le contenu est indiqué sommairement ainsi qu'il suit:

1. pagg. 273 — 275 Lit. XLI Berol. 31 Aug. 1748. Gratam fuisse Academiae factam ab eo (Strepling) defectionis

lunaris observationem. Mittit ei eandem eclipsin Berolini observatam. Optat ab eo eclipses satellitum Jovis notari et ad Academiam transcribi.

2. pagg. 420 — 426 Lit. LXVI Berol. 20 Maji 1755. Explicat momentum inertiae tanquam principium, ex quo omnium motuum, qui circa quemvis axem absolvuntur, determinationes petendae.

Nous devons les notices ci-dessus à l'obligeance de M. Pierre Mérian, président du Collége d'instruction publique à Bâle.

Relativement aux doutes énoncés dans notre premier rapport (ll. cc. p. 367. 368 et p. 47 et 48), ce même estimable savant nous écrit ce qui suit: «Incidemment je ferai mention encore de *l'Encyclopédie des changes* à laquelle vous faites allusion dans votre rapport et qui ne regarde aucunement notre Euler. Notre bibliothèque possède cet ouvrage dont voici le titre complet:

> Allgemeine Wechſelencyclopädie, oder theoretiſche und practiſche Einleitung in die Wechſelwiſſenſchaften, von Martin Euler (Rechnungslehrer in Carlsruhe). Frankfurt a. M. 1787. 8vo.

Il faut vous dire que le nom Euler est assez répandu dans notre voisinage, au pays de Bade.»

Ceci confirme ma supposition de 1848 (ll. cc. pp. 368. 48).

Nous devons enfin aux soins de M. Mérian l'éclaircissement le plus complet d'une singulière supercherie littéraire que j'avais déjà soupçonnée dans mon rapport. M. Mérian m'écrivit qu'une traduction française de l'Arithmétique d'Euler, faite par Bernoulli, existe réellement, et il eut la bonté de me transcrire littéralement le titre que voici:

> *L'Arithmétique raisonnée et démontrée, Oeuvres posthumes* (sic!) *de Léonard Euler, traduite en françois par Daniel* (sic!) *Bernoulli, Directeur de l'Observatoire de Berlin* (sic!) *etc. etc. Corrigée* (sic!) *et considérablement augmentée par M. De la Grange* (sic!). Berlin, chez Voss et fils et Decker et fils. 1792. 8vo.

Or l'Arithmétique d'Euler parut à St.-Pétersbourg, en langue allemande, en deux volumes, sous le titre:

> Einleitung zur Rechenkunſt zum Gebrauch des Gymnasii bei der Kaiſerlichen Academie der Wiſſenſchaften in St. Petersburg. Gedruckt in der Academiſchen Buchdruckerei. 8vo. T. I. 1738. Préface et 277 pag. T. II. 1740. 228 pag.

Nicolas Fuss, dans son Eloge, en dit: «Avant la publication de son traité sur la musique, Euler avait déjà mis au jour une *Introduction à l'Arithmétique*. Plusieurs Académiciens s'étaient chargés, sur la demande de leur Chef, de composer des ouvrages élémentaires, et notre Géomètre ne crut point s'abaisser par un travail inférieur à ses forces, mais ennobli par son but qui était l'instruction publique.»

Comparons, par pure curiosité, la définition de l'Arithmétique, telle que la donnent les deux ouvrages, à la première page:

L'Arithmétique raisonnée.

Par le moyen de l'Arithmétique, on apprend à faire toute sorte de calculs, et à représenter en écrit tout nombre proposé par augmentation ou par diminution.

L'Introduction à l'Arithmétique.

L'Arithmétique, ou la science du calcul, nous enseigne la nature et la propriété des nombres; elle nous fournit, en outre, les règles, au moyen desquelles on peut calculer ou résoudre toutes sortes de problèmes qui se rencontrent dans la vie commune.

On voit, au premier abord, qu'à coup sûr la première de ces définitions n'est pas une traduction de la seconde; effectivement, les deux ouvrages sont tellement différents entre eux qu'on peut avancer hardiment que l'auteur de la prétendue traduction n'a jamais vu son original. Mais admettant même le contraire, de quel droit une traduction publiée en 1792, d'un ouvrage qui a paru en 1738, serait-elle une *oeuvre posthume* de l'auteur? Jamais Daniel Bernoulli n'a traduit un ouvrage d'Euler, et jamais non plus il n'a été Directeur de l'Observatoire de Berlin. Mais on voit par *l'Avertissement de*

l'Éditeur de l'Arithmétique raisonnée, que cet ouvrage se donne pour traduction *du même* Bernoulli qui, antérieurement, avait déjà traduit en français l'Algèbre d'Euler; or, c'était Jean, et non Daniel, et celui-là était réellement Directeur de l'Observatoire de Berlin. Il est à présumer que les savantes notes dont Lagrange avait enrichie la traduction française de l'Algèbre, ayant donné une grande vogue à cet ouvrage classique, MM. Voss et Decker, libraires industrieux de Berlin, ont voulu essayer de donner cours à un ouvrage fort médiocre en le plaçant gratuitement sous l'égide usurpée de trois grands noms. M. Mérian ayant poussé son obligeance jusqu'à vouloir m'envoyer l'exemplaire de ce livre curieux qui appartient à la Bibliothèque publique de Bâle, j'ai pu voir qu'on ne l'a pas même jugé digne des frais de reliure. L'exemplaire est broché en papier gris, et la même main qui a nettement écrit le titre au dos du livre (à une époque assez reculée, à en juger par l'encre jaunie) a ajouté deux signes d'interrogation aux deux noms Euler et Lagrange, et deux signes d'exclamation aux noms des libraires Voss et Decker; preuve, qu'alors déjà l'authenticité de l'ouvrage a été révoquée en doute. Malheureusement, après 47 ans, une société de géomètres belges n'a point échappé à une embûche aussi grossièrement dressée, et a naïvement reproduit ce livre apocryphe, le donnant de bonne foi pour *l'Arithmétique d'Euler*. Il semblerait cependant que les corrections seules que l'éditeur de Bruxelles a jugé nécessaire d'y apporter, auraient dû déjà lui faire concevoir des doutes sur l'authenticité de l'ouvrage.

Comme nous voilà sur le chapitre de l'histoire des travaux d'Euler, il ne sera peut-être pas sans intérêt d'entendre les voix de quelques critiques contemporains, ses pairs et les rivaux de sa gloire. L'occasion m'en a été fournie par une correspondance que j'ai eue avec M. Arago au sujet du beau précis de la vie de Condorcet, publié par cet illustre savant.

En janvier 1850, j'adressai à M. Arago une lettre conçue en ces termes:

«Monsieur et très illustre Confrère, je viens de lire ou d'étudier plutôt votre excellente biographie de Condorcet, et je ne puis m'empêcher de vous exprimer tout le plaisir que m'a procuré cette intéressante lecture. Or ceci, vous le devinez bien, ne peut pas être l'unique but de ma lettre; il y aurait trop de présomption de croire que mon faible témoignage puisse ajouter quelque chose à la satisfaction intime qu'une oeuvre aussi belle et aussi méritoire doit, par elle même, causer à son auteur. Il m'importe, au contraire, de m'éclairer sur un passage secondaire qui m'intéresse particulièrement parce qu'il concerne l'histoire des travaux d'Euler, objet, comme vous savez, de mes études de prédilection. Vers la fin de votre pièce, je trouve le passage suivant:

> «Lagrange et d'Alembert n'accordaient aucune estime aux Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne. Ils en étaient venus, en les assimilant à une erreur de la vieillesse de Newton*), jusqu'à les appeler «le Commentaire sur l'Apocalypse d'Euler.»»

Vous ignorez peut-être qu'Euler avait effectivement publié en 1747 **) (à Berlin) une petite brochure portant le titre allemand: «*Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister*»***) c'est à dire: La Révélation divine, défendue contre les objections des esprits forts. Or *Offenbarung* est aussi le mot dont on se sert communément pour dé-

---

*) M. Brewster, dans son excellente biographie de Newton, a déjà fait observer à M. Biot, que si erreur il y a à se hasarder dans les mystères de l'Apocalypse, chez Newton, au moins, ce ne sont pas les années qui l'ont poussé dans cette prétendue fausse route; il était dans la force de l'âge viril, à peine âgé de 50 ans.

**) A l'âge de 40 ans.

***) On vient de la réimprimer à Berlin, et c'est ainsi que j'en ai eu la première connaissanse. Tout me porte à croire que mon père même, le premier biographe d'Euler, ne l'avait jamais vue. Comme de raison, je me suis empressé d'envoyer à M. Arago un exemplaire de cet intéressant opuscule qui, bien que traitant un sujet de théologie, est cependant empreint du sceau de cet esprit géométrique qui caractérise tous les ouvrages philosophiques de notre illustre savant.

signer l'Apocalypse; ce qui fait que bien des personnes (et je ne m'en excepte pas) ne connaissant ledit opuscule que par son titre, l'ont pris pour un *Commentaire sur l'Apocalypse*. — Ne serait-ce donc pas cet écrit là plutôt auquel Lagrange et d'Alembert ont refusé leur estime et qu'ils ont assimilé à une erreur de la vieillesse de Newton? Cela s'expliquerait assez par l'esprit du siècle, et Condorcet, à en juger par son portrait que vous avez tracé de main de maître, se serait très probablement trouvé d'accord à ce sujet avec ses illustres amis. Les lettres d'Euler au contraire, quelque surannées qu'elles puissent paraître de nos jours *), ont dû mériter, ce me semble, lors de leur publication, les suffrages de Lagrange et de d'Alembert aussi bien que de Condorcet. On n'a qu'à voir ce que ce dernier, dans son Éloge d'Euler, dit au sujet de cet ouvrage, pour rendre au moins suspect un jugement aussi diamétralement opposé de la part de ses deux grands contemporains, amis d'Euler **). Vous m'obligeriez infiniment en m'indiquant la source à laquelle vous avez puisé votre assertion, à moins que ma supposition ne soit

*) Vu les progrès immenses des sciences qui en font l'objet.

**) Le genre de ces lettres, assez commun aujourd'hui, était nouveau du temps d'Euler où les sciences sortaient à peine de leur rôle d'attributions exclusives des initiés. Voici ce que Condorcet en dit: « — ouvrage précieux par la clarté singulière avec laquelle l'auteur y a exposé les vérités les plus importantes de la mécanique, de l'astronomie physique, de l'optique et de la théorie des sons, et par des vues ingénieuses, moins philosophiques, mais plus savantes que celles qui ont fait survivre la pluralité des mondes de Fontenelle au système des tourbillons. Le nom d'Euler, si grand dans les sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses ouvrages, destinés à développer ce que l'analyse a de plus épineux et de plus abstrait, donnent à ces lettres si simples, si faciles, un charme singulier. Ceux qui n'ont pas étudié les mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un ouvrage d'Euler, lui savent gré de s'être mis à leur portée, et ces détails élémentaires des sciences acquièrent une sorte de grandeur par le rapprochement qu'on en fait avec la gloire et le génie de l'homme illustre qui les a tracés. » M. Arago nous apprend même que ce fut Condorcet qui, par une édition parisienne, donna de la vogue à cet ouvrage en France.

fondée. Dans ce cas, vous trouverez certainement et vous saisirez l'occasion, en rectifiant le passage cité, ou en le faisant disparaître de votre morceau classique, de rendre justice à la fois à trois génies immortels dont l'humanité se glorifie.

Je sais d'ailleurs l'estime et l'admiration sincères que vous professez pour Euler, et j'ai été frappé des belles paroles par lesquelles vous venez de nous révéler, pour ainsi dire, le secret de sa prodigieuse fécondité : « Il calculait, dites vous, sans le moindre effort apparent, comme les hommes respirent, comme l'aigle se tient dans les airs. » Ces paroles simples renferment une si haute vérité, elles caractérisent si parfaitement la nature du génie d'Euler, elles résument si bien et d'un seul trait de plume, ce que les Eloges développent longuement, que je vous demanderais la permission de les préposer, en guise d'épigraphe, aux Oeuvres posthumes d'Euler que je publie dans ce moment. »

M. Arago me répondit sous la date du 1er juillet 1850 :

« — J'ai reçu votre lettre avec une vive reconnaissance; il m'est doux de penser que vous, si bon juge en pareille matière, avez bien voulu donner votre approbation à ma biographie de Condorcet. Soit dit en passant, depuis sa publication, vous êtes la première personne qui m'en ait parlé. Ce n'est pas ainsi que les choses se passaient dans le siècle dernier; mais tout va en se perfectionnant, à reculons. La phrase qui vous a si justement blessé, est tirée textuellement d'une lettre de D'Alembert à Lagrange. Je me rappelais avoir vu des paroles plus inconvenantes encore dans des lettres autographes de Lagrange à D'Alembert. Cette correspondance était sortie de mes mains; j'ai eu quelque peine à me la procurer de nouveau; cela vous expliquera le long délai qui s'est écoulé entre la date de votre lettre et ma réponse. Pardonnez moi si je transcris ici ces passages que je condamne de toute non ame; le désir de me justifier à vos yeux me fait passer sur toute autre considération . . . . »

A cette lettre étaient annexés les extraits suivants d'une correspondance inédite entre Lagrange, D'Alembert et Condorcet. Nous ne pensons pas faire tort à ces noms illustres, aussi peu qu'à notre immortel Euler, en les repro-

duisant ici; l'auréole brillante qui entoure ces gloires littéraires du siècle dernier n'en perdra rien de son éclat; je dirai plus: il est presque consolant de voir que ces natures d'élite n'étaient point exemptes des petites faiblesses inhérentes à la nature humaine.

Extrait d'une lettre de Lagrange à D'Alembert.

Berlin 2 juin 1769.

«Les ouvrages que M. Euler publie à Pétersbourg étaient faits depuis longtemps, et n'étaient restés en manuscrits que faute d'un libraire qui voulût s'en charger. Il y en a même un qu'il n'aurait pas dû publier pour son honneur; ce sont *ses lettres* à une princesse d'Allemagne.

Lagrange à D'Alembert.

2 août 1769.

J'avais compté vous envoyer en même temps les lettres de M. Euler que vous souhaitez de voir, mais comme elles auraient trop grossi le paquet, je les remets à une autre occasion; d'autant plus qu'elles n'ont guère d'autre mérite que d'être sorties de la plume d'un grand géomètre. Je serais fort curieux de savoir s'il a concouru pour le prix, et si sa théorie est telle qu'il l'a vantée; je ne puis excuser la démarche qu'il a faite d'annoncer sa découverte longtemps avant de la donner au public, qu'en supposant qu'il ait voulu par là décourager ceux qui auraient pu concourir pour le prix; en quoi je ne doute pas qu'il ait parfaitement réussi. Au reste, je souhaite fort qu'il puisse tenir tout ce qu'il a promis, et j'applaudirai de tout mon coeur à ses succès.

Du même au même.

Berlin 20 décembre 1770.

Je vous enverrai les lettres de M. Euler à une princesse d'Allemagne que vous souhaitez de voir, et qui vous amuse-

ront peut-être par les sorties que vous y trouverez contre les esprits forts.

Lagrange à D'Alembert.

Berlin 24 février 1772.

Il me semble que ces recherches (sur la comète de 1769) ne répondent pas, à beaucoup près, au moins quant à la partie analytique, à la manière un peu emphatique dont M. Euler les avait annoncées.

Ne vous semble-t-il pas que la haute géométrie va un peu en décadence? Elle n'a d'autre soutien que vous et M. Euler, car pour moi je ne puis vous suivre que de loin.

Berlin 26 août 1770.

Je vous suis bien obligé du précis que vous avez bien voulu me donner de la pièce d'Euler sur la Lune. Non seulement je ne vois pas que sa méthode puisse avoir quelque avantage sur les méthodes connues, mais il me paraît au contraire qu'elle leur est même inférieure à plusieurs égards; d'ailleurs, cette méthode ne contient rien, ce me semble, qui puisse être pris pour une découverte, et encore moins pour une découverte telle que M. Euler l'avait annoncée. J'aurais bien de la peine à passer une pareille fanfaronnade (!) à un écolier; du moins j'en concevrais une très mauvaise opinion, et je crois que je n'aurais pas tort *).

---

*) Voici, à ce sujet, un passage d'une lettre qu'Euler adressa à Lagrange, sous la date du 20 (31) mai 1771: «Depuis environ un an, la théorie de la Lune m'a tellement occupé, que je n'ai presque pu penser à autre chose. Trois habiles calculateurs (son fils Jean-Albert, Lexell et Krafft) ont bien voulu m'assister pendant tout ce temps; quoique nous ayons rencontré mille obstacles, nous les avons

Lagrange à Condorcet.

Berlin 13 juin 1770.

Je suis très aise que M. Euler ait été en partie au moins récompensé de son travail et de sa bonne volonté; il est vrai qu'il y a eu un peu de fanfaronnade dans la démarche qu'il a faite d'écrire des lettres circulaires à toutes les académies pour leur annoncer sa prétendue solution du problème des trois corps, mais aussi, la déclaration que vous faites dans votre programme doit lui servir d'admonition salutaire.

Turin 1 janvier 1766.

Avez-vous lu le 3ème volume de la Mécanique d'Euler? Il y a beaucoup de verbiage, mais il contient d'excellentes choses *).

On voit par ces passages, d'abord, que M. Arago a eu parfaitement raison de dire que «Lagrange et d'Alembert n'accordaient aucune estime aux Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne»; il est certain, au moins, que ce premier essai de populariser, ou de mettre à la portée des gens du monde les sciences abstraites, n'était point du goût de Lagrange. Quant à la seconde moitié de la phrase de M.

---

surmontés, presque tous, assez heureusement, de sorte que nos travaux sur cette manière se trouvent actuellement sous presse. Jamais recherche n'a demandé autant de calculs pénibles et autant d'adresse dans l'exécution; il s'en faut cependant de beaucoup que cette matière soit entièrement épuisée; nous devons nous contenter, si les tables que nous en avons tirées s'accordent mieux encore avec le ciel, que celles de MM. Mayer et Clairaut, et si leur usage est beaucoup plus facile.»

*) Il s'agit, à ce qu'il paraît, de la *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* dont la première édition parut en 1765. Ou je me trompe, ou ce que Lagrange désigne par *verbiage* est précisément une des qualités qui assurent aux oeuvres d'Euler leur mérite immortel. Quel est le Géomètre qui, de nos jours encore, oserait se dispenser d'étudier Euler? — Les travaux de D'Alembert, son cadet en âge, n'intéressent, tout au plus, que l'histoire littéraire.

Arago, il est évident qu'elle n'est pas une citation textuelle des paroles d'un tiers, et il est toujours encore permis de supposer que l'expression de *Commentaire sur l'Apocalypse*, si toutefois elle se rencontre dans une lettre de D'Alembert, ait été gratuitement rapportée aux *Lettres*, M. Arago ignorant alors l'existence du petit opuscule théologique cité ci-dessus, dont D'Alembert, qui vécut longtemps, avec Euler, à Berlin, quoique à une époque postérieure, pouvait bien avoir connaissanse. Toujours est-il, que quelle que soit l'affinité d'intelligence et de génie de ces grands hommes, leur manière de voir en matière de religion était immensément différente. Le reste du blâme renfermé dans ces passages frappe une faiblesse connue et souvent reprochée à Euler, faiblesse que Lagrange flétrit même du nom peu courtois de *fanfaronnade*. — Est-il donc si étonnant, après tout, qu'un homme supérieur, habitué à mesurer la valeur de ses travaux, non par les efforts qu'ils lui avaient coûtés, mais par les tentatives infructueuses, auxquelles, avant lui, s'était souvent brisé le génie des premiers géomètres de son temps, qu'un pareil homme, dis-je, acquière une telle conscience de sa propre force, qu'il lui échappe parfois d'en faire parade et de produire ses succès sous forme de défis? On sait que Daniel Bernoulli, en véritable ami, lui a souvent directement reproché cette faiblesse, et qu'Euler, loin de s'en offenser, lui rendait la pareille, en tâchant, entre autres, de le réconcilier avec son père, et en lui faisant sentir les torts qu'il avait eus envers lui.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. IX. No. 22.*)

28 Februar
12 März 1851.

Ueber den Werth des Kettenbruchs

$$\cfrac{a+b}{a+1+\cfrac{b+1}{a+2+\cfrac{b+2}{a+3+\text{etc.}}}}$$

wenn b grösser als $a+1$ ist, von Herrn Observator Dr. C. Clausen in Dorpat.

Obgleich die oben stehende Function so ausserordentlich einfach ist, dass man auf den ersten Anblick glauben möchte, der analytische Ausdruck derselben müsse äusserst leicht zu finden sein: so stösst man doch bei der Bestimmung desselben auf ganz unerwartete grosse Schwierigkeiten. Euler, der mehrmals den einfachsten Fall untersuchte, wenn a und b ganze positive Zahlen sind, gelangte nur durch sehr sinnreiche Methoden zur Bestimmung des Werthes in diesem Falle. Das gefundene Resultat, dass diese Werthe rationelle Brüche seien, war um so auffallender, als für ganze kleinere und negative Werthe von b der Bruch transcendent wird, und von der Basis der natürlichen Logarithmen abhängt.

Die Ergebnisse der Untersuchungen von Euler und Andern in Beziehung auf diesen Kettenbruch hat Professor Stern in Göttingen im Crelle'schen Journale für Mathematik Bd. 8, Seite 42 nach einer eigenen Methode entwickelt. Es ergiebt sich für den Werth des Kettenbruchs der Quotient zweier hypergeometrischen Reihen, deren Werthe blos in dem Falle,

dass sie abbrechen, oder nur eine endliche Anzahl Glieder enthalten, angebbar sind. Hiedurch werden die Euler'schen Resultate sämmtlich dargestellt, und zugleich die Fälle, wenn $b-a$ eine ganze positive Zahl ist, ohne dass a und b ganze Zahlen sind. Wenn b aber eine ganze Zahl ist, und a ein Bruch, so stimmt der nach der Formel berechnete Werth durchaus nicht mit dem directe berechneten überein, z. B. wenn $a=\frac{1}{2}$, $b=2$.

Es veranlasste mich dieser Umstand, die Theorie dieses Kettenbruchs ausführlicher, und wenn möglich, in aller Allgemeinheit zu entwickeln. Zwar ist mir das letztere nicht gelungen, jedoch da ich auch für die Fälle, wenn b eine ganze Zahl ist, a aber ein Bruch, die wahren Werthe gefunden habe, so glaube ich meine Arbeit als nicht ganz nutzlos darlegen zu dürfen.

1. Es sei

$$F(\lambda)=\frac{b+\lambda-1}{a+\lambda+F(\lambda+1)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

in welcher Formel $F(\lambda)$ eine Function der ganzen Zahl λ bedeutet. Setzt man hierin $F(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{\psi(\lambda-1)}$, worin $\psi(\lambda)$ eine andere Function von λ bezeichnet, so findet sich

$$(b+\lambda-1)\psi(\lambda-1)-(a+\lambda)\psi(\lambda)-\psi(\lambda+1)=0 \ldots (2)$$

Diese Gleichung ist eine endliche Differenzengleichung zweiten Grades; ihr allgemeines Integral enthält also zwei willkürliche Constanten. Nach Bestimmung derselben hat man den Werth des Kettenbruchs: $a+\frac{\psi(1)}{\psi(0)}$.

Man sieht leicht, dass die vollständige Integration der Gleichung nur die Kenntniss von zweien *verschiedenen particulären* Integralen erfordert. Denn es seien diese, die beide der Gleichung (2) Genüge thun: $\psi(\lambda)=\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)=\chi(\lambda)$; so ist das allgemeine Integral $\psi(\lambda)=k\varphi(\lambda)+k'\chi(\lambda)$, worin k und k' die erwähnten Constanten bezeichnen.

2. Es sei

$$y=x^{-(b-a-2)}(x-1)^{(b+\lambda-1)}e^{-x},$$

(e bedeutet die Basis der natürlichen Logarithmen) so wird:

$$dy = \left.\begin{aligned} &-(b-a-2)x^{-(b-a-1)}(x-1)^{(b+\lambda-1)} \\ &+(b+\lambda-1)x^{-(b-a-2)}(x-1)^{(b+\lambda-2)} \\ &-x^{-(b-a-2)}(x-1)^{(b+\lambda-1)} \end{aligned}\right\} e^{-x}.dx$$

welche Gleichung nach einer leichten Reduction sich in folgende verwandelt:

$$dy = \left\{ -(x-1)^{b+\lambda} + (a+\lambda)(x-1)^{b+\lambda-1} + (b+\lambda-1)(x-1)^{b+\lambda-2} \right\} x^{-(b-a-1)} e^{-x} dx.$$

Wenn $b+\lambda > 1$ ist, so ist $\int dy = 0$ zwischen $+1$ und $+\infty$ genommen. Setzt man demnach:

$$\int_1^{\infty} x^{-(b-a-1)}(x-1)^{b+\lambda-1} e^{-x}.dx = f(\lambda) \quad \ldots (3)$$

so wird:

$$0 = -f(\lambda+1) + (a+\lambda) f(\lambda) + (b+\lambda-1) f(\lambda-1).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (2), so findet man:

$$\psi(\lambda) = (-1)^{\lambda} f(\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

welches demnach ein particuläres Integral der Gleichung (2) ist.

3. Ein zweites particuläres Integral bildet die schon bekannte, für ganze Werthe von a und b geltende Reihe:

$$f_1(\lambda, x) = 1 + \frac{b-a-2}{1}(b+\lambda-1)x + \frac{(b-a-2)(b-a-3)}{1 \quad 2}(b+\lambda-1)(b+\lambda-2)x^2 + \ldots$$

worin das Gesetz der Fortschreitung augenfällig ist. Auf gleiche Weise wie Gauss in den *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, findet man für diese Reihe:

$$(b+\lambda-1)x\ f_1(\lambda-1, x) - \left\{(a+\lambda+1)x - 1\right\} f_1(\lambda, x) - f_1(\lambda+1, x) = 0$$

also auch:

$$(b+\lambda-1) f_1(\lambda-1, 1) - (a+\lambda) f_1(\lambda, 1) - f_1(\lambda+1, 1) = 0 \ldots (5)$$

welches mit der Gleichung (2) verglichen ein zweites particuläres Integral derselben giebt:

$$\psi(\lambda) = f_1(\lambda, 1).$$

4. Wir haben also, vorausgesetzt, dass die beiden Integrale sich nicht blos durch einen constanten Factor unterscheiden, das allgemeine Integral der Gleichung (2):

$$\psi(\lambda) = (-1)^{\lambda} k f(\lambda) + k' f_1(\lambda, 1)$$

$$F(\lambda) = \frac{(-1)^{\lambda} k f(\lambda) + k' f_1(\lambda, 1)}{(-1)^{\lambda-1} k f(\lambda - 1) + k' f_1(\lambda - 1, 1)} \cdots\cdots (6)$$

Bestimmt man nun die Constanten so, dass $F(m) = 0$, welches immer geschehen kann, so bricht der Kettenbruch beim $m$ten Gliede ab, und man hat den Werth der ersten m Glieder desselben:

$$a + \frac{-kf(1) + k' f_1(1, 1)}{kf(0) + k' f_1(0, 1)}.$$

5. Der Werth von $F(\lambda)$ für ein sehr grosses λ lässt sich näherungsweise folgendermaassen finden. Es ist für ein sehr grosses x der Werth des Differentialquotienten, bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ genau $x^{a+\lambda} e^{-x}$, welches für $x = a + \lambda$ ein Maximum hat. Betrachten wir nun zwei Differentialquotienten für die beiden Werthe von x, u und $u + \frac{\lambda + a}{2}$, so findet sich das Verhältniss derselben:

$$\frac{u^{-(b-a-1)} (u-1)^{b+\lambda-1} e^{-u}}{\left(u + \frac{\lambda+a}{2}\right)^{-(b-a-1)} \left(u - 1 + \frac{\lambda+a}{2}\right)^{b+\lambda-1} e^{-u-\frac{\lambda+a}{2}}}.$$

Da angenommenermaassen $b > a + 1$, so ist

$$\left(\frac{u-1}{u}\right)^{-(b-a-1)} = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-(b-a-1)} > \left(\frac{u - 1 + \frac{\lambda+a}{2}}{u + \frac{\lambda+a}{2}}\right)^{-(b-a-1)}$$

oder

$$\left(1 - \frac{1}{u + \frac{\lambda+a}{2}}\right)^{-(b-a-1)}.$$

Miltiplicirt man das obige Verhältniss mit

$$\left(\frac{u-1}{u}\cdot\frac{u+\frac{\lambda+a}{2}}{u-1+\frac{\lambda+a}{2}}\right)^{-(b-a-1)},$$

so erhält man demnach ein Product, das grösser ist als das angegebene Verhältniss:

$$\frac{(u-1)^{a+\lambda}e^{-u}}{\left(u-1+\frac{a+\lambda}{2}\right)^{a+\lambda}e^{-u-\frac{a+\lambda}{2}}} = \frac{(u-1)^{a+\lambda}}{\left(u-1+\frac{a+\lambda}{2}\right)^{a+\lambda}e^{-\frac{\lambda+a}{2}}}.$$

Nimmt man nun $u-1<\frac{\lambda+a}{2}$, so ist das letzte Verhältniss noch kleiner als: $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^{\lambda+a}$. Für grössere Werthe von $a+\lambda$ ist dieses Verhältniss weit kleiner als $\frac{1}{a+\lambda}$. Man kann also, wenn man Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ vernachlässigt, den Differentialquotienten für $x=u$ gegen den für $x=u+\frac{a+\lambda}{2}$ vernachlässigen, so lange $u<\frac{a+\lambda}{2}$. Also auch den Theil des Integrals, der zwischen $x=1$ und $x=\frac{\lambda+a}{2}$ liegt, gegen den zwischen $x=\frac{\lambda+a}{2}$ und $x=a$, und um so mehr, da der Differentialquotient immer positiv ist, gegen den Theil von $x=\frac{\lambda+a}{2}$ bis $x=\infty$. Nun ist

$$f(\lambda)=\int_1^{\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-(b-a-1)}(x-1)^{\lambda+a}e^{-x}dx$$

und wenn $x>\frac{a+\lambda}{2}$, die Grösse $\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-(b-a-1)}$ bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ von der Einheit unter

schieden. Es wird daher bis auf Grössen dieser Ordnung:

$$f(\lambda) = \int_0^\infty z^{\lambda+a} e^{-(1+z)} dz = \frac{\Gamma(\lambda+a+1)}{e} \quad \ldots\ldots (7)$$

für sehr grosse λ bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ genau. Die Function Γ ist nach der Legendre'schen Bezeichnung genommen [1]).

6. Die Function $f_1(\lambda, 1)$ giebt nur in zwei Fällen einen angeblichen Werth, wenn sie nämlich aus einer endlichen Anzahl Glieder besteht.

1) Wenn $b-a-2$ eine ganze Zahl $= n$ ist, dann ist die Anzahl der Glieder offenbar $n+1$. Das letzte Glied ist

$$(b+\lambda-1)(b+\lambda-2)\ldots(b+\lambda-n).$$

Die vorhergehenden sind in Beziehung auf dieses blos von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ etc. Vergleicht man den Werth mit demjenigen von $f(\lambda)$ für ein sehr grosses λ, so ist ersichtlich, dass er verschwindet; dass man also in der Gleichung (6) k gegen k' äusserst klein setzen müsse, damit $F(\lambda)=0$ werde. Der Nenner des Bruchs wird in diesem Falle nicht verschwinden, da die beiden Glieder positiv werden, weil beide Functionen ihrer Natur nach positiv sind. Dieser Umstand zeigt, dass die beiden Functionen wesentlich verschieden sind, und dass also (6) den vollständigen Werth giebt. Es ist daher in diesem Falle der Werth, gegen den der Kettenbruch convergirt: $a+\frac{f_1(1,1)}{f_1(0,1)}$ und man sieht, dass derselbe für alle Fälle, wenn $b-a$ eine ganze Zahl, gültig ist.

2) Wenn b eine ganze Zahl ist, a aber ein Bruch. Dann hat man für ein sehr grosses λ, das letzte Glied von $f_1(\lambda, 1)$

---

1) Siehe Traité des fonctions elliptiques T. II. Chap. VII.

$$\frac{(b+\lambda-1)(b+\lambda-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(b+\lambda-2).(b+\lambda-1)}\cdot(b-a-2)(b-a-3)\ldots(-a-\lambda)=$$

$$(-1)^{b+\lambda-1}\frac{\Gamma(\lambda+a+1)}{\Gamma(a-b+2)}.$$

Vernachlässigt man die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$, so sind die Factoren $\frac{\lambda+a}{\lambda+b-1}$, $\frac{\lambda+a-1}{\lambda+b-2}$ etc. der Einheit gleich. Es folgt also unter dieser Annahme, wenn man die Glieder in umgekehrter Ordnung nimmt:

$$f_1(\lambda, 1)=$$

$$(-1)^{b+\lambda-1}\frac{\Gamma(\lambda+a+1)}{\Gamma(a-b+2)}\left(1-1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right)=$$

$$(-1)^{b+\lambda-1}\frac{\Gamma(\lambda+a+1)}{e\Gamma(a-b+2)}.$$

Mit (7) und (6) verglichen folgt also, dass man setzen könne um $F(\infty)=0$ zu machen:

$$k=(-1)^b,\quad k'=\Gamma(a-b+2),$$

und dass also der Grenzwerth des Kettenbruchs wird:

$$a+\frac{(-1)^{b+1}\,f(1)+\Gamma(a-b+2)\,f_1(1,1)}{(-1)^b\quad f(0)+\Gamma(a-b+2)\,f_1(0,1)},$$

z. B. wenn $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, so ist der Werth des Kettenbruchs:

$$\frac{1}{2}+\frac{-\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^2e^{-x}dx+\Gamma\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}.2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2}.2.1\right)}{\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}(x-1)e^{-x}dx+\Gamma\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}.$$

Setzt man $x=z^2$, so wird

$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^2e^{-x}dx=2\int_1^\infty(z^4-2z^2+1)e^{-z^2}dz,$$

und wenn man $\int_1^\infty e^{-z^2}dz=h$ setzt,

$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^2 e^{-x}dx = \tfrac{1}{2}e^{-1} + \tfrac{3}{2}h.$$

Auf ähnliche Weise ist

$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}(x-1)\, e^{-x}dx = e^{-1} - h.$$

Da nun $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$ ist (π ist halber Kreisumfang), so wird der Werth des Kettenbruchs

$$\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{3}{2}h}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{-1} - h}.$$

Nach Bessel's Tafeln ist $h = 0{,}13940$, also der Bruch in Zahlen 1,340, welches mit der directen Berechnung völlig übereinstimmt. Nach der Formel des Herrn Professor Stern findet man 2,000.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. IX. No.* 23.)

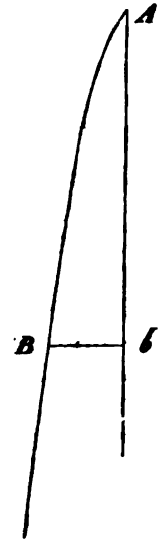
$\frac{16}{28}$ Mai 1851.

Ueber die Form architektonischer Säulen; von Dr. CLAUSEN in Dorpat.

Euler hat, wenn ich nicht irre, zuerst die Theorie der Säulen auf mathematische Grundsätze zurückgeführt, indem er die Dicke derselben von der Höhe und der zu tragenden Last abhängig macht. Die Bestimmung dieser Dicke gründet er auf die Elasticität, vermöge welcher eine senkrecht gestellte Feder von einem aufgelegten Gewichte nur dann gebogen wird, wenn dasselbe eine von der Länge und Dicke abhängige Grösse erreicht hat. Ist dieses Gewicht leichter, so erleidet die Säule durch dasselbe nicht allein keine Biegung, sondern kehrt sogar, wenn sie durch andere Kräfte zufällig gebogen wurde, nachdem diese Kräfte zu wirken aufhören, in ihre gerade Lage zurück.

Nach Euler, der sich blos mit cylindrischen Säulen beschäftigte, nahm Lagrange die Frage auf, und zwar aus einem andern, allgemeinern Gesichtspunkte. Er suchte nehmlich die zweckmässigste Form der Säulenschäfte eben so aus mathematischen Grundsätzen zu bestimmen, wie Euler die Dicke cylindrischer Säulen. Als Eigenschaft der zweckmässigsten Form wurde angenommen, dass sie bei gleicher Höhe und Tragkraft das kleinste Volumen enthalte. Lagrange wandte zur Auflösung dieser viel schwierigern Aufgabe (*Miscellanea Taurinensia Tom. V.*) den von ihm erfundenen Variationscalcul

an, und gelangte zuletzt zu dem sehr auffallenden Resultate, dass die Säule von gleicher Dicke die stärkste bei gleichem Volumen sei. Seit dieser Zeit ist diese Aufgabe meines Wissens nicht berührt worden. — Indem ich die Auflösung auf eine andere Art versuchte, gelang es wider Erwarten, die Differentialgleichung, deren allgemeine Integration Lagrange nicht versucht hatte, auf elliptische Transcendenten zu reduciren, wodurch es sich zeigt, dass die zweckmässigste Form vom Cylinder abweicht, und dass das Volumen dieses bei gleicher Höhe und Tragkraft sich zum Volumen jener Form verhält wie $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$.



1) Ich gehe von Voraussetzungen aus, die mit den von Lagrange angenommenen im Wesentlichen übereinstimmen. Die Axe der Säule bilde in ihrer natürlichen Lage eine grade senkrechte Linie; und die auf derselben senkrechten Schnitte seien alle ähnliche Figuren, deren Schwerpunkte in diese Axe fallen. Die orthographischen Projectionen dieser Querschnitte seien zugleich ähnlich liegend, oder alle zusammenfallende Radien aus ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte haben in je zweien dieser Querschnitte ein constantes Verhältniss. Es sei A das obere Ende der Axe im gekrümmten Zustande. B ein anderer Punkt der Axe; $AB = s$. $Ab = x$ eine senkrechte Grade; $Bb = y$ auf AB senkrecht. Es sei der Winkel der Tangente von B mit Ab, θ; so ist $\tang\theta = \frac{dy}{dx}$. Die Gleichung für die Krümmung der Säule wird nun, wenn man den Flächendurchschnitt in B, z setzt:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{P \cdot k^2 \cdot y}{z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Vernachlässigt man, wie ich in Folgendem thun werde, das Gewicht der Säulentheile, so bedeutet P das im Punkte A senkrecht drückende Gewicht, k^2 eine von der Elasticität und

der Form des Querschnitts abhängige Constante. Da man die Säule als äusserst wenig gekrümmt annimmt, so wird sehr nahe $x = s$, $\tang\theta = \theta = \frac{dy}{ds}$, $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}$ (ds als constant angenommen) und $\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{P.k^2.y}{z^2}$. Man kann ferner die Formel sehr leicht auf den Fall, dass $Pk^2 = 1$ ist, reduciren; denn nimmt man $z = z_1\sqrt{P}.k$, so wird

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{y}{z_1^2}.$$

Man sieht hieraus, dass bei gleicher Höhe und verschiedener Belastung, die Flächendurchschnitte der Säulen sich wie die Quadratwurzeln aus ihrem Belastungsverhältnisse verhalten müssen. Eben so kann man die zu verschiedenen Längen der Säulen bei gleicher Belastung gehörenden Flächeninhalte der Querschnitte bestimmen. Setzt man nemlich $s = \mu . s_1$, wo μ eine Constante ist, und $z_1 = \mu . z_2$ so wird ebenfalls $\frac{d^2y}{ds_1^2} = -\frac{y}{z_2^2}$. Das Volumen der Säule ist im ersten Falle $\int z_1 ds$, im zweiten $\int z_2 ds_1 = \mu^2 \int z_1 ds$. Hat man daher eine Säule, deren Länge S und Volumen V, die eine gegebene Last zu tragen vermag, so ist das Volumen einer ähnlichen Säule von der Länge S', die dieselbe Tragkraft hat: $\frac{S'^2}{S^2} V$.

2) Aus dem Vorhergehenden erhellet, dass man, ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, setzen könne:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{y}{z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Es muss nun z als Function von s so bestimmt werden, dass das Volumen $\int z ds$ ein Minimum werde. Wenn diese Form der Säule richtig bestimmt ist, so muss auch für jeden Theil derselben insbesondere dieses Minimum Statt finden. Am einfachsten wird dieses bewerkstelligt, indem man die zu einer kleinen Biegungsveränderung eines kleinen Stücks der Säule gehörende Veränderung der Dicke bestimmt, und das Integral $\int z ds$ für dieses kleine Stück constant setzt. Es sei also

das Theilchen der Säule zwischen $s = s_0$ und $s = s_0 + s_1$ enthalten, wo s_1 eine kleine Grösse ist. Damit eine Veränderung in der Form und Krümmung dieses Theilchens auf die übrigen Theile der Säule keinen Einfluss habe, oder das Gleichgewicht derselben nicht störe, müssen in den beiden Endpunkten des Theilchens y, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ oder z unverändert bleiben. Man erreicht dieses, wenn man y innerhalb dieses Theilchens um die Grösse $\varkappa\sigma^3\,(s_1 - \sigma)^3$ verändert, wo $\varkappa$ eine kleine constante Grösse bezeichnet, und $\sigma = s - s_0$. Man hat also, wenn man mit y', z' die veränderten y und z bezeichnet:

$$y = y + \varkappa\,(s_1^3\sigma^3 - 3s_1^2\sigma^4 + 3s_1\sigma^5 - \sigma^6)$$

$$\frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} + \varkappa\,(6s_1^3\sigma - 36s_1^2\sigma^2 + 60s_1\sigma^3 - 30\sigma^4)$$

und $$z'^2 = -\frac{y + \varkappa\,(s_1^3\sigma^3 - 3s_1^2\sigma^4 + 3s_1\sigma^5 - \sigma^6)}{\frac{d^2y}{ds^2} + \varkappa\,(6s_1^3\sigma - 36s_1^2\sigma^2 + 60s_1\sigma^3 - 30\sigma^4)}$$

und wenn man blos die erste Potenz von $\varkappa$ berücksichtigt:

$$z' = \sqrt{\frac{-y}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}} + \tfrac{1}{2}\varkappa\sqrt{\frac{-1}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}}\,(s_1^3\sigma^3 - 3s_1^2\sigma^4 + 3s_1\sigma^5 - \sigma^6)$$

$$-\tfrac{1}{2}\varkappa\sqrt{\frac{-y}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^3}}\,(6s_1^3\sigma - 36s_1^2\sigma^2 + 60s_1\sigma^3 - 30\sigma^4).$$

Entwickelt man nun die beiden Grössen $\sqrt{\frac{-1}{y\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}}$ und $\sqrt{\frac{-y}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^3}}$ durch Hülfe des Taylor'schen Lehrsatzes nach Potenzen von σ und integrirt $\int z'\,d\sigma$ von $\sigma = 0$ bis $\sigma = s_1$, so erhält man, wenn man blos Grössen von der Ordnung s_1^7 beibehält:

$$\int_0^{s_1} d\sigma\,(s_1^3\sigma^3 - 3s_1^2\sigma^4 + 3s_1\sigma^5 - \sigma^6) = \frac{1}{140}s_1^7$$

$$\int_0^{s_1} d\sigma\,(6s_1^3\sigma - 36s_1^2\sigma^2 + 60s_1\sigma^3 - 30\sigma^4) = 0$$

$$\int_0^{s_1} \sigma d\sigma\,(6s_1^3\sigma - 36s_1^2\sigma^2 + 60s_1\sigma^3 - 30\sigma^4) = 0$$

$$\int_0^{s_1} \sigma^2 d\sigma\,(6s_1^3\sigma - 36s_1^2\sigma^2 + 60s_1\sigma^3 - 30\sigma^4) = \frac{1}{70}s_1^7.$$

Die übrigen Glieder sind von der Ordnung s_1^8 und höheren Ordnungen, können also vernachlässigt werden. Demnach wird:

$$\int_0^{s_1} z'd\sigma = \int_0^{s_1} zd\sigma + \frac{1}{280}\varkappa s_1^7\sqrt{\frac{-1}{y_0\left(\frac{d^2y_0}{ds^2}\right)}} - \frac{1}{280}\varkappa s_1^7\frac{d^2\sqrt{\frac{-y_0}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^3}}}{ds^2}$$

Damit man also das Volumen des Säulentheilchens unter demselben Drucke nicht verringern könne, muss man haben:

$$\frac{d^2\sqrt{\frac{-y}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^3}}}{ds^2} = \sqrt{\frac{-1}{y\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}} \quad \ldots\ldots (3)$$

3) Die beiden Gleichungen (2) und (3) geben zwei der Grössen x, y, z in Functionen der dritten. Um sie integriren zu können, setze ich:

$$\sqrt{\frac{-y}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^3}} = u \quad \ldots\ldots\ldots (4);$$

und erhalte so:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2} &= -y^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{2}{3}}\\ \frac{d^2u}{ds^2} &= -y^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Es ist ersichtlich, dass man $\frac{d^2u}{ds^2}$ negativ nehmen müsse, wenn man u positiv nimmt, da es $\sqrt{\frac{-1}{y\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}} = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}\sqrt{\frac{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}{-y}}$, und $x = \sqrt{\frac{-y}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)}}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ aber immer negativ ist. Multiplicirt man die Gleichungen (5) mit du und dy resp. und addirt die Producte, und integrirt, so ergiebt sich:

$$\frac{dy \,.\, du}{ds^2} = k - 3y^{\frac{1}{3}}u^{\frac{1}{3}}$$

Es ist aber $uy = \sqrt{\frac{-y^3}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^3}} = z^3$ nach (2). Setzt man nun in dem Punkte der Säule, wo die Tangente an der Curve der Säulenaxe senkrecht ist, den Flächeninhalt des Querschnitts $= 1$, welches man, ohne im Wesentlichen die Allgemeinheit zu beschränken, thun kann, da man nach 1) alle Fälle durch eine einfache Proportion auf diesen reduciren kann; so ergiebt sich, da $\frac{dy}{ds} = 0$ ist, $k - 3 = 0$. Also:

$$\frac{dy \,.\, du}{ds^2} = 3 - 3\,(yu)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Multiplicirt man nun ferner die Gleichungen (5) mit u, y resp., und addirt die Producte zu dem Doppelten der Gleichung (6), so findet sich:

$$\frac{d^2(yu)}{ds^2} = 6 - 8(yu)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Multiplicirt man ferner diese Gleichung mit $2d(yu)$ und integrirt, so erhält man:

$$\frac{[d(yu)]^2}{ds^2} = k_1^2 + 12\,(yu) - 12(yu)^{\frac{4}{3}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Substituirt man hierin $yu = z^3$, so ergiebt sich:

$$ds = \frac{3z^2 dz}{\sqrt{(k_1^2 + 12z^3 - 12z^4)}} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

und wenn v das Volumen bedeutet:

$$d.v = \frac{3z^2 dz}{\sqrt{(k_1^2 + 12z^3 - 12z^4)}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Multiplizirt man die Gleichungen (5) mit u und y resp. und subtrahirt die Producte, so ergiebt sich: $u\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2u}{ds^2} = 0$, wovon das Integral $u\frac{dy}{ds} - y\frac{du}{ds} = A$ ist, worin A eine Constante bezeichnet. Es ist ferner, da $uy = z^3$, $u\frac{dy}{ds} + y\frac{du}{ds} = 3z^2\frac{dz}{ds}$. Also $zu\frac{dy}{ds} = A + 3z^2\frac{dz}{ds}$, da aber $u = \frac{z^3}{y}$, so hat man:

$$\frac{dy}{y} = \frac{A\,ds}{2z^3} + \frac{3}{2}\frac{dz}{z} = \frac{3A}{2} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{(k_1^2 + 12z^3 - 12z^4)}} + \frac{3}{2}\frac{dz}{z},$$

mithin

$$\log y = \frac{3A}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{(k_1^2 + 12z^3 - 12z^4)}} + \frac{3}{2}\log z.$$

An beiden Grenzen wird $y = 0$, also $\log y = -\infty$. Dieses kann nur stattfinden, wenn $z = 0$ wird. Es müssen also die beiden Integrale (9) und (10) zwischen den beiden Grenzen, wo $z = o$ ist, genommen werden.

4) Es ist jetzt nur die Constante k_1 zu bestimmen, und zwar nach der einfachen Methode der Grössten und Kleinsten. Es seien die Integrale (9) und (10) zwischen den genannten Grenzen genommen S und V; oder S die Länge der Säule, und V das Volumen derselben. Nach (1) ist also das Volumen einer Säule von derselben Tragkraft und von der Länge $= 1$: $U = \frac{V}{S^2}$. Die Grösse k_1 muss also so bestimmt werden, dass U ein Minimum werde, oder

$$S^2 dU = SdV - 2VdS = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Es ist ersichtlich, dass die Säule aus zweien gleichen Stücken besteht, indem je zwei Theilchen, die gleich weit von beiden Enden entfernt sind, gleiche Dicke haben. In der Mitte der Säule muss also die grösste Dicke stattfinden, oder z den grössten Werth haben. Nach 3) muss dieser Werth grösser als 1 sein, da in dem Punkte, wo die Curve der Säulenaxe eine senkrechte Tangente hat, z angenommenermassen $= 1$ ist. Es sei dieses grösste $z = \beta$. Da nun in dem Punkte der grössten Dicke $\frac{dx}{dz} = 0$, so muss das Radical in der Gleichung (9) für den Werth $z = \beta$ verschwinden, oder

$$k_1^2 + 12\beta^3 - 12\beta^4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

sein.

Statt nun diese Integrale von $z = 0$ bis $z = \beta$, und wieder von $z = \beta$ bis $z = 0$ zu integriren, um S und V zu erhalten, kann man wegen der Gleichheit beider Stücke das Integral von $z = 0$ bis $z = \beta$ doppelt nehmen; also wird:

$$S = \int_0^\beta \frac{bz^2 dz}{\sqrt{(k_1^2 + 12z^3 - 12z^4)}}, \quad V = \int_0^\beta \frac{bz^3 dz}{\sqrt{(k_1^2 + 12z^3 - 12z^4)}}.$$

Substituirt man hierin $z = \beta(1 - \tau)$, so werden die Grenzen $\tau = 0$ und $\tau = 1$, und mit Berücksichtigung von (12) erhält man, wenn man zugleich $\frac{1}{\beta} = \alpha$ setzt:

$$S = \int_0^1 \frac{\sqrt{3} \cdot \beta \cdot (1 - \tau)^2 d\tau}{\sqrt{[(4 - 3\alpha)\tau - (6 - 3\alpha)\tau^2 + (4 - \alpha)\tau^3 - \tau^4]}}$$

$$V = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}\beta^2 (1 - \tau)^3 d\tau}{\sqrt{[(4 - 3\alpha)\tau - (6 - 3\alpha)\tau^2 + (4 - \alpha)\tau^3 - \tau^4]}}.$$

Es sei $S = \beta S'$, $V = \beta^2 V'$; also $U = \frac{V'}{S'^2}$, und ebenfalls:

$$S'^2 dU = S' dV' - 2V' dS' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und

$$\left.\begin{aligned} S' &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(1 - \tau)^2 d\tau}{\sqrt{[(4 - 3\alpha)\tau - (6 - 3\alpha)\tau^2 + (4 - \alpha)\tau^3 - \tau^4]}} \\ V' &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(1 - \tau)^3 d\tau}{\sqrt{[(4 - 3\alpha)\tau - (6 - 3\alpha)\tau^2 + (4 - \alpha)\tau^3 - \tau^4]}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Differentiirt man diese Gleichungen in Beziehung auf α, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS'}{d\alpha} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}(1-\tau)^2(3\tau-3\tau^2+\tau^3)\,d\tau}{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{dV'}{d\alpha} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}(1-\tau)^2(3\tau-3\tau^2+\tau^3)\,d\tau}{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

Aus der Gleichung (12) ersieht man leicht, dass, da β nicht kleiner als 1 sein kann, k_1^2 nicht negativ wird; mithin da die Gleichung $k_1^2 + 12z^3 - 12z^4 = 0$ nur zwei reelle Wurzeln haben kann: eine positive $z = \beta$ und eine negative: dass das Radical in (15) innerhalb der Grenzen für die Säule, ausser $\tau = 0$ keine Wurzeln hat. Es wird also immer positiv angenommen; und es bleiben ebenfalls die Zähler innerhalb dieser Grenzen positiv, und zwar ist der Zähler in jedem Theilchen von $\frac{dS'}{d\alpha}$ grösser als in den entsprechenden Theilchen von $\frac{dV'}{d\alpha}$, da $1-\tau$ zwischen 0 und 1 liegt. Es wird hinfolglich

$$\frac{dS'}{d\alpha} > \frac{dV'}{d\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Es sei

$$W = 2V' - S' = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(1-\tau)^2(1-2\tau)\,d\tau}{\sqrt{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]}},$$

Differentiirt man die Grösse

$$Q = 2\sqrt{3}(1-\tau)^3\sqrt{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]}$$

nach τ, so ergiebt sich $dQ =$

$$\frac{\sqrt{3}(1-\tau)^2[(4-3\alpha)-(40-27\alpha)\tau+(60-27\alpha)\tau^2-(40-9\alpha)\tau^3+10\tau^4]d\tau}{\sqrt{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$6(1-\alpha)W - \int_0^1 dQ$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(1-\tau)^2[2-3\alpha+(28-15\alpha)\tau-(60-27\alpha)\tau^2+(40-9\alpha)\tau^3-10\tau^4]d\tau}{\sqrt{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(1-\tau)^2[2-3\alpha+(30-18\alpha)\tau-(30-9\alpha)\tau^2+10\tau^3]\,d\tau}{\sqrt{[(4-3\alpha)\tau-(6-3\alpha)\tau^2+(4-\alpha)\tau^3-\tau^4]}}$$

Der Factor $2 - 3\alpha + (30 - 18\alpha)\tau - (30 - 9\alpha)\tau^2 + 10\tau^3$ hat sein Maximum und Minimum wenn $0 = 30 - 18\alpha - (60 - 18\alpha)\tau + 30\tau^2$, oder wenn $\tau = 1$ und $\tau = 1 - 0{,}6\alpha$. Für diese beiden Werthe wird der Factor $12(1 - \alpha)$ und $12(1 - \alpha) + 1{,}08\alpha^2$, also in beiden Fällen positiv, da $\alpha < 1$ ist. Für die eine Grenze $\tau = 1$ haben wir schon einen positiven Werth gefunden; für die Grenze $\tau = 0$ wird der Factor aber $2 - 3\alpha$. Wenn also $\alpha < \frac{2}{3}$ ist, so ist dieser Factor beständig positiv, und demnach auch das Integral positiv. Zwischen den Grenzen $\tau = 0$ und $\tau = 1$ ist $\int dQ = 0$. Also weil $\alpha < 1$ und mithin $1 - \alpha$ positiv, ist $(1 - \alpha)\,W$, oder auch $W = 2V' - S'$ positiv, unter der Voraussetzung, dass $\alpha < \frac{2}{3}$.

Aus den Gleichungen (14) ergiebt sich:

$$4V' - 3\alpha S' = 2V3 \int_0^1 d.V[(4 - 3\alpha)\tau - (6 - 3\alpha)\tau^2 + (4 - \alpha)\tau^3 - \tau^4]$$

$$= 2V3\,V(1 - \alpha)$$

oder

$$2V' - S' = \left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right) S' + 2V3\,V(1 - \alpha),$$

also auch $2V' > S'$, wenn $\alpha > \frac{2}{3}$. Demnach in allen Fällen $2V' > S'$, und nach (16) $\frac{dS'}{da} > \frac{dV'}{da}$. Nach der Gleichung (13) wird demnach $\frac{dU}{da}$ immer negativ; so dass der kleinste Werth von U für den grössten Werth von α, oder für den kleinsten Werth von β stattfinden muss. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist der kleinste Werth von $\beta = 1$; folglich in (12) $k_1 = 0$.

5) Es ergiebt sich also die vollständige Auflösung, wenn man in die Gleichungen (9) und (10) $k_1 = 0$ setzt:

$$ds = \frac{V\frac{3}{4} . Vz . dz}{V(1 - z)}, \quad dv = \frac{V\frac{3}{4}\, z^{\frac{3}{2}} dz}{V(1 - z)},$$

worin die Integrale von $z = 0$ bis $z = 1$, und wieder von $z = 1$ bis $z = 0$ genommen werden müssen. Sei

$$z = \cos\theta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

also $dz = -2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$, so wird, wenn man statt die Integrale von $+\frac{\pi}{2}$ bis 0 zu nehmen, und von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$, sie von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ nimmt:

$$ds = \sqrt{3}\cos\theta^3\, d\theta; \quad dv = \sqrt{3}\cos\theta^4 . d\theta.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$s = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\theta + \sin 2\theta); \quad v = \frac{\sqrt{3}}{32}(12\theta + 8\sin 2\theta + \sin 4\theta) \quad (18)$$

Es wird also

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}, \quad V = \frac{3\pi.\sqrt{3}}{8}, \quad U = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Setzt man bei einer Säule von gleichförmiger Dicke, und ähnlichen Durchschnittsflächen, wie bei der obigen $z = 1$ in die Gleichung (2), so ergiebt sich:

$$y = E\sin(s + A),$$

wo E und A Constanten sind. Die Länge der Säule muss zwischen zweien nächsten Werthen von s genommen werden, wo $y = 0$, oder von $s + A = 0$ bis $s + A = \pi$. Die Länge dieser Säule, die dasselbe Gewicht trägt, wie die zweckmässigste, und deren constanter Querschnitt den Flächeninhalt $= 1$ hat, ist also π, und das Volumen ebenfalls π. Das Volumen einer solchen Säule von der Länge 1 und derselben Tragkraft ist demnach $\frac{\pi}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$; oder es verhält sich zum Volumen der zweckmässigsten Säule von derselben Tragkraft wie $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$, wie ich im Anfange dieses Aufsatzes erwähnte.

Substituirt man in die zu Ende des dritten Abschnittes gefundene Gleichung $k_1 = 0$ und $z = \cos\theta^2$, so findet man

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A\, d\theta}{\cos\theta^4} - 3\tang\theta\, d\theta.$$

Die Constante A muss so bestimmt werden, dass wenn $\theta = 0$, dy auch $= 0$ wird; es wird also $A = 0$ und $\log y = 3 \log (\cos \theta)$ + Const., oder:

$$y = \frac{k}{\cos \theta^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Es lassen sich nun die gefundenen Ausdrücke, als der Gleichung (2) Genüge leistend verificiren. Es ist nehmlich $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{3} \cos \theta^2$; $\frac{dy}{ds} = -\frac{3 \sin \theta \cos \theta^2}{k} \frac{d\theta}{ds} = \frac{-\sqrt{3} \sin \theta}{k}$, $\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-\sqrt{3} \cos \theta}{k} \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{k \cos \theta} = \frac{y}{z^2}$, mit der Gleichung (2) übereinstimmend.

6) In dem Vorhergehenden haben wir die Gestalt einer Säule gesucht, die bei gegebener Länge und Belastung das kleinste Volumen enthält, indem wir annahmen, dass die beiden Endpunkte in derselben Verticale bleiben, und die Säule in der Mitte nach einer Seite gekrümmt würde. Man sieht leicht, dass wenn das Gewicht der Säule vernachlässigt wird, die Säule an beiden Enden eine symmetrisch gleiche Gestalt haben müsse, welches Lagrange bei der Wahl seiner Beispiele übersehen zu haben scheint, wodurch er auf einen falschen Schluss geführt wurde. Eine solche Säule kann man eine Stütze nennen, die nur dazu dient, um das Einsinken eines schwer belasteten Bodens, oder eines Gewölbes zu verhindern.

Anders aber verhält es sich, wenn die Säule frei stehend eine schwere Kuppel oder sonstige Lasten trägt. In diesem Falle ist das untere Ende des Säulenschafts mit einem breiten Fusse fest verbunden, wodurch bewirkt wird, dass die Tangente an der Krümmungscurve der Säulenaxe im untersten Punkte fortwährend senkrecht bleibt. Ich füge die Auflösung für diesen Fall hinzu, indem ich eine vollkommene Elasticität, wie vorhin, voraussetze.

Aus der Gleichung am Ende des dritten Abschnitts folgt ebenfalls für diesen Fall für das Ende der Säule $z = 0$ oder $\tau = 1$. In der Gleichung (6) ist angenommen, dass am untern Ende, wo die Tangente an der Säule in diesem Falle senk-

recht ist, $z = 1$. Es müssen also die Integrale (9) und (10) von $z = 0$ bis $z = 1$ genommen werden, wobei zwei Fälle vorkommen:

1) Wenn die Säule von unten an verjüngt ist, so dass die dickste Stelle nicht daran vorkömmt, und also z immer < 1. Die Gleichungen (9) und (10), die auch in diesem Falle gelten, geben:

$$-8V + 6S = \int d^2V(k_1^2 + 12x^2 - 12x^4) \quad . \quad . \quad (20)$$

Da das Radical an beiden Enden positiv genommen werden muss, und sich gleich ist, so hat man:

$$6S = 8V, \text{ oder } V = \frac{3}{4}S, \quad \frac{dV}{d(k_1^2)} = \frac{3}{4}\frac{dS}{d(k_1^2)};$$

und in die Gleichung (11) substituirt:

$$S^0 \frac{dU_1}{d(k_1^2)} = -\frac{3}{2}\frac{dS}{d(k_1^2)}.$$

Es ist aber

$$-\frac{dS}{d(k_1^2)} = -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{3x^2 dx}{[k_1^2 + 12x^2 - 12x^4]^{\frac{5}{2}}}$$

eine negative Grösse, mithin $\frac{dU}{d(k_1^2)}$ positiv, und also U ein Kleinstes für $k_1^2 = 0$. Es ist zu bemerken, dass k_1^2 nicht negativ werden kann, da sonst die Säule für $z = 1$ nicht stattfinden könnte.

2) Wenn über dem untersten Punkte eine dickere Stelle ist, so hat man, wenn man die Gleichungen (13), (14), (15) anwendet, im untersten Punkte $1 = \beta(1 - \tau)$, also $\tau = 1 - \alpha$. Es müssen also die Integrale in (14) und (15) von $\tau = 0$ bis $\tau = 1 - \alpha$ und von $\tau = 0$ bis $\tau = 1$ genommen werden, und beide Werthe addirt. Man erhält auf diese Weise

$$4V' - 3\alpha S' = 4V3V(1 - \alpha)$$

und da

$$V' = \alpha^2 V, \; S' = \alpha S; \; 4V - 3S = \frac{4V3(1-\alpha)}{\alpha^2},$$

demnach $4V > 3S$. Es sei

$$R = 3S - 2V = 3\frac{S'}{a} - 2\frac{V'}{a^2}.$$

Also

$$\frac{dR}{da} = 3\frac{dS'}{a\,da} - 2\frac{dV'}{a^2\,da} - \frac{3S'}{a^2} + \frac{4V'}{a^3}$$

$$= 3\frac{dS'}{a\,da} - 2\frac{dV'}{a^2\,da} + \frac{4\sqrt{3}(1-a)}{a^3}$$

Zu bemerken ist, dass $\frac{dS'}{da}$ und $\frac{dV'}{da}$ ausser den in (15) angegebenen Werthen, noch ein ergänzendes Glied in Beziehung auf die untere Grenze haben. Es ist nehmlich an dieser Grenze $\tau = 1 - a$, also $d\tau = -da$, und für $\frac{dS'}{da}$ muss hinzugefügt werden $\frac{-\sqrt{3}\,a^2}{\sqrt{(1-a)}}$; für $\frac{dV'}{da}$ aber $\frac{-\sqrt{3}\,a^3}{\sqrt{(1-a)}}$. Man erhält so:

$$a^2\frac{dR}{da} = \int V\frac{3}{4}\frac{(1-\tau)^2(3a-2+2\tau)(3\tau-3\tau^2+\tau^3)\,d\tau}{[(4-3a)\tau-(6-3a)\tau^2+(4-a)\tau^3-\tau^4]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(1-a)}}{a} - \frac{\sqrt{3}\,a^3}{\sqrt{(1-a)}}.$$

Es sei Kürze halber

$$\sqrt{[(4-3a)\tau-(6-3a)\tau^2+(4-a)\tau^3-\tau^4]} = X,$$

und die Grösse unter dem Integralzeichen $= W'$, so ist $dW' =$

$$V\frac{3}{4}(1-\tau)d\tau\,\frac{(9a-6)\tau-(18a-18)\tau^2+(12a-20)\tau^3-(3a-10)\tau^4-2\tau^5}{X^5}$$

Es ist

$$d\frac{\sqrt{3}\cdot\tau(1-\tau)^2}{X}$$

$$= V\frac{3}{4}(1-\tau)d\tau\frac{(4-3a)\tau-(20-15a)\tau^2+(20-11a)\tau^3-(10-3a)\tau^4+2\tau^5}{X^5}$$

also

$$dW' + d\frac{\sqrt{3}\tau(1-\tau)^2}{X}$$

$$= V\frac{3}{4}(1-\tau)\,d\tau\,\frac{(6a-2)\tau-(2+3a)\tau^2+a\tau^3}{X^5}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}\, d\tau\, \frac{(6\alpha-2)\tau - 9\alpha\tau^2 + (4\alpha+2)\tau^3 - \alpha\tau^4}{X^3},$$

ferner ist

$$d.\frac{\sqrt{3}.\tau(1-\tau)}{X}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}\, d\tau\, \frac{(4-3\alpha)\tau - (12-9\alpha)\tau^2 + (8-5\alpha)\tau^3 - (2-\alpha)\tau^4}{X^3},$$

mithin

$$dW' + d.\frac{\sqrt{3}.\tau(1-\tau)^2}{X} + d.\frac{\sqrt{3}.\tau(1-\tau)}{X}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}\, d\tau\, \frac{(2+3\alpha)\tau - 12\tau^2 + (10-\alpha)\tau^3 - 2\tau^4}{X^3},$$

und da

$$d\frac{\sqrt{3}.\tau}{X} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, d\tau\, \frac{(4-3\alpha)\tau - (4-\alpha)\tau^2 + 2\tau^4}{X^3},$$

so wird endlich

$$dW' + d\frac{\sqrt{3}.\tau(1-\tau)^2}{X} + d\frac{\sqrt{3}.\tau(1-\tau)}{X} + d\frac{\sqrt{3}.\tau}{X} = \frac{3\sqrt{3}.\tau(1-\tau)^2 d\tau}{X^3}$$

Integrirt man nun von $\tau = 0$ bis $\tau = 1$, und von $\tau = 0$ bis $\tau = 1-\alpha$, und addirt die Resultate, so erhält man:

$$W' + \frac{\sqrt{3}(1-\alpha)\alpha^2}{\sqrt{(1-\alpha)}} + \frac{\sqrt{3}(1-\alpha)\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(1-\alpha)}} + \frac{\sqrt{3}(1-\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha)}} =$$

$$\int \frac{3\sqrt{3}.\tau(1-\tau)^2 d\tau}{X^3}$$

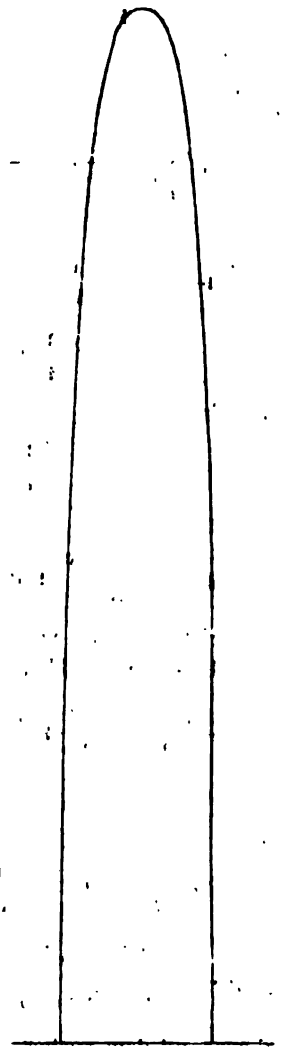
Also

$$\alpha^2 \frac{dR}{d\alpha} = \int \frac{3\sqrt{3}.\tau(1-\tau)^2 d\tau}{X^3} + \sqrt{3}.\frac{4-2\alpha-2\alpha^2}{\alpha\sqrt{(1-\alpha)}}.$$

Da $\alpha < 1$ ist, so ist $4 - 2\alpha - 2\alpha^2$ immer positiv, folglich ist $\frac{dR}{d\alpha}$ eine positive Grösse, oder $3\frac{dS}{d\alpha} > 2\frac{dV}{d\alpha}$. Verbindet man dieses mit dem vorher gefundenen $4V > 3S$, so ergiebt sich $12V\frac{dS}{d\alpha} > 6S\frac{dV}{d\alpha}$, mithin $\frac{dU}{d\alpha}$ in (11) eine negative Grösse, und also ein Kleinstes für das grösste $\alpha = 1$.

Diese Säule wird also genau die Hälfte der in (17) und (18) gefundenen Stütze. Ich habe die Form derselben in beistehender Figur gezeichnet, woraus man ersieht, dass die Form, wie mir scheint, eine dem Auge nicht ungefällige ist. Es versteht sich übrigens von selbst, dass in der Wirklichkeit ein Theil des obern Endes wegfallen muss; da gegen unsere Voraussetzung keine Materie vollständig elastisch ist, sondern sich nur bis zu einer gewissen Grenze zusammendrücken lässt, ohne Risse zu bekommen oder erdrückt zu werden. Der Querschnitt des obern Endes kann also nicht kleiner sein, als eine bestimmte, der Last proportionirte Grösse. Eine weitere Entwickelung dieses Gegenstandes muss ich jedoch aus Mangel an Zeit übergehen.

Eben so muss ich eine Untersuchung über die Form der Querschnitte, die in der gegenwärtigen Abhandlung unbestimmt gelassen ist, mit der Bedingung, dass sie ähnlich seien, und ähnlich liegen, aus demselben Grunde übergehen, und füge nur hinzu, dass die Kreisform nicht am Meisten der Krümmung widersteht.



(Aus dem *Bull. phys.-mathem.* T. IX. No. 24.)

$\frac{8}{20}$ August 1851.

Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 28 (16) Juli 1851 in Lomsa. Von OTTO STRUVE. (Lu le 8 août 1851.)

(Mit zwei Tafeln in Steindruck.)

Die von der Akademie zur Beobachtung der Sonnenfinsterniss, nach Polen entsandte Expedition, verliess Pulkowa am 17 (5) Juli und war am 4 Aug. (23) Juli zurückgekehrt. Der Chef der Expedition, H. O. Struve, stattete schon am Tage seiner Ankunft dem Director der Hauptsternwarte einen mündlichen Bericht ab, über das wichtige Resultat der Lomsaer Beobachtungen, dessen Inhalt noch an demselben Tage dem beständigen Secretär der Akademie mitgetheilt wurde. Der schriftliche Bericht, wie er hier folgt, war dem beständigen Secretär am 15 (3) Aug. vorgelesen, und wurde von diesem der Akademie in ihrer ersten Sitzung nach den Sommerferien, am 20 (8) August vorgelegt. In dieser Sitzung beschloss die Akademie, die ganze Sammlung der die Sonnenfinsterniss betreffenden in Russland angestellten Beobachtungen besonders herauszugeben, hielt es aber für geeignet den ersten bei ihr eingegangenen Bericht, von H. O. Struve, vorläufig in ihrem Bulletin zur Kenntniss des wissenschaftlichen Publicums zu bringen. P. H. Fuss.

Das im Königreich Polen im Juni und Anfang Juli anhaltend regnerische Wetter war in den letzten Tagen vor der Sonnenfinsterniss in einen sehr veränderlichen Zustand übergegangen. Während unseres der Sonnenfinsterniss vorangehenden sechstägigen Aufenthalts in Lomsa war der Himmel

mel fast immer bedeckt, doch gab es hin und wieder kurze Perioden, in denen sich der Himmel hinlänglich aufheiterte um genaue Zeitbestimmungen zu gestatten. Auch am Morgen vor der Sonnenfinsterniss war der Himmel mit einem dichten Wolkenschleier überzogen, der nur auf Augenblicke den Stand der Sonne erkennen liess. Gegen 2 Uhr Nachmittags fing indessen diese Wolkendecke an sich zu brechen und sogleich begannen wir uns auf die Beobachtung vorzubereiten. Wir hatten unsern Standpunct auf einem der Gensdarmerie gehörigen Hofe gewählt, der dicht an dem zum Narew hinunterführenden, ungefähr 100 Fuss hoch geschätzten, Abhange belegen, eine weite Aussicht über das Narewthal, besonders in den Richtungen N. W. und S. O. gestattete. Hier stellte Herr Döllen im Vordergrunde den Plössl'schen Cometensucher auf einem gemauerten Pfeiler auf; und in einer Entfernung von 10 Fuss von ihm, etablirte ich das von mir zu gebrauchende Münchener Fernrohr. Zwischen uns stand ein Tisch, auf dem sich die Chronometer und Schreibmaterialien befanden; und an demselben wurde mein Bruder Carl Struve stationirt, um eines Theils die ihm durch kurze Silben zu bezeichnenden Momente an einem Chronometer zu notiren, andrerseits um den beiden Beobachtern alle nothwendigen Handreichungen zu leisten. In dem weiter zurückgelegenen Theile des Hofes stellte Herr Eduard Fuss die meteorologischen Instrumente auf, und hatte dort Raum genug zu den Vorbereitungen für die von ihm zu versuchenden Intensitätsmessungen. In seiner Nachbarschaft wurde von Herrn Alexandrowicz, Professor der Naturwissenschaften am Warschauer Realgymnasio, der zu dem Zweck eigens nach Lomsa gekommen war, eine Anzahl für die Einwirkung der Sonnenstrahlen sehr empfindlicher Pflanzen aufgestellt, um die diese betreffenden Erscheinungen zu beobachten. Derselbe hatte es auch übernommen auf einige andere allgemein interessante Phaenomene zu achten.

Zwischen 2 und 3 Uhr heiterte sich der Himmel immer mehr auf, doch bedeckte er sich wieder ein wenig als das Moment der ersten Berührung der Ränder heranrückte, so dass die Sonne nur matt durch den Wolkenschleier durch-

blickte. Es konnte daher das erwähnte Moment durch ein hellgrünes Blendglass beobachtet werden. Da die Sonne ausserordentlich wenig Wallung zeigte, wurde die erste Störung der regelmässigen Kreisform mit grosser Schärfe aufgefasst. Meine Beobachtung, angestellt am Chronometer Dent 1941, ergab die erste Berührung der Ränder um

$4^h\ 20^m\ 49{,}0$ Chr. Zeit $= 3^h\ 48^m\ 6{,}3$ Mittl. Lomsaer Zeit. *)

Die Vergleichung mit der Vorausberechnung zeigt, dass der wirkliche Beginn der Verfinsterung etwa 42^s nach dem berechneten stattgefunden hat. Das zu dieser, wie zu allen folgenden Beobachtungen gebrauchte Instrument, ist ein Münchener Fernrohr von 2,4 Zoll Oeffnung und ungefähr 3 Fuss Focalweite, von ausgezeichneter Präcision der Bilder, das in der mechanischen Anstalt der Pulkowaer Sternwarte mit geeignetem Stative versehn war. Um den ganzen Umfang der Sonne mit einem Male übersehn zu können, brauchte ich das schwächste terrestrische Ocular desselben, welches eine Vergrösserung von 42 Mal bei einem Gesichtsfelde von $35'$ ergab. Vor dem Oculare war eine drehbare Scheibe mit 5 Oeffnungen angebracht, von denen 4 mit Blendgläsern von verschiedener Intensität versehn waren und eine die Betrachtung ohne Blendung gestattete. Von den 4 Blendgläsern war das schwächste ein helles gelbgrünes, dann folgte ein dunkleres blaugrünes, darauf ein rothes und zuletzt das dunkelste fast schwarze Glas, welches die Sonne mit weissem etwas in's gelbliche spielendem Lichte zeigte. Zum Wechseln der Gläser, welche alle während des Verlaufs der Verfinsterung in Anwendung kamen, waren kaum 1 bis 2 Secunden erforderlich. Im Focus des Oculars waren 3 Fäden aufgespannt, von denen 2, unter einander parallel, $72''$ von einander abstanden, und der dritte genau senkrecht gegen diese beiden aufgezogen war. Diese Fäden waren mit der das Ocular haltenden Platte zusammen drehbar. Auf dieser war ein Index angebracht, der

*) Die in diesem Berichte angegebenen mittleren Zeiten, dürfen noch nicht als definitiv angesehn werden, da die Zeitbestimmungen noch nicht strenge berechnet sind.

an einer auf der Hülse des Oculars befindlichen Theilung von 5° zu 5°, die genäherte Messung von Positionswinkeln gestattete.

Wenige Minuten nach dem ersten Beginn der Verfinsterung bedeckte sich der Himmel wieder und blieb so während des grössten Theils der Zeit bis zum Eintritt der totalen Verfinsterung. Die kurzen hellen Intervalle benutzte ich dazu um, mit Hülfe der Sonnenflecke, den Focus meines Fernrohrs möglichst scharf zu berichtigen und die Richtung der täglichen Bewegung am Micrometer zu bestimmen. Die Form der Hörner zeigte bei ausserordentlicher Ruhe der Bilder, nirgends eine Abweichung von der regelmässigen Form, ausser gelegentlichen Störungen am innern Rande, wie sie den sich zeigenden nicht sehr erheblichen Unebenheiten des Mondrandes entsprachen. Ich muss hier indessen einer Erscheinung Erwähnung thun, die ich freilich geneigt bin für eine ganz individuelle anzunehmen, hervorgebracht durch zu angestrengtes Sehn, die sich mir aber doch zu bestimmt darstellte um über die Wahrnehmung einen Zweifel zuzulassen. Etwa 24 Min. vor der totalen Verfinsterung erschien es mir, bei ganz leichtem Gewölke, als ob ich in meinem Fernrohre die Fortsetzung des Mondrandes jenseits seines Durchschnitts mit dem Sonnenrande ein wenig verfolgen könnte. Es waren nämlich an beiden Hörnern blassweisse schmale Auswüchse bemerkbar, die, soviel ich schätzen konnte, genau in der Verlängerung des Mondrandes lagen, deren Ausdehnung aber nicht mehr als 0,8 meines Fadenintervalls oder ungefähr 1′ betrug. Diese Erscheinung blieb mir während ungefähr 4 Min. sichtbar. Ich sah darauf durch den Cometensucher, um mich zu überzeugen, ob dort auch dieselbe Erscheinung bemerkbar war, konnte aber keine Spur davon auffinden. Eben so wenig gelang es Herrn Döllen, der sich inzwischen an mein Fernrohr gestellt hatte. Als ich darauf wieder zu meinem Fernrohre zurückkehrte, hatte sich der Himmel inzwischen zu sehr bezogen um die Wahrnehmung zu gestatten. Nach dem Schluss der totalen Verfinsterung war ich, bei vollkommen

heiterm Himmel, auch nicht im Stande dieselbe Erscheinung wiederzusehn.

Etwa 18 Min. vor der totalen Verfinsterung verschwand uns die Sonne hinter dichten Wolken. Indessen zeigten sich weiter gegen Nordwesten einige lichtere Stellen am Himmel, und der sich um diese Zeit aus derselben Gegend erhebende stärkere Wind, liess die Hoffnung rege werden, dass wir vielleicht die Erscheinungen der totalen Verfinsterung durch eine dieser Lücken würden wahrnehmen können. Diese Hoffnung wurde nicht getäuscht. In der letzten Minute vor dem vorausberechneten Eintritt der totalen Verfinsterung, verschwanden die letzten Wolken vor der Sonne, und in demselben Augenblicke konnte ich im Fernrohr die Corona als rings um den Mond gebildet erkennen. Das von mir weiter unten angeführte Moment, in welchem ich zuerst die Corona vollständig gebildet erkannt habe, bezeichnet daher, streng genommen, nur den Augenblick, in welchem die letzten Wolken vor der Sonnenscheibe verschwanden, und es unterliegt wohl kaum einem Zweifel dass, bei ganz heiterm Himmel, die Corona noch erheblich früher erkannt worden wäre.

Alle Beobachtungen um die Zeit der totalen Verfinsterung herum wurden ohne Blendglass angestellt, indem das unbeschützte Auge ohne besondere Anstrengung die letzten Strahlen der verschwindenden Sonne ertragen konnte.

Der Verabredung gemäss hatte ich ausschliesslich auf die erwartete Erscheinung der Vorsprünge zu achten, während Herr Döllen seine Aufmerksamkeit vorzugsweise auf die Corona zu richten hatte. Aus diesem Grunde macht die beiliegende Zeichnung nur darauf Anspruch, die Formen und Dimensionen der Vorsprünge, wie sie sich mir zeigten, mit einiger Genauigkeit zu geben. Sie stellt die Vorsprünge an der Ostseite so dar, wie sie zu Anfang der totalen Verfinsterung gesehn wurden, die auf der Westseite beobachteten aber, wie ich sie am Schluss derselben wahrgenommen habe, gibt also ein Bild das zwei verschiedenen Epochen angehört. Ich kann auch nicht behaupten dass, ausser den von mir angegebenen Vorsprüngen, nicht noch andere sichtbar gewesen sind, da meine

Aufmerksamkeit speziell nur denen zugewandt war, welche nahezu in der Richtung der Bewegung des Mondes lagen. *)

Ehe ich an die nähere Beschreibung des von mir Gesehenen gehe, möge hier zunächst die Liste der von mir, um die Zeit der totalen Verfinsterung herum, mit einer Silbe bezeichneten und von Carl Struve am Chronometer Dent 1941 notirten Momente der verschiedenen Beobachtungen folgen.

1)	5^h	20^m	31^s Chr. Zeit =	4^h	47^m 48,3 Mittl. Loms. Zt.
2)		20	45		48 2,3
3)		20	53		48 10,3
4)		21	55		49 12,3
5)		23	3		50 20,3
6)		23	43		51 0,3
7)		23	56		51 13,3
8)		24	4		51 21,3
9)		24	11,5		51 28,8
10)		26	30		53 47,3

Es hielt natürlich schwer nach dem Schluss der Beobachtungen mit vollkommner Sicherheit anzugeben, zu welcher Beobachtung jedes dieser Momente gehörte, doch glaube ich mich nicht zu irren indem ich beziehe:

1) auf das zuerst bemerkte Durchbrochen-sein der Sonnensichel durch Mondberge nahe dem Südhorne.
2) auf das erste Bemerken der vollständig gebildeten Corona.
3) auf den Eintritt der totalen Verfinsterung.
4—7) auf Beobachtungen an den Vorsprüngen.
8) auf das Ende der totalen Verfinsterung.
9) auf das letzte Verschwinden der Vorsprünge.
10) auf das Verschwinden der Corona.

---

*) In der beiliegenden Figur bezeichnet *Nord* die Richtung zum Nordpol hin vom Mittelpuncte des Mondes aus, *West* den vorangehenden, *Ost* den folgenden Rand dieses Gestirns. Bei der Schwierigkeit das Selbstleuchten der Corona und der Vorsprünge in der Lithographie darzustellen, giebt die Zeichnung das Licht der Corona zu intensiv im Vergleich mit dem der Vorsprünge.

Wegen der Natur der Beobachtungen dürfen diese Momente nur etwa als auf 2 Secunden genau angesehn werden.

Beim Eintritt der totalen Verfinsterung, bei welchem ich auch nicht die geringste Spur von den Bailyschen Perlen oder Streifen wahrgenommen habe, blieb meine Aufmerksamkeit zunächst auf die Gegend des Mondrandes gerichtet, wo der letzte Sonnenstrahl verschwunden war. Hier zeigten sich mir augenblicklich die in der Figur mit *a* und *b* bezeichneten Vorsprünge, welche durch eine Kette kleinerer unregelmässiger Vorsprünge mit einander verbunden waren. Zunächst bestimmte ich die Lage der beiden Vorsprünge, indem ich meine Fäden in der Richtung der Tangenten an dem Mondrande einstellte und fand für *a* die Entfernung vom Nordpuncte der Mondscheibe 63°, für *b* aber 45°, so dass der zwischen ihnen belegene, durch die Kette kleinerer Vorsprünge gebildete helle Bogen 18° betrug. Die mittlere Neigung von *a*, d. h. der die Spitze des Vorsprungs mit der Mitte seiner Basis verbindenden Linie, gegen den Mondrand, bestimmte ich zu 60° und den Abstand der Spitze von *a* vom Mondrande zu der unter 4) angegebenen Zeit als 0,8 Fadenintervall oder 58″. Der Vorsprung *b* stand mit breiterer Basis fast vertical zum Mondrande und hatte die Form eines sehr stumpfen Kegels; er war entschieden erheblich niedriger als *a*, doch habe ich nicht hinlänglich auf diesen Vorsprung geachtet, um über seine Form genaueres angeben zu können. Die Form von *a* glaube ich dagegen sehr bestimmt aufgefasst zu haben. Es war die eines unter dem gemessenen Winkel von 60° geneigten Keils mit scharfer Spitze, dessen nördliche längere Begränzung erheblich convex war, während die südliche eine kleine Concavität zeigte. Die Farbe beider Vorsprünge war eine entschieden weisse mit metallischem Glanze; der sie verbindende helle Bogen schien mir aber eine hell-rosa Färbung zu haben. Während der Minute, die ungefähr die von mir angeführten Messungen in Anspruch nahmen, war die die beiden Vorsprünge verbindende leuchtende Kette allmälig verschwunden und die Höhe der Vorsprünge *a* und *b* selbst schien mir erheblich abgenommen zu haben. Ich verfolgte übrigens diese Erscheinung nicht länger, weil jetzt, bei einer

raschen Durchmusterung des übrigen Mondrandes, meine Aufmerksamkeit vollständig durch die interessanten Vorsprünge *c* und *d* am Westrande des Mondes gefesselt wurde.

Der Vorsprung *c* hatte die Form eines gebogenen Horns, dessen oberer Theil parallel mit dem Mondrande lief. Indem derselbe aber diese parallele Richtung verliess, machte der Vorsprung eine scharfe Biegung zum Mondrande hin, so dass sein Fuss fast senkrecht auf dem Mondrande zu stehn schien. So viel ich sehn konnte, blieb der Fusspunct immer in Contact mit dem Rande des Mondes. Das äusserste Ende des Horns schien mir ein wenig abgestumpft zu sein, auch nahm die Breite desselben nur sehr wenig von der Spitze bis zum Fusspunct zu. Die mittlere Breite des Horns habe ich auf 15″ bis 20″ geschätzt. Unterhalb der Stelle, wo das Horn die scharfe Biegung zum Monde hin machte, zeigte sich die nördliche Begränzung desselben concav, die südliche ein wenig convex, wie es aus der Figur ersehn werden kann. Bisweilen schien es mir als ob von dieser Stelle aus noch andere schwächere Lichtfäden in verschiedenen Richtungen ausgingen.

Die Spitze des Horns *c* blieb, während der ganzen Zeit, auf gleiche Weise gegen den leuchtenden Fleck *d* gerichtet, welcher in einem Abstande von einer Minute von dieser Spitze, ganz frei in der Corona zu schweben schien und auch keine Spuren einer Verbindung, weder mit dem Horne noch mit dem Mondrande zeigte. Das Intervall zwischen *d*, dem Horne und dem Mondrande, war nach allen Seiten hin, nur durch das gleichförmige blasse und ruhige Licht der Corona ausgefüllt. Der Durchmesser dieses Flecks, dessen Begränzung mir indessen nicht sehr scharf erschien, mag ungefähr 25″ betragen haben. Seine Farbe und Intensität war genau gleich der des Horns; beide Objecte waren anfänglich weiss mit einem ganz schwachen rosa Anflug, doch schienen sie mir allmälig etwas dunkler zu werden und eine blauröthliche Tinte anzunehmen.

Auf einen Augenblick betrachtete ich die Corona auch mit unbewaffnetem Auge und überzeugte mich so davon, dass das Horn *c* auch dem blossen Auge wahrnehmbar war. Die Form desselben konnte ich aber so nicht erkennen, sondern es er-

schien mir nur wie ein Lichtbüschel von erheblich stärkerem Glanze als das sonst überall gleichförmige Licht der Corona.

Den Ort am Mondrande, wo sich das Horn erhob, fand ich mit dem Micrometer 97° vom Nordpuncte nach Westen entfernt, doch erinnere ich mich dass bei dieser Gelegenheit die Ablesung sehr schwierig war, so dass hier möglicherweise ein Versehn von 10° begangen sein kann. Ueberhaupt dürfen alle hier angegebenen Richtungen nur als auf 2 bis 3 Grad genau beobachtet angesehn werden.

In den vorstehend unter 5), 6) und 7) gegebenen Momenten, bestimmte ich die Entfernung der Spitze des Horns oder der Mitte des Flecks *d* vom Mondrande respective zu 1,1, 1,4 und 1,6 der Distanz der Parallelfäden, oder zu 79″, 101″ und 115″. Es hat daher die Höhe des Horns in einem Intervall von 53 Zeitsecunden um 36″ zugenommen. Als ich gegen Ende der totalen Verfinsterung, wahrscheinlich während des Intervalls zwischen 5) und 6), also näherungsweise um $4^h\,50^m\,40^s$, den östlichen Mondrand wieder betrachtete, konnte ich keine Spur vom Vorsprung *b* und nur eine sehr kleine Spitze von *a* wahrnehmen.

Bei Gelegenheit der letzten Messung der Entfernung des Flecks *d*, machte ich die Bemerkung, dass jetzt der Abstand zwischen *d* und dem Mondrande genau gleich erschien dem Abstande desselben Flecks von der äussern Begränzung der Corona. Hieraus folgt zunächst dass die scheinbare Breite der Corona auf der Westseite des Mondes, am Ende der Verfinsterung nahezu 4 Minuten betragen hat. Meine Bemerkung dass in dem angegebenen Momente die erwähnten Abstände gleich gewesen seien, schliesst aber auch gewissermassen die Folgerung in sich, dass dasselbe vorher nicht der Fall gewesen ist; auch schwebt mir in der Erinnerung die Vorstellung vor, dass, als ich zuerst auf diesen Punct blickte, der Abstand desselben vom Mondrande erheblich geringer war als von der äussern Begränzung der Corona, von welcher letzterer der Fleck *d* immer nahezu gleich entfernt blieb; doch bin ich dieses letzteren Umstands nicht so sicher als dass ich mich darüber mit Bestimmtheit aussprechen dürfte.

Der Fleck *d* und die Spitze von *c* blieben noch mehrere Secunden (genauer 7,5 Sec., wenn die vorstehend gegebenen Momente ganz präcis sind) nach dem, soviel ich mich entsinne, etwas nördlich von *c* erfolgten Hervorbrechen des ersten Sonnenstrahls wahrnehmbar. Gleichzeitig mit den Vorsprüngen verschwanden mir die letzten Spuren der Corona an der Westseite des Mondes, doch konnte ich dieselbe an dem der leuchtenden Sonnensichel abgewandten östlichen Mondrande noch während $2\frac{1}{2}$ Minuten mit Sicherheit verfolgen. Es war aber dabei erforderlich dass ich die helle Sichel nicht zu gleicher Zeit im Felde des Fernrohrs hatte.

In meiner Zeichnung habe ich nördlich von *c* noch einen 5ten Vorsprung *e* angegeben, denn dass da wenigstens einer nahezu in dieser Stellung war, weiss ich bestimmt. Ob sich aber noch mehrere am nördlichen Rande befanden, kann ich nicht mit Sicherheit angeben, da ich auf dieselben nicht speziell achtete. Ich erinnere mich nur, dass, als ich die Betrachtung des Ostrandes aufgab und zum Westrande überging, sich an dem südlich von *a* und *d* belegenen Theile des Mondrandes keine besonders auffallende Erscheinungen zeigten.

Nachdem die letzte Spur der Corona verschwunden war, benutzte ich die nächste Zeit um meine Beobachtungen zu ordnen und zu notiren. Während dieser Zeit machte Carl Struve eine Skizze der Sonnenfleckgruppe am Westrande der Sonne. Der Austritt der Mitte des nahe dem östlichen Rande befindlichen grösseren oblongen Sonnenflecks, konnte mit grosser Schärfe um $6^h\ 17^m\ 26^s{,}5$ Chr. Zeit $= 5^h\ 44^m\ 43^s{,}8$ Mittl. Lomsaer Zeit, aufgefasst werden. Er befand sich um diese Zeit nur einen Bruchtheil der Minute von der Spitze des nördlichen Horns entfernt. Auch das Ende der Verfinsterung überhaupt, glaube ich bis auf einen Bruch der Secunde genau beobachtet zu haben. Es fand statt um

$6^h\ 20^m\ 11^s{,}5$ Chr. Zeit $= 5^h\ 47^m\ 28^s{,}8$ Mittl. Lomsaer Zeit, ungefähr 14 Sec. später, als die Vorausberechnung es ergeben hatte.

Da ich das Glück gehabt habe, auch die totale Sonnenfinsterniss vom Jahre 1842, unter günstigen Umständen in der Stadt Lipezk im Tambovschen Gouvernement zu beobachten,

so könnte vielleicht von mir erwartet werden, dass ich eine Vergleichung zwischen der diesjährigen Erscheinung und der früheren anstellte. Da ich aber bei der früheren Gelegenheit die Erscheinungen der totalen Verfinsterung mit blossem Auge betrachtete, jetzt dagegen durch das Fernrohr, so ist die Zahl der Vergleichungspuncte nur gering und ich sehe mich dadurch auf die folgenden zwei Angaben beschränkt:

Erstens war das eigentliche Schauspiel der totalen Verfinsterung in Lomsa, durchaus nicht so imposanter Natur wie das in Lipezk. Hiezu mag wohl vorzugsweise der Umstand mit beigetragen haben, dass in Lomsa noch kurz vor der totalen Verfinsterung dichte Wolkenschleier den Himmel bedeckten und daher die Abnahme der Helligkeit eine weniger rapide war; nebenbei aber hat auch wohl der höhere Stand der Sonne in Lipezk und die durch die kurz vorhergegangenen heftigen Regengüsse erzeugte ausserordentliche Durchsichtigkeit der Atmosphäre, wesentlich dazu beigetragen, die Grossartigkeit der frühern Erscheinung zu erhöhen.

Zweitens scheint wohl unzweifelhaft ein wesentlicher Unterschied in der scheinbaren Breite und dem Aussehn der Corona bei beiden Gelegenheiten stattgefunden zu haben. Während des flüchtigen Blicks, den ich mit blossen Augen auf die Corona warf, schätzte ich auch jetzt die mittlere Breite derselben erheblich grösser, als wie es durch das Fernrohr geschah, nämlich zu ungefähr $10'$. Gewiss aber konnte hier nicht mehr von einer Breite von $\frac{1}{4}$ Monddurchmesser, wie bei der frühern Gelegenheit, die Rede sein und ebenso wenig durfte der Eindruck auf das Auge als ein blendender bezeichnet werden. Auffallend war mir dass, während durch das Fernrohr die Corona mit mattem ruhigem Lichte erschien, sie sich dem blossen Auge erheblich wallend und scintillirend zeigte. Aber von Strahlen von 3^0 bis 5^0 Ausdehnung, wie ich sie 1842 gesehn habe, ist jetzt von mir keine Spur bemerkt worden.

Auf die Erscheinung von Sternen habe ich bei dieser Gelegenheit gar nicht geachtet; ich ersuchte aber mehrere wohlunterrichtete Personen, die sich in unserer Nähe befanden auf dieselben aufmerksam zu sein. Aus ihren Mittheilungen habe ich nur entnehmen können, dass bei dem im Süden und

Osten theilweise bedeckten Himmel nur Mercur, Venus, Jupiter und α Lyrae mit Sicherheit, und wahrscheinlich auch Pollux gesehn ist.

—

Aus den vorstehenden Beobachtungen lassen sich schon jetzt einige wichtige Folgerungen ziehn. Die scheinbare relative Bewegung von Sonne und Mond betrug zur Zeit der totalen Verfinsterung in Lomsa $32''{,}6$ in jeder Zeitminute, folglich in dem zwischen den von mir beobachteten Momenten 5) und 7) verflossenen Intervall von 53 Zeitsecunden nahezu $29''$. Da nun das Horn c vom Mondscentro aus in einer Richtung stand, welche innerhalb weniger Grade derjenigen entgegengesetzt war, in welcher der Mond sich vor der Sonnenscheibe bewegte, so sind wir wegen der der Genauigkeit der Schätzungen vollkommen entsprechenden Uebereinstimmung der von mir gemessenen Quantität, 36 Sec., mit der aus der relativen Bewegung beider Gestirne gefolgerten, 29 Sec., zu dem Schluss berechtigt:

> *dass die Aenderungen in der Höhe des Horns* c *oder in der Entfernung des Flecks* d *vom Mondrande, sich vollständig aus der Bewegung des Mondes vor der Sonne erklären;*

und wir werden daher zu der Annahme geführt:

> *dass diese Vorsprünge dem Sonnenkörper angehörige Theile sind, welche bei der Bewegung des Mondes vor der Sonnenscheibe auf der einen Seite allmälig hervortreten und auf der entgegengesetzten entsprechend verschwinden.*

Eine Bestätigung dieser Sätze folgt auch aus den an dem Vorsprung a angestellten Beobachtungen, welcher, da er auf der Westseite nahezu in der Richtung der Mondsbewegung stand, allmälig bedeckt werden musste falls er dem Sonnenkörper angehörte. Um $4^h\,49^m\,12^s$ war die Höhe dieses Vorsprungs zu $58''$ bestimmt und nahezu um $4^h\,50^m\,40^s$ sah ich nur eine kleine Spitze desselben hervorragen. Nehmen wir an dass dieser Rest ein Viertel seiner frühern Höhe gewesen sei, so folgt hier eine Abnahme der Höhe von $43''$ in 1 Minute

29 Sec. Zeit, eine Quantität welche nach der relativen Bewegung der beiden Gestirne 48″ hätte betragen sollen.

In Bezug auf die Corona sind meine Beobachtungen nicht vollständig genug um aus ihnen allein sichere Folgerungen zu ziehn. Bestätigt es sich aber durch die Beobachtungen derer, die spezielle Aufmerksamkeit auf die Erscheinungen der Corona gewandt haben, dass die Entfernung des Flecks *d* von der äussern Begränzung der Corona constant geblieben sei, so folgt daraus unmittelbar:

> *dass auch die Corona ein integrirender Theil des Sonnenkörpers und gewissermassen als eine die Photosphäre der Sonne umgebende Atmosphäre anzusehn ist.*

Da wir jetzt wissen dass die früher so räthselhaften Vorsprünge dem Sonnenkörper angehören, so liegt es nahe einige Vermuthungen über ihre Natur und ihren Zusammenhang mit andern Erscheinungen auszusprechen.

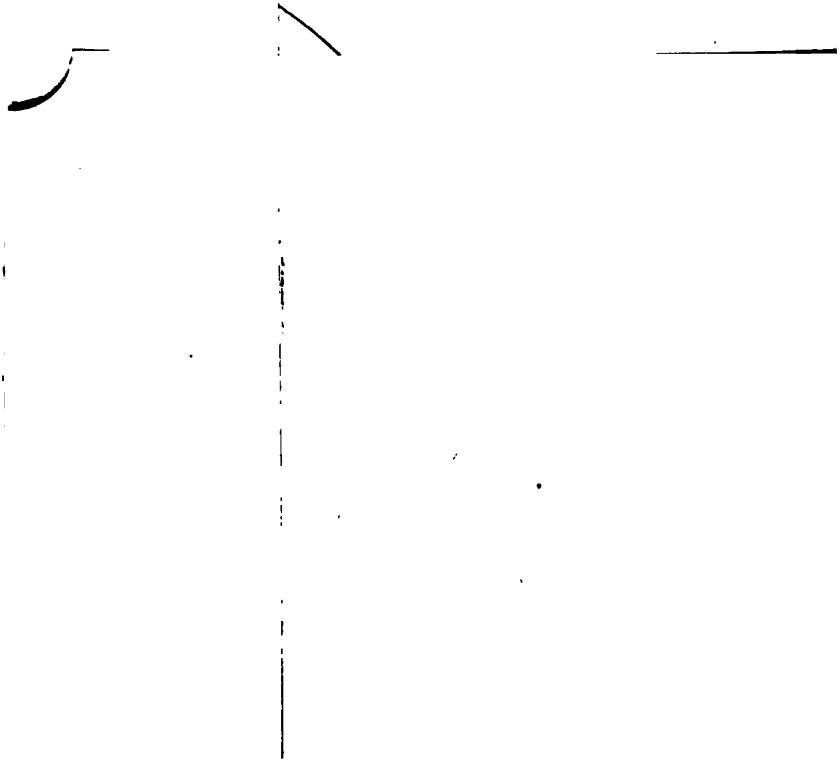
Der Umstand dass der Fleck *d* frei in der Corona schwebte, macht die Annahme, dass die Vorsprünge rigide Körper sind, höchst unwahrscheinlich. Auch das Aussehn derselben spricht dafür dass sie analoge Erscheinungen wie unsre Wolken sind, d. h. bewegliche und veränderliche Massen, die sich, bei geringer Dichtigkeit, während mehr oder weniger langer Zeit in der die Photosphäre umgebenden Atmosphäre schwebend erhalten. Bisher sind diese Vorsprünge nur am Rande der Sonne bei Gelegenheit totaler Sonnenfinsternisse gesehn oder deutlich als solche erkannt worden; unbezweifelt müssen dieselben aber auch, wegen der Axendrehung der Sonne, vor die Sonnenscheibe treten und müssten daher, wenn sie rigide wären, selbst unter Voraussetzung eines hohen Grades von Durchsichtigkeit, wegen ihrer grossen Ausdehnung constant wiederkehrende locale Schwächungen des Sonnenlichts erzeugen. Die vieljährigen über die Oberfläche der Sonne angestellten sorgfältigen Beobachtungen, haben aber noch nirgends Anzeichen von constanten Lichtmodulationen auf derselben ergeben und somit muss die Annahme dass die Vorsprünge rigide Körper seien, vollständig aufgegeben werden.

Somit sind wir dahin geführt die Vorsprünge als gas- oder luftförmige, mehr oder weniger elastische Massen anzusehn, welche, bei äussern auf sie einwirkenden Kräften leicht ihre Form und Stellung ändern oder auch sich gewissermassen ganz auflösen und mit andern Massen vereinigen. Unter der wegen der grossen Ausdehnung der Vorsprünge sehr wahrscheinlichen Voraussetzung, dass dieselben, wenn sie sich gegen die Photosphäre projiciren, im Stande sind uns wahrnehmbare locale Schattirungen des Sonnenlichts zu erzeugen, müssen wir jetzt die Vorsprünge als in Verbindung betrachten mit den einzigen bisher auf der Sonnenfläche bemerkten veränderlichen Erscheinungen, nämlich denen der Flecke und Fackeln. Hiefür spricht nun auch ganz besonders der Umstand dass sich gerade an der Stelle wo sich das Horn *c* erhob, bedeutende Störungen in der Sonnendecke durch Fackeln und durch eine Sonnenfleckgruppe zeigten. Diese Gruppe befand sich im Mittel ungefähr nur 80″ von der Stelle des Sonnenrandes entfernt, dessen Winkelabstand vom Nordpuncte 112° war, und nordwestlich von derselben zeigten sich besonders lebhafte Fackeln hart am Sonnenrande. Desgleichen befand sich auch der an der Ostseite der Sonne bemerkte längliche Sonnenfleck mit entsprechenden Fackeln, sehr nahe der Stelle wo die Vorsprünge *a* und *b* beobachtet sind. Ein inniger Zusammenhang zwischen den Sonnenflecken, den Fackeln und den Vorsprüngen ist daher unzweifelhaft; welcher Art aber dieser Zusammenhang sei, darüber müssen wir von dem Complex aller, bei Gelegenheit dieser Sonnenfinsterniss angestellten Beobachtungen eine weitere Aufklärung erwarten.

Pulkova, 31 Juli (12 August) 1851.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 1.)

Erklärung der Sonnenfinsterniss am 28(16) Juli 1851.



$\frac{8}{20}$ Août 1851.

NOTE SUR LE TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE A L'USAGE DES ÉCOLES MILITAIRES; PAR M. OSTROGRADSKY.

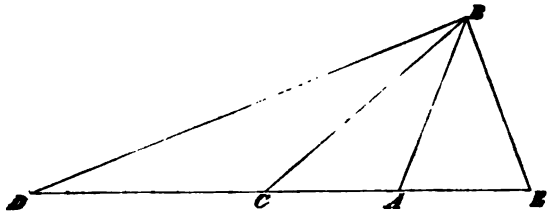
M. Ostrogradsky ayant été chargé de la rédaction d'une instruction relative à l'enseignement, aux écoles militaires, de quelques branches des Mathématiques élémentaires, communiqua à l'Académie la partie de son travail concernant la Trigonométrie, la seule qui soit entièrement achevée.

M. Ostrogradsky part d'une idée qui a dû se présenter aux premiers auteurs qui traitèrent de la résolution des triangles; elle consiste à former des tables pour les triangles rectangles, où se trouveraient les rapports des côtés de l'angle droit à l'hypoténuse, pour toutes les valeurs d'un des angles aigus du triangle. Au moyen de ces tables, les triangles rectangles se résoudraient par les règles les plus simples de la proportionnalité, et la trigonométrie ne consisterait que dans la réduction de la résolution des triangles obliquangles à l'usage des mêmes tables.

Trois théorèmes mènent à ce dernier but; le premier, qui consiste dans la proportionnalité des côtés du triangle aux sinus des angles opposés, se démontre très facilement et ne demande rien que la définition des sinus; mais les deux autres exigent qu'on sache quelques propriétés des quantités trigonométriques, en sorte qu'en partant de l'idée, que la trigono-

métrie consiste dans la résolution des triangles, on abandonne cette idée, pour n'y revenir qu'après avoir parlé assez longuement des diverses propriétés des sinus, ce qui pourrait ne pas satisfaire les commençants. M. Ostrogradsky s'est proposé de ne pas perdre de vue, pour un seul instant, l'objet de la trigonométrie, et par suite, il devait démontrer les deux derniers des trois théorèmes dont il s'agit, sans faire usage des propriétés des sinus. C'est à quoi il parvient tres facilement.

Supposons, avec M. Ostrogradsky, que dans un triangle ABC, on connaît deux côtés : $CB = a$, $CA = b$, et l'angle C



qu'ils comprennent. Les parties inconnues sont les angles A et B et le côté $AB = c$. Supposons que des deux côtés donnés a et b, le premier soit le plus grand, et après avoir prolongé le second b dans les deux sens et pris $CD = CE = a$, et mené BD et BE, il est facile de voir que la somme des angles AEB et EBA est A, et que leur différence $CBE - EAB$, à cause de $CBE = AEB$, est B; donc

$$AEB = \frac{A+B}{2}, \quad EBA = \frac{A-B}{2};$$

de même, la somme des angles ABD et BDA est $2D - A$, et leur différence $ABD - CBD$, à cause de $CBD = BDC$, est B, donc

$$ABD = D - \frac{A-B}{2},$$

$$BDC = D - \frac{A+B}{2}.$$

Cela posé, le théorème relatif à la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés, appliqué aux triangles ABE et ABD donnera

$$\frac{AE}{AB} = \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{c}{a+b} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

donc en multipliant

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}};$$

puis, nous aurons c par une des deux équations précédentes.

En appliquant le théorème exprimé par la dernière équation à chacun des triangles ABE et ABD, nous trouverons sur le champ

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}}$$

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{A}{2}$$

donc en multipliant et faisant pour abréger $a+b+c=2p$.

$$\operatorname{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

en multipliant par $(p-a)^2$, il vient

$$(p-a)^2\operatorname{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

M. Ostrogradsky parle ensuite de la surface, des lignes et des rayons des cercles inscrits et circonscrits, et finit par établir les formules connues de la trigonométrie comme suite de la résolution des triangles.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 1.)

$\frac{13}{25}$ Juni 1851.

Ueber den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben; von Hrn. Observator CLAUSEN in Dorpat.

Foucaults sinnreiche Idee, die Umdrehung der Erde durch ein einfaches um einen Punkt schwingendes Pendel jedem anschaulich zu machen, veranlasste mich, diese Bewegung theoretisch zu entwickeln. Ich erlaube mir meine Arbeit über diesen Gegenstand darzulegen, wobei zugleich die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt wird.

1) Ich gehe von den Formeln aus, die Gauss in Benzenberg's bekanntem Werke über die Umdrehung der Erde gegeben hat. Es sei durch den Schwerpunkt der Erde und die Umdrehungsaxe eine mit dem Meridiane des Aufhängepunkts des Pendels parallele Ebene gelegt. Die in dieser Ebene mit einer durch den Aufhängepunkt gezogenen Lothlinie parallele Gerade sei die Axe der Coordinaten z, und zwar positiv in der Richtung nach dem Zenith des Aufhängepunkts; senkrecht darauf in derselben Ebene sei die Axe der x, positiv nach Süden; und senkrecht auf die Ebene die Axe der y, positiv nach Osten. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei im Schwerpunkte der Erde, und die Coordinaten des Aufhängepunktes des Pendels seien A, B, C in Beziehung auf die Axen der x, y, z resp. Die Coordinaten des als körperlichen Punkt betrachteten Pendels zu einer beliebigen Zeit, auf Axen bezogen, die mit den vorigen parallel sind, seien vom Aufhänge-

punkte an gerechnet ξ, v, ζ. Vom Mittelpunkte der Erde an gerechnet sind demnach diese Coordinaten: $A + \xi$, $B + v$, $C + \zeta$.

Ich verwandle jetzt diese Coordinaten in andere x', y', z', deren Axe der x' in der Ebene des Aequators, in ihrem Durchschnitte mit dem Meridiane liegt, und zwar positiv nach Süden; die Axe der y' mit der Axe der y identisch; und die Axe der z' auf der positiven Seite nach dem Nordpole gerichtet ist. Zieht man aus dem Mittelpunkte einer beliebigen Kugel Radien, die mit den positiven Enden dieser sechs Axen parallel sind, bis sie die Kugelfläche schneiden, und legt durch die Durchschnittspunkte der mit den Axen der x und x' parallelen Radien einen grössten Kreis, in dem der Bogen zwischen diesen Durchschnitten durch $[xx']$ bezeichnet wird; so hat man, wenn $[xy']$, $[xz']$, $[yx']$ etc. ähnliche Bedeutungen haben, nach Gauss *Disquis. gen. circa superficies curvas:*

$$x' = x\cos[xx'] + y\cos[yx'] + z\cos[zx'];$$
$$y' = x\cos[xy'] + y\cos[yy'] + z\cos[zy'];$$
$$z' = x\cos[xz'] + y\cos[yz'] + z\cos[zz'].$$

Nach den gegebenen Erklärungen hat man für die 9 Winkel folgende Werthe, worin β die geographische Breite des Aufhängepunkts des Pendels bezeichnet:

$$[xx'] = 90^0 - \beta; \quad [yx'] = 90^0; \quad [zx'] = \beta;$$
$$[xy'] = 90^0; \quad [yy'] = 0^0; \quad [zy'] = 90^0;$$
$$[xz'] = 180^0 - \beta; \quad [yz'] = 90^0; \quad [zz'] = 90^0 - \beta.$$

Demnach:

$$x' = (A + \xi)\sin\beta + (C + \zeta)\cos\beta$$
$$y' = B + v$$
$$z' = -(A + \xi)\cos\beta + (C + \zeta)\sin\beta.$$

Diese Coordinaten des beweglichen körperlichen Punkts beziehen sich auf Axen, die mit der Erde sich drehen. Es sei die feste Axe der positiven x'' im Weltraume nach der Frühlingsnachtgleiche gezogen; und die Axe der positiven y'' im Aequator nach 90^0 grader Aufsteigung gerichtet; die Axe der z'' mit der Axe der z' identisch. Die grade Aufsteigung des Zeniths sei θ, so hat man auf ähnliche Weise wie oben:

$$[x'x''] = \theta; \qquad [y'x''] = \theta + 90^0;$$
$$[x'y''] = \theta - 90^0; \qquad [y'y''] = \theta.$$

mithin

$$x'' = x' \cos\theta - y' \sin\theta;$$
$$y'' = x' \sin\theta + y' \cos\theta;$$

oder endlich:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= (A+\xi)\sin\beta\cos\theta - (B+\upsilon)\sin\theta + (C+\zeta)\cos\beta\cos\theta; \\ y'' &= (A+\xi)\sin\beta\sin\theta + (B+\upsilon)\cos\theta + (C+\zeta)\cos\beta\sin\theta; \\ z'' &= -(A+\xi)\cos\beta + (C+\zeta)\sin\beta \end{aligned}\right\} (1)$$

Auf gleiche Weise hat man, wenn X, Y, Z die nach dem ersten Axensystem zerlegten Kräfte sind, und X'', Y'', Z'' dieselben nach dem letzten Axensystem zerlegt bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} X'' &= X\sin\beta\cos\theta - Y\sin\theta + Z\cos\beta\cos\theta; \\ Y'' &= X\sin\beta\sin\theta + Y\cos\theta + Z\cos\beta\sin\theta; \\ Z'' &= -X\cos\beta + Z\sin\beta; \end{aligned}\right\} (2)$$

woraus umgekehrt folgt:

$$\left.\begin{aligned} X &= X''\sin\beta\cos\theta + Y''\sin\theta\sin\beta - Z''\cos\beta; \\ Y &= -X''\sin\theta + Y''\cos\theta; \\ Z &= X''\cos\beta\cos\theta + Y''\sin\theta\cos\beta + Z''\sin\beta. \end{aligned}\right\} (3)$$

Differentiirt man die Gleichungen (1) zweimal, wobei x'', y'', z'', ξ, υ, ζ, θ als veränderlich betrachtet werden, und setzt $\frac{d\theta}{dt} = \lambda$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x''}{dt^2} &= -\lambda^2 x'' + \sin\beta\cos\theta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \sin\theta\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + \cos\beta\cos\theta\frac{d^2\zeta}{dt^2} \\ &\quad + 2\lambda\left(-\sin\beta\sin\theta\frac{d\xi}{dt} - \cos\theta\frac{d\upsilon}{dt} - \cos\beta\sin\theta\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ \frac{d^2y''}{dt^2} &= -\lambda^2 y'' + \sin\beta\sin\theta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \cos\theta\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + \cos\beta\sin\theta\frac{d^2\zeta}{dt^2} \\ &\quad + 2\lambda\left(\sin\beta\cos\theta\frac{d\xi}{dt} - \sin\theta\frac{d\upsilon}{dt} + \cos\beta\cos\theta\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ \frac{d^2z''}{dt^2} &= -\cos\beta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \sin\beta\frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{aligned}\right\} (4)$$

Die Kräfte, die auf das Pendel wirken, sind: die Anziehung der Erde; die Spannung des als eine geometrische Linie betrachteten Fadens, an dem das Pendel hängt, und der Widerstand der Luft.

Die Anziehung der Erde, wie sie an der Oberfläche derselben beobachtet wird, ist schon durch die Umdrehung der Erde modificirt. Es sei die beobachtete Schwerkraft nach den drei Coordinatenaxen x'', y'', z'' zerlegt: $-V$, $-V'$, $-V''$, so ist die wirkliche Anziehung der Erde nach denselben Richtungen zerlegt: $-V-\lambda^2 x''$; $-V'-\lambda^2 y''$; $-V''$. Die Spannung des Fadens sei N, und die Länge des Pendels a, so wird diese Spannung nach den drei Coordinatenaxen x, y, z zerlegt: $-N\frac{\xi}{a}$, $-N\frac{v}{a}$, $-N\frac{\zeta}{a}$. Der Widerstand der Luft sei mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ν proportionirt, oder $-\mu\nu^2$, so ist dieser Widerstand nach den Richtungen der Axen der x, y, z zerlegt: $-\mu\nu\frac{d\xi}{dt}$, $-\mu\nu\frac{dv}{dt}$, $-\mu\nu\frac{d\zeta}{dt}$.

Wir haben also, wenn wir die sämmtlichen Kräfte nach den Axen der x'', y'', z'' durch Hülfe der Formeln (2) zerlegen:

$$\left.\begin{aligned}
X'' &= -V-\lambda^2 x''-\left(N\frac{\xi}{a}+\mu\nu\frac{d\xi}{dt}\right)\sin\beta\cos\theta\\
&+\left(N\frac{v}{a}+\mu\nu\frac{dv}{dt}\right)\sin\theta-\left(N\frac{\zeta}{a}+\mu\nu\frac{d\zeta}{dt}\right)\cos\beta\cos\theta;\\
Y'' &= -V'-\lambda^2 y''-\left(N\frac{\xi}{a}+\mu\nu\frac{d\xi}{dt}\right)\sin\beta\sin\theta\\
&-\left(N\frac{v}{a}+\mu\nu\frac{dv}{dt}\right)\cos\theta-\left(N\frac{\zeta}{a}+\mu\nu\frac{d\zeta}{dt}\right)\cos\beta\sin\theta;\\
Z'' &= -V''+\left(\frac{\xi}{a}+\mu\nu\frac{d\xi}{dt}\right)\cos\beta\\
&\qquad -\left(N\frac{\zeta}{a}+\mu\nu\frac{d\zeta}{dt}\right)\sin\beta.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Nach den Gesetzen der Dynamik ist:

$$\frac{d^2x''}{dt^2}=X'',\quad \frac{d^2y''}{dt^2}=Y'',\quad \frac{d^2z''}{dt^2}=Z'';$$

wenn die Einheiten der Längenmaasse, Zeiten und Kräfte ge-

hörig angenommen werden. Die zweiten Glieder der Gleichungen (4) sind also den entsprechenden der Gleichungen (5) gleich. Multiplicirt man die so erhaltenen Gleichungen der Reihe nach 1) mit $\sin\beta\cos\theta$, $\sin\beta\sin\theta$, $-\cos\beta$; 2) mit $-\sin\theta$, $\cos\theta$, 0; 3) mit $\cos\beta\cos\theta$, $\cos\beta\sin\theta$, $\sin\beta$, und addirt die Producte, so erhält man, wenn man die nach den Axen der x, y, z zerlegte scheinbare mit der Schwungkraft der Erde behaftete Anziehung mit $-U$, $-U'$, $-U''$ bezeichnet, wodurch nach den Formeln (3)

$$\begin{aligned} U &= V\sin\beta\cos\theta + V'\sin\beta\sin\theta - V''\cos\beta;\\ U' &= -V\sin\theta + V'\cos\theta;\\ U'' &= V\cos\beta\cos\theta + V'\cos\beta\sin\theta + V''\sin\beta; \end{aligned}$$

wird, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\lambda\sin\beta\frac{dv}{dt} &= -U - N\frac{\xi}{a} - \mu\nu\frac{d\xi}{dt};\\ \frac{d^2v}{dt^2} + 2\lambda\sin\beta\frac{d\xi}{dt} + 2\lambda\cos\beta\frac{d\zeta}{dt} &= -U' - N\frac{v}{a} - \mu\nu\frac{dv}{dt};\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\lambda\cos\beta\frac{dv}{dt} &= -U'' - N\frac{\zeta}{a} - \mu\nu\frac{d\zeta}{dt}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Eliminirt man N, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\lambda\frac{dv}{dt}(\zeta\sin\beta - \xi\cos\beta)\\ = -U\zeta + U''\xi - \mu\nu\left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right)\\ \zeta\frac{d^2v}{dt^2} - v\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\lambda\left(\sin\beta\,\zeta\frac{d\xi}{dt} + \cos\beta\zeta\frac{d\zeta}{dt} + \cos\beta v\frac{dv}{dt}\right)\\ = -U'\zeta + U''v - \mu\nu\left(\zeta\frac{dv}{dt} - v\frac{d\zeta}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Man hat überdies die Bedingungsgleichung:

$$a^2 = \xi^2 + v^2 + \zeta^2,$$

also

$$v = \xi\frac{d\xi}{dt} + v\frac{dv}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt},$$

folglich

$$\sin\beta\,\zeta\frac{d\xi}{dt}+\cos\beta\,\zeta\frac{d\zeta}{dt}+\cos\beta\,v\frac{dv}{dt}=\frac{d\xi}{dt}(\zeta\sin\beta-\xi\cos\beta).$$

2) In dem Falle, da die Schwingungen des Pendels klein sind, kann man die Grössen ξ und v als von erster Ordnung betrachten, eben so $\frac{d\xi}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2v}{dt^2}$. Die Grösse ζ hingegen ist bis auf Grössen zweiter Ordnung $= a$; λ und μ aber sind sehr kleine Grössen. Ferner ist U'' der scheinbaren Schwere, also bis auf Grössen erster Ordnung, die aber mit einem äusserst kleinen Factor multiplicirt sind, gleich g (nahezu 10 Meter). Wenn man den Krümmungshalbmesser der Erdoberfläche im Meridian R, im ersten Vertical R' setzt, so ist $U=\frac{g\xi}{R}$, $U'=\frac{gv}{R'}$, beide wegen der Grösse von R und R' sehr kleine Grössen. Ordnet man nun die Gleichungen so, dass man die Glieder erster Ordnung absondert, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{d^2\xi}{dt^2}&=-g\xi+(a+\zeta)\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}-2\lambda\frac{dv}{dt}(\zeta\sin\beta-\xi\cos\beta)\\
&\quad+U\zeta+(g-U'')\xi+\mu\nu\left(\zeta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\zeta}{dt}\right);\\
a\frac{d^2v}{dt^2}&=-gv+(a+\zeta)\frac{d^2v}{dt^2}-v\frac{d^2\zeta}{dt^2}+2\lambda\frac{d\xi}{dt}(\zeta\sin\beta-\xi\cos\beta)\\
&\quad+U'\zeta+(g-U'')v+\mu\nu\left(\zeta\frac{dv}{dt}-v\frac{d\zeta}{dt}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{d^2\xi}{dt^2}&=-g\xi+\Theta;\\
a\frac{d^2v}{dt^2}&=-gv+\Theta'.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Die Grössen Θ, Θ' sind von der zweiten und höheren Ordnungen. Integrirt man, ohne diese Grössen zu berücksichtigen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= G\cos(\varkappa t) + H\sin(\varkappa t);\\ v &= G'\cos(\varkappa t) + H'\sin(\varkappa t).\end{aligned}\right\} (10)$$

G, G', H, H' bezeichnen Constanten, die von der anfänglichen Bewegung abhängen, $\varkappa$ aber ist $\sqrt{\frac{g}{a}}$.

Die Grössen Θ und Θ' können nur auf eben die Weise berücksichtigt werden, wie man in der Astronomie die sogenannten störenden Kräfte berücksichtigt. Man kann nehmlich die Grössen G, G', H, H' so bestimmen, dass die Formeln (10) für jeden Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Pendels angeben, wenn man die für diesen Zeitpunkt geltenden G, G', H, H' als constant annimmt. Differentiirt man diese Gleichungen, und setzt zugleich G, G', H, H' veränderlich, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -\varkappa G\sin(\varkappa t) + \varkappa H\cos(\varkappa t) + \cos(\varkappa t)\frac{dG}{dt} + \sin(\varkappa t)\frac{dH}{dt};\\ \frac{dv}{dt} &= -\varkappa G'\sin(\varkappa t) + \varkappa H'\cos(\varkappa t) + \cos(\varkappa t)\frac{dG'}{dt} + \sin(\varkappa t)\frac{dH'}{dt}.\end{aligned}\right\} (11)$$

Macht man also:

$$\left.\begin{aligned}0 &= \cos(\varkappa t)\frac{dG}{dt} + \sin(\varkappa t)\frac{dH}{dt};\\ 0 &= \cos(\varkappa t)\frac{dG'}{dt} + \sin(\varkappa t)\frac{dH'}{dt}.\end{aligned}\right\} (12)$$

so sind die Geschwindigkeiten nach beiden Coordinaten, durch die Formel (10) mit unveränderlichen G, G', H, H' dargestellt. Differentiirt man zum zweiten Male und berücksichtigt die Gleichung (12), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\varkappa^2\xi - \varkappa\sin(\varkappa t)\frac{dG}{dt} + \varkappa\cos(\varkappa t)\frac{dH}{dt};\\ \frac{d^2v}{dt^2} &= -\varkappa^2 v - \varkappa\sin(\varkappa t)\frac{dG'}{dt} + \varkappa\cos(\varkappa t)\frac{dH'}{dt}.\end{aligned}\right\} (13)$$

Also wird, wenn man mit (9) vergleicht:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Theta}{a} &= -\varkappa\sin(\varkappa t)\frac{dG}{dt} + \varkappa\cos(\varkappa t)\frac{dH}{dt};\\ \frac{\Theta'}{a} &= -\varkappa\sin(\varkappa t)\frac{dG'}{dt} + \varkappa\cos(\varkappa t)\frac{dH'}{dt}.\end{aligned}\right\} (14)$$

Aus (12) und (14) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\sin(\varkappa t)\frac{\Theta}{\sqrt{ag}}; & \frac{dG'}{dt} &= -\sin(\varkappa t)\frac{\Theta'}{\sqrt{ag}}; \\ \frac{dH}{dt} &= \cos(\varkappa t)\frac{\Theta}{\sqrt{ag}}. & \frac{dH'}{dt} &= \cos(\varkappa t)\frac{\Theta'}{\sqrt{ag}}. \end{aligned}\right\} (15)$$

Die Gleichungen (10) geben eine Ellipse, deren Lage und Grösse durch die Grössen G, G', H, H' bestimmt wird. Sei die grösste Ausweichung im Azimuthe ψ, von Süden nach Osten gezählt, und gehe das Pendel durch diesen Punkt zur Zeit T, sei ferner die Projection dieser Ausweichung E, die kleinste Ausweichung F, positiv genommen, wenn das Pendel sich von Süden nach Osten bewegt, im entgegengesetzten Falle negativ. Nimmt man nun E als die Axe der positiven x''', und die Axe der positiven y''' im Azimuthe $90^0 + \psi$ von Süden nach Osten gerechnet; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} x''' &= E\cos\varkappa(t-T) = E\cos(\varkappa T)\cos(\varkappa t) + E\sin(\varkappa T)\sin(\varkappa t); \\ y''' &= F\sin\varkappa(t-T) = -F\sin(\varkappa T)\cos(\varkappa t) + F\cos(\varkappa T)\sin(\varkappa t). \end{aligned}\right\} (16)$$

Da $\xi = x'''\cos\psi - y'''\sin\psi$; $v = x'''\sin\psi + y'''\cos\psi$; so folgt mit (10) verglichen:

$$\left.\begin{aligned} G &= E\cos\psi\cos(\varkappa T) + F\sin\psi\sin(\varkappa T); \\ H &= E\cos\psi\sin(\varkappa T) - F\sin\psi\cos\varkappa T); \\ G' &= E\sin\psi\cos(\varkappa T) - F\cos\psi\sin(\varkappa T); \\ H' &= E\sin\psi\sin(\varkappa T) + F\cos\psi\cos(\varkappa T). \end{aligned}\right\} (17)$$

Differentiirt man diese Gleichungen, so ergiebt sich: (18)

$$\frac{d\Theta}{dt} = \cos\psi\cos(\varkappa T)\frac{dE}{dt} + \sin\psi\sin(\varkappa T)\frac{dF}{dt}$$
$$+ [-E\sin\psi\cos(\varkappa T) + F\cos\psi\sin(\varkappa T)]\frac{d\psi}{dt}$$
$$+ [-E\cos\psi\sin(\varkappa T) + F\sin\psi\cos(\varkappa T)]\frac{\varkappa\cdot dT}{dt};$$

$$\frac{dH}{dt} = \cos\psi\sin(\varkappa T)\frac{dE}{dt} - \sin\psi\cos(\varkappa T)\frac{dF}{dt}$$
$$+ [-E\sin\psi\sin(\varkappa T) - F\cos\psi\cos(\varkappa T)]\frac{d\psi}{dt}$$
$$+ [E\cos\psi\cos(\varkappa T) + F\sin\psi\sin(\varkappa T)]\frac{\varkappa\cdot dT}{dt};$$

$$\frac{dG'}{dt} = \sin\psi\cos(\varkappa T)\frac{dE}{dt} - \cos\psi\sin(\varkappa T)\frac{dF}{dt}$$
$$+ [E\cos\psi\cos(\varkappa T) + F\sin\psi\sin(\varkappa T)]\frac{d\psi}{dt}$$
$$+ [-E\sin\psi\sin(\varkappa T) - F\cos\psi\cos(\varkappa T)]\frac{\varkappa . dT}{dt};$$
$$\frac{dH'}{dt} = \sin\psi\sin(\varkappa T)\frac{dE}{dt} + \cos\psi\cos(\varkappa T)\frac{dF}{dt}$$
$$+ [E\cos\psi\sin(\varkappa T) - F\sin\psi\cos(\varkappa T)]\frac{d\psi}{dt}$$
$$+ [E\sin\psi\cos(\varkappa T) - F\cos\psi\sin(\varkappa T)]\frac{\varkappa . dT}{dt}.$$

Am passendsten scheint es mir die Aenderung der Constanten E, F, ψ und T für eine Schwingung zu berechnen, weil auf diese Weise die periodischen Functionen verschwinden, und das Resultat am einfachsten wird; die Dauer der Schwingung wird $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \int dT$. Man kann zu dem Ende $T = 0$ setzen, wodurch sich ergiebt:

$$G = E\cos\psi,\ H = -F\sin\psi,\ G' = E\sin\psi,\ H' = F\cos\psi. \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dG}{d} &= \cos\psi\frac{dE}{dt} - E\sin\psi\frac{d\psi}{dt} + F\sin\psi\frac{\varkappa . dT}{dt};\\
\frac{dH}{dt} &= -\sin\psi\frac{dF}{dt} - F\cos\psi\frac{d\psi}{dt} + E\cos\psi\frac{\varkappa . dT}{dt};\\
\frac{dG'}{dt} &= \sin\psi\frac{dE}{dt} + E\cos\psi\frac{d\psi}{dt} - F\cos\psi\frac{\varkappa . dT}{dt};\\
\frac{dH'}{dt} &= \cos\psi\frac{dF}{dt} - F\sin\psi\frac{d\psi}{dt} + E\sin\psi\frac{\varkappa . dT}{dt}.
\end{aligned}\right\} (20)$$

Hieraus ergiebt sich sogleich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \cos\psi\frac{dG}{dt} + \sin\psi\frac{dG'}{dt};\\
\frac{dF}{dt} &= -\sin\psi\frac{dH}{dt} + \cos\psi\frac{dH'}{dt};\\
E\frac{d\psi}{dt} - \varkappa F\frac{dT}{dt} &= -\sin\psi\frac{dG}{dt} + \cos\psi\frac{dG'}{dt};\\
F\frac{d\psi}{dt} - \varkappa E\frac{dT}{dt} &= -\cos\psi\frac{dH}{dt} - \sin\psi\frac{dH'}{dt};
\end{aligned}\right\} (21)$$

Es sei also: $\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}} \frac{dG}{dt} dt = \Delta G$ und ebenso ΔH, $\Delta G'$, $\Delta H'$. *)

Um die Veränderungen von E, F, ψ, T während einer Schwingung zu bestimmen, die ich mit ΔE, ΔF, $\Delta\psi$, ΔT bezeichnen werde, kann man in den Gleichungen (21) ψ constant annehmen, wodurch nur Glieder von der zweiten Ordnung vernachlässigt werden; man erhält dadurch:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= \cos\psi\,\Delta G + \sin\psi\,\Delta G'; \\ \Delta F &= -\sin\psi\,\Delta H + \cos\psi\,\Delta H'; \\ E\,\Delta\psi - \varkappa F\,\Delta T &= -\sin\psi\,\Delta G + \cos\psi\,\Delta G'; \\ F\,\Delta\psi - \varkappa E\,\Delta T &= -\cos\psi\,\Delta H - \sin\psi\,\Delta H'. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

3) Die Veränderung der Ellipse entsteht aus vier verschiedenen Ursachen: 1) aus den Gliedern, die von der Kugelgestalt herrühren, auf deren Oberfläche der Punkt sich bewegt; 2) aus den Gliedern, die von der Umdrehung der Erde herrühren, und die mit λ multiplicirt sind; 3) aus den Gliedern, die von der Gestalt der Erde herrühren, die mit U, U', $(U''-g)$ multiplicirt sind; und endlich 4) aus den Gliedern, die von dem Widerstande der Luft herrühren, und mit μ multiplicirt sind. Ich werde, um die Uebersicht zu erleichtern, die verschiedenen Glieder einzeln entwickeln.

I. *Die von der Gestalt der Kugelfläche, auf der der Punkt sich bewegt, abhängigen Glieder.*

Es ist, wenn man blos auf diese Glieder Rücksicht nimmt, nach (8):

$$\Theta = (a+\zeta)\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2};$$

$$\Theta' = (a+\zeta)\frac{d^2v}{dt^2} - v\frac{d^2\zeta}{dt}.$$

Ferner

$\zeta^2 = a^2 - x'''^2 - y'''^2 = a^2 - E^2\cos(\varkappa t)^2 - F^2\sin(\varkappa t)^2$ etc.;

wenn man, wie erwähnt, $T=0$ setzt, also

---

*) π bedeutet den halben Kreisumfang für den Halbmesser $= 1$.

$$\zeta = -a + \tfrac{1}{2}\frac{E^2}{a}\cos(\varkappa t)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{F^2}{a}\sin(\varkappa t)^2;$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(-\frac{E^2}{a} + \frac{F^2}{a}\right)\varkappa \sin(\varkappa t)\cos(\varkappa t),$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varkappa^2\left(\frac{F^2-E^2}{a}\right)[\cos(\varkappa t)^2 - \sin(\varkappa t)^2].$$

Also, wenn man E, F, G, H als constant annimmt, wodurch bloss Grössen von der zweiten Ordnung in Beziehung auf Θ, Θ' vernachlässigt werden:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\varkappa^2\sin(\varkappa t)}{2\sqrt{ag}}\left[\frac{E^2}{a}\cos(\varkappa t)^2 + \frac{F^2}{a}\sin(\varkappa t)^2\right][G\cos(\varkappa t) + H\sin(\varkappa t)]$$
$$+ \frac{\varkappa^2(F^2-E^2)}{a}[\cos(\varkappa t)^2 - \sin(\varkappa t)^2]\,[G\cos(\varkappa t) + H\sin(\varkappa t)]\frac{\sin(\varkappa t)}{\sqrt{ag}};$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\varkappa^2\cos(\varkappa t)}{2\sqrt{ag}}\left[\frac{E^2}{a}\cos(\varkappa t)^2 + \frac{F^2}{a}\sin(\varkappa t)^2\right][G\cos(\varkappa t) + H\sin(\varkappa t)]$$
$$- \frac{\varkappa^2\cos(\varkappa t)}{\sqrt{ag}}\cdot\frac{F^2-E^2}{a}[\cos(\varkappa t)^2 - \sin(\varkappa t)^2]\,[G\cos(\varkappa t) + H\sin(\varkappa t)];$$

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{\varkappa^2\sin(\varkappa t)}{2\sqrt{ag}}\left[\frac{E^2}{a}\cos(\varkappa t)^2 + \frac{F^2}{a}\sin(\varkappa t)^2\right][G'\cos(\varkappa t) + H'\sin(\varkappa t)]$$
$$+ \frac{\varkappa^2\sin(\varkappa t)}{\sqrt{ag}}\cdot\frac{F^2-E^2}{a}[\cos(\varkappa t)^2 - \sin(\varkappa t)^2][G'\cos(\varkappa t) + H'\sin(\varkappa t)];$$

$$\frac{dH'}{dt} = -\frac{\varkappa^2\cos(\varkappa t)}{2\sqrt{ag}}\left[\frac{E^2}{a}\cos(\varkappa t)^2 + \frac{F^2}{a}\sin(\varkappa t)^2\right][G'\mathrm{c}.(\varkappa t) + H's.(\varkappa t)]$$
$$- \frac{\varkappa^2\cos(\varkappa t)}{\sqrt{ag}}\cdot\frac{F^2-E^2}{a}[\cos(\varkappa t)^2 - \sin(\varkappa t)^2][G'\cos(\varkappa t) + H'\sin(\varkappa t)].$$

Es ist

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\sin(\varkappa t)^4\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\cos(\varkappa t)^4\,dt = \frac{3\pi}{4\varkappa}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\sin(\varkappa t)^3\cos(\varkappa t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\sin(\varkappa t)\cos(\varkappa t)^3\,dt = 0$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\sin(\varkappa t)^2\cos(\varkappa t)^2\,dt = \frac{\pi}{4\varkappa}.$$

Hinfolglich:

$$\Delta G = \frac{\pi H}{8a^2}(5E^2 - F^2);\quad \Delta H = \frac{\pi G}{8a^2}(E^2 - 5F^2);$$

$$\Delta G' = \frac{\pi H'}{8a^2}(5E^2 - F^2);\quad \Delta H' = \frac{\pi G'}{8a^2}(E^2 - 5F^2).$$

Hieraus folgt durch Hülfe von (22) und (19);

$$\Delta E = \Delta F = 0$$

$$E\Delta\psi - \varkappa F\Delta T = \frac{\pi F}{8a^2}(5E^2 - F^2);$$

$$F\Delta\psi - \varkappa E\Delta T = -\frac{\pi E}{8a^2}(E^2 - 5F^2).$$

Aus den beiden letztern findet sich:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi &= \frac{3\pi EF}{4a^2} \\ \Delta T &= \frac{\pi(E^2+F^2)}{8a^2\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

II. *Die von der Umdrehung der Erde abhängigen Glieder.*

In Beziehung auf diese ist:

$$\Theta = -2\lambda\frac{dv}{dt}(\zeta\sin\beta - \xi\cos\beta);$$

$$\Theta' = 2\lambda\frac{d\xi}{dt}(\zeta\sin\beta - \xi\cos\beta).$$

Man kann die Grösse ξ als von erster Ordnung in Beziehung auf ζ vernachlässigen; ihr Einfluss würde übrigens, wenn sie berücksichtigt würde, sich als verschwindend ergeben; da

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\cos(\varkappa t)^3 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\cos(\varkappa t)^2\sin(\varkappa t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\cos(\varkappa t)\sin(\varkappa t)^2 dt$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{\varkappa}}\sin(\varkappa t)^3 dt = 0.$$ Es ist $\zeta = -a$, also:

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{2a\lambda\varkappa \sin\beta}{\sqrt{ag}} \sin(\varkappa t)\,[-G'\sin(\varkappa t) + H'\cos(\varkappa t)];$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{2a\lambda\varkappa \sin\beta}{\sqrt{ag}} \cos(\varkappa t)\,[-G'\sin(\varkappa t) + H'\cos(\varkappa t)];$$

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{2a\lambda\varkappa \sin\beta}{\sqrt{ag}} \sin(\varkappa t)\,[-G\sin(\varkappa t) + H\cos(\varkappa t)];$$

$$\frac{dH'}{dt} = -\frac{2a\lambda\varkappa \sin\beta}{\sqrt{ag}} \cos(\varkappa t)\,[-G\sin(\varkappa t) + H\cos(\varkappa t)].$$

Demnach:

$$\Delta G = \frac{2a\lambda\pi \sin\beta\, G'}{\sqrt{ag}}; \quad \Delta H = \frac{2a\lambda\pi \sin\beta\, H'}{\sqrt{ag}};$$

$$\Delta G' = -\frac{2a\lambda\pi \sin\beta\, G}{\sqrt{ag}}; \quad \Delta H' = -\frac{2a\lambda\pi \sin\beta\, H}{\sqrt{ag}}.$$

Mittelst der Formeln (22) findet sich also:

$$\Delta E = \Delta F = 0.$$

$$E\Delta\psi - \varkappa F\Delta T = -\frac{2a\lambda\pi \sin\beta\, E}{\sqrt{ag}};$$

$$F\Delta\psi + \varkappa E\Delta T = -\frac{2a\lambda\pi \sin\beta\, F}{\sqrt{ag}};$$

also

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi &= -2\lambda\pi \sin\beta \sqrt{\frac{a}{g}} \\ \Delta T &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Für die Zeit einer Schwingung ist $\Delta\Theta = 2\lambda\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Es bewegt sich also die Ebene der Pendelschwingung, oder der Ort, wo die grösste Elongation stattfindet, von Süden nach Westen mit einer in jedem Azimuthe gleichen Geschwindigkeit, die sich zur Geschwindigkeit der Umdrehung der Erde verhält wie der Sinus der geographischen Breite zur Einheit.

III. *Die von der Gestalt der Niveaufläche der Erde abhängigen Glieder.*

Man kann die von $U'' - g$ abhängigen Glieder vernachlässigen, aus demselben Grunde, wie die im vorigen Abschnitte von ξ abhängigen Glieder vernachlässigt sind. Es wird also:

$$\Theta = \frac{g\xi\iota}{R}, \quad \Theta' = \frac{g\nu\iota}{R'}$$

Demnach:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{ga\sin(\varkappa t)}{R\sqrt{ag}}(G\cos(\varkappa t) + H\sin(\varkappa t));$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{ga\cos(\varkappa t)}{R\sqrt{ag}}(G\cos\varkappa t) + H\sin(\varkappa t));$$

$$\frac{dG'}{dt} = \frac{ag'\sin(\varkappa t)}{R'\sqrt{ag}}(G'\cos(\varkappa t) + H'\sin(\varkappa t));$$

$$\frac{dH'}{dt} = -\frac{ag\cos(\varkappa t)}{R'\sqrt{ag}}(G'\cos(\varkappa t) + H'\sin(\varkappa t)).$$

also durch die Gleichungen (22)

$$\Delta G = \frac{\pi aH}{R}; \quad \Delta H = -\frac{\pi aG}{R};$$

$$\Delta G' = \frac{\pi aH'}{R'}; \quad \Delta H' = -\frac{\pi aG'}{R'}.$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta E &= \pi aF\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right);\\
\Delta F &= \pi aE\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right);\\
E\Delta\psi - \varkappa F\Delta T &= \pi aF\left(\frac{\sin\psi^2}{R} + \frac{\cos\psi^2}{R'}\right);\\
F\Delta\psi - \varkappa E\Delta T &= \pi aE\left(\frac{\cos\psi^2}{R} + \frac{\sin\psi^2}{R'}\right);\\
\text{also: } \Delta\psi &= \frac{\pi aEF\cos 2\psi}{EE - FF}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right);\\
\Delta T &= -\frac{\pi a}{\varkappa R}.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Es seien die Axen des Umdrehungssphäroids, die des Aequators K, die Umdrehungsaxe $K(1-\varepsilon)$, so dass ε die Abplattung ist. Man hat also:

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-\varepsilon)^2} = k^2;$$

wenn die Axe der x im Aequator und im Meridiane des Pendels ist, die Axe der y senkrecht darauf und ebenfalls im Aequator, die Axe der z aber nach dem Nordpole gerichtet ist. Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte der Erde. Es sei die Axe der x_1 in einer durch den Mittelpunkt der Erde gehenden mit dem Horizonte des Orts, dessen Breite β parallelen Ebene nach Süden gerichtet; die Axe der y_1 nach Osten, die der z_1 nach dem Zenith gerichtet. Man hat also:

$$x = x_1 \sin\beta + z_1 \cos\beta;$$
$$z = -x_1 \cos\beta + z_1 \sin\beta.$$

Hinfolglich, wenn man blos die erste Potenz von ε berücksichtigt: (26)

$$x_1^2 + z_1^2 + y^2 + 2\varepsilon (x_1^2 \cos\beta^2 - 2x_1 z_1 \sin\beta\cos\beta + z_1^2 \sin\beta^2) = k^2.$$

Im Meridian, wo $y = 0$ ist, hat man

$$x_1^2 (1 + 2\varepsilon\cos\beta^2) - 4\varepsilon x_1 z_1 \sin\beta\cos\beta + z_1^2 (1 + 2\varepsilon\sin\beta^2) - k^2 = 0,$$

also

$$x_1 = 2\varepsilon z_1 \sin\beta\cos\beta \pm \frac{\sqrt{(k^2 - (1 + 2\varepsilon\sin\beta^2) z_1^2)}}{1 + \varepsilon\cos\beta^2}.$$

Der grösste Werth von z_1 ist da, wo der Horizont die Erde berührt, für welchen Punkt offenbar:

$$z_1 = k(1 - \varepsilon\sin\beta^2);$$
$$x_1 = 2\varepsilon k \sin\beta\cos\beta.$$

Seien also x_2, z_2 die Coordinaten an der Oberfläche der Erde, so wird

$$z_1 = z_2 + k(1 - \varepsilon\sin\beta^2);$$
$$x_1 = x_2 + 2\varepsilon\sin\beta\cos\beta.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (26), so folgt:

$$(1 + 2\varepsilon\cos\beta^2) x_2^2 - 4\varepsilon x_2 z_2 \sin\beta\cos\beta + z_2^2 (1 + 2\varepsilon\sin\beta^2)$$
$$+ 2k(1 + \varepsilon\sin\beta^2) z_2 + y^2 = 0.$$

Da x_2 und y in der Nähe des Berührungspunktes des Horizonts mit der Oberfläche als Grössen erster Ordnung betrach-

bewegung der grössten Ausweichung keinen Einfluss, er verkleinert nur diese Ausweichung selbst. Es bleibt also nur die Gestalt der Kugelfläche, auf der das Pendel sich bewegt, die in der von der Umdrehung der Erde bewirkten Azimuthaldrehung des Punktes der grössten Ausweichung eine Aenderung bewirken kann. Es wird nach (23) diese Wirkung um so grösser, je grösser F ist, oder je mehr der Kegelmantel den der Faden, an dem das Pendel hängt, beschreibt, sich öffnet. Könnte man beim Loslassen des Pendels jede Seitenbewegung vermeiden, so würde, mit Vermeidung jedes Luftzugs, jedes Pendel die Erscheinung zeigen. Da dieses aber unnöthig ist, so müssen die Dimensionen so gross genommen werden, dass die etwanigen kleinsten Ausweichungen kleiner sind, als dass sie die Wirkung der Umdrehung der Erde aufheben könnten. Bei Foucaults letztem Versuche in der Kuppel des Pantheons war $a = 67$ Meter, $E = 3$ Meter, und es erforderte nach (23) eine kleinste Ausweichung von beiläufig 0,7 Meter um in dem Falle, dass das Pendel sich im Mantel in der Richtung von Süd nach Ost bewegte, die von der Umdrehung der Erde herrührende Aenderung des Azimuths der grössten Ausweichung aufzuheben; oder bei einer Schwingung in entgegengesetzter Richtung zu verdoppeln. Bei der sorglosesten Behandlung konnte ein solcher Seitenschwung nicht entstehen, und da überdies das Pendel eine bedeutende Schwere hatte, also von schwachen, durch die Bewegungen der Zuschauer hervorgebrachten Luftströmungen wenig afficirt wurde; so mussten diese Versuche sämmtlich gelingen. Bei einer Länge des Pendels von 20 Fuss hingegen, und einer grössten Elongation von 1 Fuss würde eine kleinste Ausweichung von 10 Linien hinreichen, um den Effect der Axendrehung der Erde aufzuheben, oder zu verdoppeln. Kann man also die Schwingungen so einrichten, dass blos 1 oder 2 Linien grösste Elongation ist, so wird schon in einer guten Viertelstunde die Drehung ziemlich merklich. Um alle Zweifel zu heben, kann man jedenfalls das Pendel nach beiden Richtungen schwingen lassen, die kleinsten Ausweichungen beobachten, und so durch Einschalten die Azimuthalbewegung des Pendels der grössten

Abweichung in dem Falle, dass das Pendel in einer Ebene schwingt, bestimmen.

5) Schliesslich füge ich noch eine Bemerkung hinzu über den Einfluss der sphäroidischen Gestalt der Erde auf die horizontale Bewegung zweier Punkte, die an den beiden Enden einer horizontalen geometrischen Linie befestigt sind, deren Mitte unterstützt ist. Man nimmt gewöhnlich an, dass ein solches Punktenpaar in jedem Azimuthe in Gleichgewicht sei; welches jedoch keineswegs der Fall ist. Denn es sei die Entfernung des einen Punkts vom Drehungsmittelpunkte der Linie f, das Azimuth der Richtung der Linie ψ; so ist auf den Drehungspunkt bezogen: $\xi = f\cos\psi$; $v = f\sin\psi$. Also ist, wenn man die Lothlinie am Drehungsmittelpunkte als Axe der z annimmt, die Kraft, die den Punkt nach der Axe der x mehr nach Süden treibt, nach 2:

$$X = -\frac{gf\cos\psi}{R}; \text{ nach Osten } Y = -\frac{gf\sin\psi}{R'}.$$

Zerlegt man diese Kräfte nach den Richtungen x' parallel mit der Linie f, und y' senkrecht darauf in der Richtung, in de das Azimuth vergrössert wird; so folgt für diese beiden Kräfte:

$$X' = -gf\left[\frac{\cos\psi^2}{R} + \frac{\sin\psi^2}{R'}\right]; \quad Y' = gf\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Für den am andern Ende der Linie angebrachten körperlichen Punkt sind die beiden Kräfte dieselben; jedoch heben sich die X', da sie einander entgegengesetzt wirken, auf; die Y' hingegen streben ihre resp. Punkte nach derselben Richtung zu drehen. Es ist also hinreichend, die Bewegung eines dieser Punkte zu bestimmen. Es sei $s = f\psi$ der vom Punkte beschriebene Weg; so ist:

$$f\frac{d^2\psi}{dt^2} = gf\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = \frac{2\varepsilon\cos\beta^2\, gf\sin\psi\cos\psi}{k}$$

nach (27), also

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{2\varepsilon g\cos\beta^2\sin\psi\cos\psi}{k}.$$

Im ersten Quadranten zwischen Süd und Ost strebt also der Punkt sich nach Osten zu bewegen; im zweiten Quadranten

zwischen Ost und Nord aber sich zurück nach Osten zu bewegen. Es ist also die Lage des stabilen Gleichgewichts in der Richtung von Ost nach West. Entfernt man die Linie aus dieser Lage um einen kleinen Winkel φ, oder setzt $\psi = 90^0 + \varphi$; so wird, wenn man die höhern Potenzen von φ vernachlässigt:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2cg\cos\beta^2}{k}\varphi.$$

Demnach, wenn man

$$\sqrt{\frac{2cg}{k}} \cdot \cos\beta = \mu \text{ setzt:}$$

$$\varphi = M\sin(\mu t + C),$$

wo M und C Constanten sind. Es erfolgt also eine Schwingung in der Zeit

$$\frac{\pi}{\mu} = \frac{\pi}{\cos\beta}\sqrt{\frac{k}{2cg}}, \text{ oder } \frac{86400 \cdot \cos\beta}{\pi}\sqrt{\frac{2cg}{k}} = 2{,}7\cos\beta$$

Schwingungen in einem Tage.

Diese Anzahl ist von der Entfernung des Punkts vom festen Punkte unabhängig, demnach auch ein dünner Stab von beliebiger Länge, der horizontal an einem torsionslosen Faden aufgehangen wäre, dieselbe Anzahl Schwingungen in einem Tage machen würde. Es scheint nicht ganz unmöglich zu sein, diese Grösse unter dem Aequator merklich zu machen. Gesetzt, man hätte einen mit einem Spiegel am Ende versehenen Stab unter einer luftleeren Glasglocke, und der auf ähnliche Weise wie die Gauss'schen Magnetometer das Bild einer Scale in ein Fernrohr würfe. Wenn dieser Apparat blos vermöge der Torsion des Fadens, an dem er aufgehangen wäre, eine Oscillation in 2 Stunden machte, so wäre die Torsion 144, wenn man die Kraft zur Einheit nimmt, die eine Oscillation in 24 Stunden hervorbringt. Die von der sphäroischen Gestalt der Erde herrührende Kraft wäre etwa $+7{,}8$ im ersten Vertical, und $-7{,}8$ im Meridian, also die ganze Kraft 151,8 im ersten, 136,2 im zweiten Falle; oder die Zeit einer Schwingung im ersten Vertikal $1^h\,56'\,52''$, im Meridian $2^h\,3'\,23''$. In der Zeit von $6'\,31''$ veränderte sich aber das Bild der Scale etwa um $100'$ im Fernrohre, wenn die Schwingungsweiten auf jeder Seite blos 5^0 wären.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No. 2.*)

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

TIRÉS DU

BULLETIN PHYSICO-MATHÉMATIQUE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

Tome I.

4^e^ LIVRAISON.

(Prix: 50 Cop. arg. — 16 Ngr.)

St.-Pétersbourg;

de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.

1852.

Se vend chez MM. *Eggers* et *Comp.* libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky, No. $^1/_{10}$, et à Leipzic, chez M. *Léopold Voss.*

CONTENU.

Page.

Dr. M. G. von Paucker. Zur Theorie der kleinsten Quadrate. (Erster Artikel) 333

M. V. Bounjakowsky. Note sur le maximum du nombre des positions d'équilibre d'un prisme triangulaire homogène, plongé dans un fluide 347

M. J. Somoff. Démonstration de quelques formules elliptiques de C. G. J. Jacobi 359

M. N. Braschmann. Note sur le mouvement du pendule simple 370

Д. М. Перевощиковъ. О предваренiи равноденствiй. (Съ чертежемъ.) 377

M. Clausen. Ueber die Olbers'sche Methode Cometen zu berechnen 406

Dr. M. G. von Paucker. Das astronomische Längenmaas . . . 408

Le même. Zur Theorie der kleinsten Quadrate. (Zweiter Artikel.) 433

Le même. Zur Theorie der kleinsten Quadrate. (Dritter Artikel.) 436

M. O. Struve. Observations de la comète de Faye, faites à Poulkova, en 1851 440

$\frac{12}{24}$ September 1851.

Zur Theorie der kleinsten Quadrate. (Fünfter Artikel.)

Von Dr. M. G. PAUCKER, correspondirendem Mitgliede der Akademie.

Die Potenzreihe in der Physik.

Während das Gesetz der periodischen Reihe für physikalische Erscheinungen häufig untersucht worden ist, scheint die zu diesem Zweck anzuwendende Potenzreihe weniger beachtet worden zu sein. In einem jetzt vergriffenen Aufsatz: »Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme auf physikalische Beobachtungen, 1819«, habe ich die Ausdehnung tropfbarer Flüssigkeiten, das Eigengewicht des Wassers, die Elasticität des Wasserdampfs, auf Grund der Beobachtungen Deluc's, Charles und Dalton's, in denen die Wärme als bestimmende Ursache gleichmässig fortschreitet, durch eine Potenzreihe ausgedrückt. Die damals gefundenen Zahlwerthe können nach dem jetzigen Stand der Frage keine Geltung mehr haben, sondern müssen nach den neueren scharfen Beobachtungen von Regnault u. A. berichtigt werden. Auch das Rechnungsverfahren selbst lässt sich ungemein vereinfachen.

Die wirkende Ursache sei s, die gesuchten Mittel seien m, m_1, m_2 u. s. w. Wenn es möglich ist, die Beobachtungen

durch geringe Abänderung so darzustellen, dass ihre Differenzen erster, zweiter oder höherer Ordnung einander gleich werden, so lässt sich die ausgeglichene Beobachtung L als Potenzreihe ausdrücken

$$L = m + am_1 + a^2m_2 + a^3m_3 \ldots$$

Die gegebenen unausgeglichenen Beobachtungen seien l', l'', l''' . . . . . Hieraus findet man die Ausgleichungssummen

$$\begin{aligned} l' + l'' + l''' \ldots &= \underbrace{l} = s \\ a'l' + a''l'' + a'''l''' \ldots &= \underbrace{al} = s_1 \\ a'a'l' + a''a''l'' \ldots &= \underbrace{a^2l} = s_2 \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Werthe der a für die n Beobachtungen geben

A	n	$\underbrace{a}$	$\underbrace{a^2}$ . . . . .
B	$\underbrace{a}$	$\underbrace{a^2}$	$\underbrace{a^3}$ . . . .
C	$\underbrace{a^2}$	$\underbrace{a^3}$	$\underbrace{a^4}$ . . . . .

u. s. w.

hieraus durch Umwendung

$\mathfrak{A}$	$\underbrace{aa}$	$\underbrace{ab}$	$\underbrace{ac}$ . . .
$\mathfrak{B}$	$\underbrace{ab}$	$\underbrace{bb}$	$\underbrace{bc}$ . . .
$\mathfrak{C}$	$\underbrace{ac}$	$\underbrace{bc}$	$\underbrace{cc}$ . . .

u. s. w.

Aus diesen Zahlen ergeben sich die Mittel

$$\begin{aligned} m &= \underbrace{aa}\, s + \underbrace{ab}\, s_1 + \underbrace{ac}\, s_2 \ldots = \underbrace{\mathfrak{A}s} \\ m_1 &= \underbrace{ab}\, s + \underbrace{bb}\, s_1 + \underbrace{bc}\, s_2 \ldots = \underbrace{\mathfrak{B}s} \\ m_2 &= \underbrace{ac}\, s + \underbrace{bc}\, s_1 + \underbrace{cc}\, s_2 \ldots = \underbrace{\mathfrak{C}s} \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Mittel geben durch die angenommene Potenzreihe die ausgeglichenen Beobachtungen

$$L', \quad L'', \quad L''$$

und die Grenzabweichungen

$$k' = l' - L', \quad k'' = l'' - L'' \text{ u. s. w.}$$

Zur Prüfung dienen die Gleichungen

$$\underbrace{Am} = s, \quad \underbrace{Bm} = s_1, \quad \underbrace{Cm} = s_2 \text{ u. s. w.}$$

$$\underbrace{k} = 0, \quad \underbrace{ak} = 0, \quad \underbrace{a^2k} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Noch sei

$$sm + s_1m_1 + s_2m_2 \ldots = \underbrace{sm}$$

so ist

$$\underbrace{kk} = \underbrace{kl} = \underbrace{ll} - \underbrace{Ll} = \underbrace{ll} - \underbrace{sm}$$

Die Grenzabweichungen sind nicht als Beobachtungsfehler anzusehen, sondern als Ausgleichungsfehler, welche sämmtlich verschwinden, wenn in der Potenzreihe soviel Mittel oder Glieder angenommen werden, als Beobachtungen vorhanden sind, also wenn $r = n$ ist.

Den Mitteln m, m_1, m_2 .. entsprechen die mittlern Ausgleichungsfehler $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ ... Man berechnet sie durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{d} = \frac{\underbrace{aa} \cdot kk}{n - r}, \qquad \mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_1 = \frac{\underbrace{bb} \cdot kk}{n - r} \text{ u. s. w.}$$

Die Sicherheit der gefundenen Mittel wird angezeigt durch die Verhältnisse

$$\frac{\mathfrak{d}}{m}, \quad \frac{\mathfrak{d}_1}{m_1}, \quad \frac{\mathfrak{d}_2}{m_2} \text{ u. s. w.}$$

Der Ausgang oder Nullpunkt der a befinde sich in dem Anfang der Beobachtungsreihe. Die wirkende Ursache a sei gleichmässig fortschreitend nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. bis n. Setzt man $n\,(n+1) = v$, so sind die Potenzsummen:

$$\underbrace{a} = \tfrac{1}{2}v, \qquad \underbrace{a^2} = \tfrac{1}{6}(2n+1)v,$$

$$\underbrace{a^3} = \tfrac{1}{4}v^2, \qquad \underbrace{a^4} = \tfrac{1}{30}(2n+1)v\,(3v-1),$$

$$\underbrace{a^5} = \tfrac{1}{12}v^2\,(2v-1), \qquad \underbrace{a^6} = \tfrac{1}{42}(2n+1)v\,(3v^2-3v+1),$$

$$\underbrace{a^7} = \tfrac{1}{24}v^2(3v^2-4v+2), \qquad \underbrace{a^8} = \tfrac{1}{90}(2n+1)v\,(5v^3-10v^2+8v-3)$$

u. s. w.

Die allgemeinen Ausdrücke, welche hieraus für $\underbrace{aa}$, $\underbrace{ab}$ .. $\underbrace{bb}$ .. folgen, habe ich zum Theil in der oben erwähnten Abhandlung gegeben. Ich übergehe sie hier, weil ich sogleich ein einfacheres Verfahren anzeigen werde.

Noch ist folgende Bemerkung zu machen. Es seien $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ ... so bestimmt, dass

$$s = n\mathfrak{S}, \quad s_1 = \underbrace{a}\,\mathfrak{S}_1, \quad s_2 = \underbrace{a^2}\,\mathfrak{S}_2 \text{ u. s. w.}$$

ferner seien r, $\mathfrak{r}$, t u. s. w. so berechnet, dass

$$\begin{aligned} r &= n\,\underbrace{aa}, & r_1 &= \underbrace{a}\,\underbrace{ab}, & r_2 &= \underbrace{a^2}\,\underbrace{ac} \ldots \\ \mathfrak{r} &= n\,\underbrace{ab}, & \mathfrak{r}_1 &= \underbrace{a}\,\underbrace{bb}, & \mathfrak{r}_2 &= \underbrace{a^2}\,\underbrace{bc} \ldots \\ t &= n\,\underbrace{ac}, & t_1 &= \underbrace{a}\,\underbrace{bc}, & t_2 &= \underbrace{a^2}\,\underbrace{cc} \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

Dann ist

$$\begin{aligned} r + r_1 + r_2 \ldots &= \underbrace{r} = 1 \\ \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 \ldots &= \underbrace{\mathfrak{r}} = 0 \\ t + t_1 + t_2 \ldots &= \underbrace{t} = 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} m &= r\mathfrak{S} + r_1\mathfrak{S}_1 + r_2\mathfrak{S}_2 \ldots = \underbrace{r\mathfrak{S}} \\ m_1 &= \mathfrak{r}\mathfrak{S} + \mathfrak{r}_1\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{r}_2\mathfrak{S}_2 \ldots = \underbrace{\mathfrak{r}\mathfrak{S}} \\ m_2 &= t\mathfrak{S} + t_1\mathfrak{S}_1 + t_2\mathfrak{S}_2 \ldots = \underbrace{t\mathfrak{S}} \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Vereinfachung ist indess nur eine scheinbare. Die Produkte aus denen die Mittel m, m_1, m_2 ... zusammengesetzt sind, bleiben dieselben und geben die gesuchten Mittel durch Unterschiede grosser Zahlen.

Es zeigt sich aber ein Weg auf welchem eine wirkliche Vereinfachung und Abkürzung erlangt wird. Es scheint mir, dass dieses Verfahren auch bei der Ausgleichung astronomischer Beobachtungen mit Vortheil anwendbar sein dürfte.

Zuerst sei bemerkt, dass es gleichgültig ist, wo man den Nullpunkt oder Ausgang der α annimmt, da man ihn leicht auf eine andere Stelle verlegen kann.

Es sei z. B.

$$L = m + am_1 + a^2m_2 + a^3m_3 \ldots$$

und man wolle

$$L = \mu + a\mu_1 + a^2\mu_2 + a^3\mu_3 \ldots$$

wo

$$a = \alpha + b$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\mu &= m + bm_1 + b^2m_2 + b^3m_3 + b^4m_4 \ldots \\
\mu_1 &= m_1 + 2bm_2 + 3b^2m_3 + 4b^3m_4 \ldots \\
\mu_2 &= m_2 + 3bm_3 + 6b^2m_4 \ldots \\
\mu_3 &= m_3 + 4bm_4 \ldots \\
m_4 &= m_4 \ldots
\end{aligned}$$

Durch gehörige Wahl von b kann also das Anfangsglied oder irgend ein anderes Glied der Reihe L weggeschafft werden.

Wenn die Beobachtungsreihe eine Mitte hat, so sind die Ursachen paarweise gleichweit von der mittleren Ursache entfernt, die eine kleiner, die andere um eben so viel grösser als die mittlere. Bei einer solchen Beobachtungsreihe verlege man den Ausgang der a in die Mitte, indem man die mittlere Ursache von den übrigen abzieht. Man theile auch zur Vereinfachung die Unterschiede mit einem gemeinsamen Theiler. Die Beobachtungsreihe besteht dann aus zwei Hälften, deren eine die positiven a, die andere die ihnen gleichen negativen a enthält.

Diese Annahme des Ausgangs bewirkt, dass die Potenzsummen von ungeraden Exponenten verschwinden, es mögen die a gleichmässig oder ungleichmässig fortschreiten:

$$\underset{\sim}{a} = 0, \quad \underset{\sim}{a^3} = 0, \quad \underset{\sim}{a^5} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Aus dem Verschwinden der ungradzahligen Potenzsummen folgen zwei unabhängige Systeme. Das eine System giebt die Mittel gerader Stelle, das andere die Mittel ungerader Stelle. Es sei z. B.

$$L = m + am_1 + a^2m_2 + a^3m_3 + a^4m_4 \ldots$$

so sind die Bedingungsgleichungen beider Systeme

$$\text{I.}\quad \begin{cases} s = n\,; \; m_1 + \underbrace{a^2}\, m_2 + \underbrace{a^4}\, m_3 \\ s_2 = \underbrace{a^2}\, m + \underbrace{a^4}\, m_2 + \underbrace{a^6}\, m_3 \\ s_4 = \underbrace{a^4}\, m + \underbrace{a^6}\, m_2 + \underbrace{a^8}\, m_3 \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} s_1 = \underbrace{a^2}\, m_1 + \underbrace{a^4}\, m_2 \\ s_3 = \underbrace{a^4}\, m_1 + \underbrace{a^6}\, m_2 \end{cases}$$

Statt eines fünfgliedrigen Systems hat man also ein dreigliedriges und ein zweigliedriges System aufzulösen.

Es sei

$$L = am_1 + a^2m_2 + a^3m_3 + a^4m_4$$

so sind die Bedingungsgleichungen beider Systeme

$$\text{II.}\quad \begin{cases} s_1 = \underbrace{a^2}\, m_1 + \underbrace{a^4}\, m_2 \\ s_3 = \underbrace{a^4}\, m_1 + \underbrace{a^6}\, m_2 \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases} s_2 = \underbrace{a^4}\, m_2 + \underbrace{a^6}\, m_3 \\ s_4 = \underbrace{a^8}\, m_2 + \underbrace{a^8}\, m_4 \end{cases}$$

Statt eines viergliedrigen Systems sind hier zwei zweigliedrige aufzulösen.

Es habe ferner die Beobachtungsreihe nicht nur eine Mitte, sondern ausserdem eine gleichmässig fortschreitende Ursache. Nach Verlegung des Ausgangs in die Mitte und nach Theilung der Unterschiede durch einen Gemeintheiler erhält man in jeder Hälfte dieselbe Reihe gleichmässig wachsender Zahlen. Wenn die Anzahl n der Beobachtungen ungerade ist, so kommt man auf die natürlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . . $\frac{n-1}{2}$, ist aber n gerade, so erhält man die halben ungeraden Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, . . . $\frac{n-1}{2}$.

Bemerkenswerth und wie mir scheint noch nicht angezeigt, ist, dass für die halben ungeraden Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ . . der Ausdruck der Potenzsumme bei geraden Exponenten ganz derselbe ist, wie bei den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . .

In beiden Fällen sei nämlich $v^2 + 1 = 4v$, so sind die doppelten Potenzsummen gerader Exponenten

$$\underbrace{a^2} = \tfrac{1}{3}nv$$
$$\underbrace{a^4} = \tfrac{1}{15}nv\ (3v-1)$$
$$\underbrace{a^6} = \tfrac{1}{21}nv\ (3v^2-3v+1)$$
$$\underbrace{a^8} = \tfrac{1}{45}nv\ (5v^3-10v^2+9v-3)$$
$$\underbrace{a^{10}} = \tfrac{1}{33}nv\ (v-1)(3v^3-7v^2+10v-5)$$

u. s. w.

Folgende Gleichungen zeigen die gegenseitige Abhängigkeit dieser doppelten Potenzsummen, wobei die Binomialzahlen bezeichnet sind durch

$$\overset{1}{x} = \frac{x}{1},\quad \overset{2}{x} = \frac{x(x-1)}{1\,.\,2},\quad \overset{3}{x} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\ \text{u. s. w.}$$

$$nv \ldots\ldots\ldots\ldots = \overset{1}{3}\,\underbrace{a^2}$$
$$nv(v+\overset{1}{3}) \ldots\ldots\ldots = \overset{1}{5}\,\underbrace{a^4} + \overset{2}{5}\,\underbrace{a^2}$$
$$nv(v^2+\overset{2}{4}v+\overset{1}{5}) \ldots\ldots = \overset{1}{7}\,\underbrace{a^6} + \overset{2}{7}\,\underbrace{a^4} + \overset{3}{7}\,\underbrace{a^2}$$
$$nv(v^3+\overset{3}{5}v^2+\overset{2}{6}v+\overset{1}{7}) \ldots = \overset{1}{9}\,\underbrace{a^8} + \overset{2}{9}\,\underbrace{a^6} + \overset{3}{9}\,\underbrace{a^4} + \overset{4}{9}\,\underbrace{a^2}$$
$$nv(v^4+\overset{4}{6}v^3+\overset{3}{7}v^2+\overset{2}{8}v+\overset{1}{9}) = \overset{1}{11}\,\underbrace{a^{10}} + \overset{2}{11}\,\underbrace{a^8} + \overset{3}{11}\,\underbrace{a^6} + \overset{4}{11}\,\underbrace{a^4} + \overset{5}{11}\,\underbrace{a^2}$$

u. s. w.

Die aufzulösenden Systeme sind, wie oben gefunden worden:

$$\text{I}\begin{cases} n & \underbrace{a^2} & \underbrace{a^4} \ldots \\ \underbrace{a^2} & \underbrace{a^4} & \underbrace{a^6} \ldots \\ \underbrace{a^4} & \underbrace{a^6} & \underbrace{a^8} \ldots \end{cases} \quad \text{II}\begin{cases} \underbrace{a^2} & \underbrace{a^4} & \underbrace{a^6} \ldots \\ \underbrace{a^4} & \underbrace{a^6} & \underbrace{a^8} \ldots \\ \underbrace{a^6} & \underbrace{a^8} & \underbrace{a^{10}} \ldots \end{cases} \quad \text{III}\begin{cases} \underbrace{a^4} & \underbrace{a^6} & \underbrace{a^8} \ldots \\ \underbrace{a^6} & \underbrace{a^8} & \underbrace{a^{10}} \ldots \\ \underbrace{a^8} & \underbrace{a^{10}} & \underbrace{a^{12}} \ldots \end{cases}$$

Für fünf Glieder von L gelten folgende Auflösungen:

Zwei Glieder von I.

$$45\,N = nv\,(4v-3)$$
$$15\,N\,\underbrace{aa} = v\,(3v-1)$$
$$-5\,N\,\underbrace{ab} = v$$
$$N\,\underbrace{bb} = 1$$

Drei Glieder von I.

$$11025\,N = 4nv(v-2)(4v-3)(4v-15)$$
$$735\,N\,\underbrace{aa} = v(v-2)(15v^2-50v+12)$$
$$-21\,N\,\underbrace{ab} = v(v-2)(2v-3)$$
$$35\,N\,\underbrace{ac} = 3v(v-2)$$
$$5\,N\,\underbrace{bb} = 4v^2-8v+5$$
$$-7\,N\,\underbrace{bc} = 6v-5$$
$$N\,\underbrace{cc} = 1$$

Zwei Glieder von II.

$$175\,N = nv(v-2)(4v-3)$$
$$7\,N\,\underbrace{aa} = 3v^2-3v+1$$
$$-5\,N\,\underbrace{ab} = 3v-1$$
$$N\,\underbrace{bb} = 1$$

Zwei Glieder von III.

$$2205\,N = nv(v-2)(4v-3)(15v^2-50v+12)$$
$$3\,N\,\underbrace{aa} = 5v^3-10v^2+9v-3$$
$$-7\,N\,\underbrace{ab} = 5(3v^2-3v+1)$$
$$N\,\underbrace{bb} = 1$$

Als Beispiel einer Aufgabe, welche eine verschiedenartige Auffassung zulässt, wähle ich Deluc's Beobachtungen über die Ausdehnung des Wassers. Deluc füllte zwei gläserne Thermometerröhren, die eine mit Quecksilber, die andere mit Wasser, zeichnete an beide bei der Frostwärme 0°, bei der Siedhitze 80°, und beobachtete die Zwischenstände, beim Quecksilber $= t$, beim Wasser $= l$. Der Ausgang der a ist hier wie in der oben erwähnten Abhandlung im Anfang der Beobachtungsreihe, $t = 5a$, und $L = am_1 + a^2m_2 + a^3m_3$.

Die Anzahl der Beobachtungen $n = 16$.

t	q	l				
5	1	— 0,4				
10	2	+ 0,2				
15	3	1,6	$s_1 =$	5836,7		
20	4	4,1	$s_2 =$	76973,5		
25	5	7,3	$s_3 =$	1055973,5		
30	6	11,2				
35	7	15,9				
40	8	20,5				
45	9	26,1				
50	10	32,0	A	1496	18496	243848
55	11	38,5	B	18496	243848	3347776
60	12	45,8	C	243848	3347776	47260136
65	13	53,5				
70	14	62,0				
75	15	71,0				
80	16	80,				

$\underbrace{aa} = \frac{4707379}{84415280}$ $\underbrace{ab} = -\frac{116}{5405}$ $\underbrace{ac} \frac{44809}{84415280}$

$\underbrace{bb} = \frac{81}{72520}$ $\underbrace{bc} = -\frac{1}{5405}$

$\underbrace{cc} = \frac{409}{84415280}$

$\underbrace{aa}\, s_1 \ldots 394{,}597956050$

$\underbrace{ab}\, s_2 \ldots -949{,}380754913$

$\underbrace{ac}\, s_3 \ldots 554{,}246965995$

$m_1 = -\ 0{,}535832867$

$\underbrace{ab}\, s_1 = 71{,}9890696435$

$\underbrace{bb}\, s_2 \ldots 184{,}6887383901$

$\underbrace{bc}\, s_3 = 112{,}2778841042$

$m_2 = \ 0{,}4217846424$

$\underbrace{ac}\, s_1 \ldots 3{,}063498531378$ $\underbrace{ll} \ldots 24303{,}71$

$\underbrace{bc}\, s_2 = -8{,}184316852738$ $s_1 m_1 \ldots 3127{,}495695$

$\underbrace{cc}\, s_3 \ldots 5{,}116048863481$ $s_2 m_2 = 32466{,}240171$

$m_3 = -0{,}004769457879$ $s_3 m_3 \ldots 5036{,}421129$

$\underbrace{kk} = 1{,}386653$

$$\begin{aligned} \underbrace{ad}\, s &= 0{,}083823829 \\ \underbrace{bc}\, s_2 &= -0{,}343547198 \\ \underbrace{cc}\, s_4 &= 0{,}260254653 \\ m_3 &= 0{,}000530384 \end{aligned}$$

$$\text{II} \begin{cases} 408 & 17544 \\ 17544 & 893928 \end{cases} \qquad s_1 = 2082{,}3 \qquad s_2 = 88974{,}3$$

$$\underbrace{aa} = {}_{1}\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{5}\tfrac{8}{1}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}, \quad \underbrace{ab} = -{}_{1}\tfrac{8}{1}\tfrac{4}{1}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}, \quad \underbrace{bb} = {}_{1}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{aa}\, s_1 &= 32{,}6963600 \\ \underbrace{ab}\, s_2 &= -27{,}4186941 \\ m_1 &= 5{,}2776659 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{ll} &= 24303{,}71 \\ sm &= -9636{,}498 \\ s_1 m &= -10989{,}683 \\ s_2 m_2 &= -3703{,}206 \\ s_3 m_3 &= +360{,}013 \\ s_4 m_4 &= -333{,}847 \\ \underbrace{kk} &= 0{,}487 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{ab}\, s_1 &= -0{,}641690316 \\ \underbrace{bb}\, s_2 &= 0{,}637644048 \\ m_2 &= -0{,}004046267 \end{aligned}$$

$$\frac{b}{m} = 0{,}00450 \qquad \frac{b_1}{m_1} = 0{,}00478$$

$$\frac{b_2}{m_2} = 0{,}030 \qquad \frac{b_3}{m_3} = 0{,}133 \qquad \frac{b_4}{m_4} = 0{,}244$$

Bei dem letzten Mittel m_4 beträgt der mittlere Fehler nahe $\frac{1}{4}$ desselben; dieses Mittel hat also nur eine geringe Sicherheit.

Dieser Ausdruck von fünf Gliedern giebt die Beobachtungen zwar genauer, indess ist für $t = 80°$, die Abweichung von der Beobachtung doch noch $\frac{1}{4}$ Grad.

Es sei w die bisher durch l bezeichnete Beobachtung, so sind zwei Bedingungen zu befriedigen, erstlich, dass $w = 0$ für $t = 0$, zweitens, dass $w = 80$ für $t = 80$ sei.

Es sei also

$$W = \frac{\omega}{10000}\,\frac{s(80-s)}{10000}\,L$$

und

$$L = m + am_1 + a^2m_2 + a^3m_3$$

$$a = \tfrac{1}{5}t - 8$$

a	t	L	W
— 7	144	146,042	— 0,477
— 6	140	139,803	+ 0,215
— 5	$137\frac{7}{25}$	134,824	1,855
— 4	$132\frac{1}{2}$	130,930	4,288
— 3	$128\frac{8}{11}$	127,940	7,408
— 2	$125\frac{1}{2}$	125,683	11,147
— 1	$121\frac{17}{25}$	123,981	15,473
0	$121\frac{1}{2}$	122,659	20,374
1	120	121,541	25,857
2	120	120,449	31,933
3	120	119,208	38,609
4	$118\frac{1}{2}$	117,644	45,885
5	$117\frac{17}{25}$	115,580	53,731
6	$114\frac{1}{7}$	112,839	62,101
7	$106\frac{1}{2}$	109,246	70,903

$s = 1868,376$
$s_1 = -607,842$
$s_2 = 35296,049$
$s_3 = -21961,756$

$$\mathrm{I}\begin{cases} 15 & 280 \\ 280 & 9352 \end{cases}$$

$\underbrace{aa} = \frac{167}{1161}$ $\quad \underbrace{ab} = -\frac{1}{111}$ $\quad \underbrace{bb} = \frac{5}{1178}$

$\underbrace{aa}\,s \quad 282,3699475$
$\underbrace{ab}\,s_2 \quad -159,7106289$
$m = 122,6593186$

$\underbrace{ab}\,s \quad -8,4541900$
$\underbrace{bb}\,s_2 \quad 8,5559265$
$m_2 = 0,1017365$

$$\text{II}\left\{\begin{matrix} 280 & 9352 \\ 9352 & 369640 \end{matrix}\right. \qquad \begin{aligned} \underset{\smile}{aa} &= \tfrac{46205}{2004912} \\ \underset{\smile}{ab} &= -\tfrac{167}{286416} \\ \underset{\smile}{bb} &= \tfrac{5}{286416} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \underset{\smile}{aa}\, s_1 & -\ 14{,}0082655 & \underset{\smile}{ab}\, s_1 & 0{,}354413210 \\ \underset{\smile}{ab}\, s_2 & \ 12{,}8168582 & \underset{\smile}{bb}\, s_2 & -\ 0{,}383738268 \\ m_1 = & -\ 1{,}1914073 & m_2 = & -\ 0{,}029325058 \end{array}$$

Der zuletzt gefundene Ausdruck stimmt am besten mit den Beobachtungen.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No. 3.*)

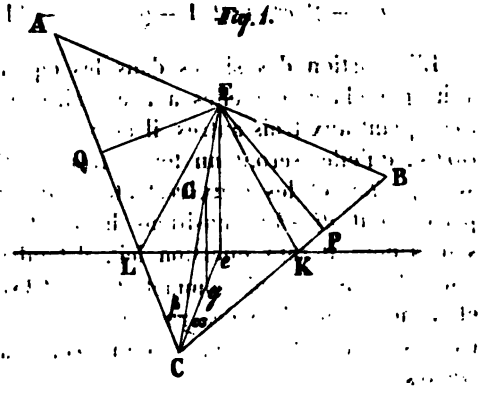
$\frac{3}{15}$ octobre 1831.

NOTE SUR LE MAXIMUM DU NOMBRE DES POSITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN PRISME TRIANGULAIRE HOMOGÈNE, PLONGÉ DANS UN FLUIDE; PAR M. V. BOUNIAKOWSKY.

Les auteurs des ouvrages sur la Mécanique, en traitant la question de l'équilibre d'un prisme droit triangulaire, plongé dans un fluide, disent que *le nombre des positions d'équilibre pour lesquelles les arêtes du prisme sont horizontales, ne pourra jamais être plus grand que dix-huit.* Mais personne, que je sache, n'a songé à soumettre à une discussion détaillée les équations du problème pour décider si ce maximum pouvait avoir lieu. Or, on peut démontrer que cette limite de *dix-huit* ne pourra jamais être atteinte, ou, en d'autres termes, qu'il ne peut exister de prisme droit, homogène, à base triangulaire qui, plongé dans un fluide, ait *dix-huit* positions horizontales d'équilibre.

Commençons par rappeler les formules connues de la question dont il s'agit. Supposons que l'on examine une position d'équilibre du prisme, lorsqu'une de ses arêtes est plongée dans le fluide. Soit *ABC* (fig. 1) la section du prisme perpendiculaire aux

Fig. 1.



arêtes et passant par leur milieu, LK la ligne de flottaison, G le centre de gravité du triangle ABC et g celui du triangle immergé LKC. Faisons

$$CB = a,\ AC = b,\ AB = 2AE = 2EB = c,\ CE = h,$$

$$CK = x,\ CL = y,\ \angle ECB = \alpha,\ \angle ECA = \beta;$$

de plus, ayant abaissé du point E les deux perpendiculaires EP et EQ sur les côtés a et b du triangle ABC, soit

$$CP = h\ \text{Cos.}\ \alpha = l,\ CQ = h\ \text{Cos.}\ \beta = m.$$

Cela posé, on sait qu'en désignant par ϱ la densité constante du prisme, celle du liquide étant prise pour unité, les valeurs de x et y qui déterminent ses positions horizontales d'équilibre dans le cas d'un seul sommet immergé, seront données par les équations suivantes :

$$xy = \varrho ab \qquad (1)$$

$$x^4 - 2lx^3 + 2\varrho abmx - \varrho^2 a^2 b^2 = 0. \qquad (2)$$

Dans le cas où les deux sommets opposés seraient immergés, on n'aurait, comme on le sait, qu'à changer ϱ en $1-\varrho$ dans ces deux équations, et l'on obtiendrait par conséquent

$$xy = (1-\varrho)ab \qquad (3)$$

$$x^4 - 2lx^3 + 2(1-\varrho)abmx - (1-\varrho)^2 a^2 b^2. \qquad (4)$$

L'inspection des signes dans les équations (2) et (4) fait voir que chacune d'elles a nécessairement une racine *négative*; quant aux trois autres, il est visible, par la règle de *Descartes*, qu'elles seront ou toutes trois *positives*, ou bien l'une sera *positive* et les deux restantes *imaginaires*. Pour que le prisme eût *dix-huit* positions horizontales d'équilibre, les seules dont il sera question ici, il faudrait évidemment que pour chacun des trois sommets C, B, A les deux équations (2) et (4) n'eussent que des racines réelles, dont les trois positives satisfassent chacune, outre cela, aux conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} x<a & y=\dfrac{\rho ab}{x}<b \text{ pour le sommet } C \\ x<c & y=\dfrac{\rho ca}{x}<a \text{ pour le sommet } B \\ x<b & y=\dfrac{\rho cb}{x}<c \text{ pour le sommet } A. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Or, un examen soigneux des équations (1), (2), (3), (4) et des inégalités (5) nous conduira à la conséquence qu'il n'existe pas de triangle ABC satisfaisant à toutes les conditions exigées. Pour le démontrer, procédons comme si nous cherchions à déterminer le triangle qui donne toutes les dix-huit positions d'équilibre. Et d'abord, il faut pour cela que l'équation (2) ait toutes ses quatre racines réelles. Décomposons là en deux facteurs comme il suit :

$$\left[x^2-(l-\mu)x+\frac{\mu^3-l\mu^2-l^2\mu-2\rho abm+l^3}{2\mu}\right]\times$$

$$\left[x^2-(l+\mu)x+\frac{\mu^3+l\mu^2-l^2\mu+2\rho abm-l^3}{2\mu}\right]=0, \quad (6)$$

μ étant déterminé par l'équation

$$\mu^6-3l^2\mu^4+(3l^4-4\rho abl m+4\rho^2a^2b^2)\mu^2-(2\rho abm-l^3)^2=0. \quad (7)$$

Pour que l'équation (6), et par conséquent l'équation (2), ait ses quatre racines réelles, il faut que chacun des deux facteurs (6) soit réel, ce qui exige que toutes les six valeurs de μ soient réelles. Ainsi l'équation (7) ne devra pas avoir de racines imaginaires. En faisant donc $\mu^2=\nu$, l'équation

$$\nu^3-3l^2\nu^2+(3l^4-4\rho abl m+4\rho^2a^2b^2)\nu-(2\rho abm-l^3)^2=0 \quad (8)$$

ne devra avoir que des racines réelles, toutes trois positives, ce qui exige, comme on sait, que l'on ait

$$16(lm-\rho ab)^3>27\rho ab(l^2-m^2)^2 \quad (9)$$

$$3l^4-4\rho abl m+4\rho^2a^2b^2>0. \quad (10)$$

De plus, en vertu des conditions (5), chacune des trois racines positives de l'équation (8) devra être inférieure à a, et

devra donner pour y une valeur inférieure à b. Si donc l'on fait

$$x = \xi + a,$$

il faudra nécessairement que l'équation (2) transformée

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} \xi^4 + 4a & \xi^2 + 6a^2 & \xi^2 + 4a^3 & \xi + a^4 \\ \quad - 2l & \quad - 6al & \quad - 6a^2l & \quad - 2a^3l \\ & & + 2\varrho abm & + 2\varrho a^2bm \\ & & & - \varrho^2a^2b^2 \end{array}\right\} = 0$$

ait toutes ses quatre racines négatives, ce qui conduit aux conditions

$$\left.\begin{array}{c} 2a-l>0, \quad a-l>0, \quad 2a^2-3al+\varrho bm>0, \\ a^2-2al+2\varrho bm-\varrho^2b^2>0, \end{array}\right\} \quad (11)$$

dont la première est inutile, parce qu'elle est renfermée dans la seconde.

Les conditions (9), (10) et (11) se rapportent au cas d'un seul sommet immergé; dans l'hypotèse des deux sommets opposés plongés dans le fluide, on devra remplacer partout ϱ par $1-\varrho$. De plus, en vertu de l'équation du 4me degré qui détermine y, et de la condition $y<b$, on trouvera des formules analogues aux formules (11) en changeant a en b, et en même temps l en m, et *vice-versa*.

Les conditions auxquelles nous sommes parvenus, et celles qui s'en déduisent par de simples changements de lettres, ne sont pas toutes nécessaires pour notre démonstration. C'est pourquoi, pour plus de commodité, nous allons reproduire seulement les conditions dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre, en supprimant celles qui sont inutiles. Et d'abord, observons que la différence $lm - \varrho ab$ est positive en vertu de l'inégalité (9); la condition (10) nous est inutile; la première inégalité des formules (11), comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, est contenue dans la seconde, et la troisième est superflue pour notre but. Si, de plus, on change dans les formules (11) a en b, ainsi que l en m, et *vice-versa*, et qu'on substitue $1-\varrho$ à la place de ϱ, on obtiendra les con-

ditions suivantes pour le cas d'un seul et de deux sommets plongés dans le fluide :

$$lm > \rho ab, \quad lm > (1-\rho)ab \tag{12}$$

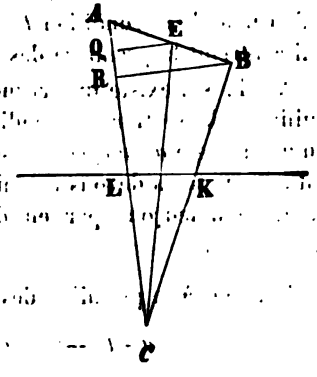
$$a > l, \quad b > m \tag{13}$$

$$a^2 - 2al + 2\rho bm - \rho^2 b^2 > 0, \quad b^2 - 2bm + 2\rho al - \rho^2 a^2 > 0 \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 - 2al + 2(1-\rho)bm - (1-\rho)^2 b^2 &> 0, \\ b^2 - 2bm + 2(1-\rho)al - (1-\rho)^2 a^2 &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Il est évident d'ailleurs que ces mêmes conditions doivent subsister pour chacun des deux couples a, c et b, c, aussi bien que pour a, b.

Fig. 2.



Cela posé, faisons voir d'abord que la section du prisme, perpendiculaire à ses arêtes, c'est-à-dire le triangle ABC, ne peut être ni *rectangle* ni *obtus-angle*. En effet, en supposant le triangle ABC (fig. 2) rectangle en B, et conservant toutes les désignations précédentes, on voit que l'on aura $l = a$ pour le sommet C immergé ; la même chose aura lieu pour les deux sommets A et B plongés simultanément dans le fluide. Donc, la première des conditions (13) ne sera pas satisfaite. On arrivera exactement à la même conclusion soit pour le sommet A plongé dans le fluide, soit pour les deux sommets opposés C et B immergés à la fois. Mais on ne pourra rien conclure relativement au cas de B immergé, ou à celui de A et C plongés simultanément dans le fluide. Or, observons bien que l'égalité $l = a$, annullant le coefficient $6a^2 - 6al$ de ξ^2 dans l'équation qui détermine cette inconnue, contredit notre hypothèse, en vertu de laquelle cette équation ne doit avoir que des racines réelles, toutes quatre négatives. Donc, il devra né-

nécessairement manquer au moins une position horizontale d'équilibre dans chacun des quatre cas suivants :

1° C immergé ; 2° A et B immergés à la fois ;

3° A immergé ; 4° C et B immergés à la fois.

Ainsi, il est prouvé qu'un prisme ayant pour base un triangle rectangle, ne saurait avoir plus de $18 - 4 = 14$ positions horizontales d'équilibre. Nous n'affirmons pas au reste qu'il puisse même atteindre ce nombre 14.

Des raisonnements tout-à-fait semblables à ceux dont nous venons de faire usage, nous conduiront, pour le cas du triangle *obtusangle*, exactement aux mêmes conclusions que pour le triangle *rectangle;* cela se voit de suite en observant qu'au lieu de la condition $l = a$, nous trouverions $l > a$, ce qui contredit la première des inégalités (13).

Ainsi, s'il existe un prisme qui admette 18 positions d'équilibre, la section perpendiculaire aux arêtes ne peut être qu'un triangle *acutangle*. C'est donc pour un triangle de cette nature que nous devons examiner les conditions établies plus haut. Commençons par en déduire quelques conséquences très simples.

Donnons à la première des inégalités (14) la forme

$$(a-l)^2-(m-\rho\delta)^2+m^2-l^2>0,$$

et voyons à quoi elle se réduit en vertu de la liaison qui existe entre les lignes a, b, l et m. En observant que l'on a (fig. 1)

$$CE^2=CP^2+EP^2=CQ^2+EQ^2,$$

et que

$$CP^2=l^2, \quad EP^2=\frac{c^2}{4}-(a-l)^2$$

$$CQ^2=m^2, \quad EQ^2=\frac{c^2}{4}-(b-m)^2,$$

on aura

$$(a-l)^2+(b-m)^2+m^2-l^2=0.$$

Retranchant cette équation de l'inégalité précédente, il viendra simplement

$$(b-m)^2 > (m-\varrho b)^2.$$

Pour extraire la racine carrée des deux membres de cette inégalité, nous observerons que la différence $b - m$ est positive en vertu de la seconde des formules (13); nous aurons donc

$$b-m > m-\varrho b.$$

En faisant usage de la seconde des inégalités (14), on obtiendra de la même manière

$$a-l > l-\varrho a;$$

de ces deux inégalités on conclura

$$\varrho > \frac{2l-a}{a}, \quad \varrho > \frac{2m-b}{b}. \tag{16}$$

Ces conditions se rapportent au cas d'un seul sommet immergé. Pour le cas de deux sommets plongés dans le fluide, il n'y aura qu'à remplacer ϱ par $1-\varrho$, ce qui réduira les conditions (16) aux deux suivantes :

$$\varrho < \frac{2a-2l}{a}, \quad \varrho < \frac{2b-2m}{b}. \tag{17}$$

La combinaison des inégalités (16) et (17) donne

$$\frac{2a-2l}{a} > \frac{2l-a}{a}, \quad \frac{2b-2m}{b} > \frac{2m-b}{b},$$

d'où l'on déduit ces conditions bien simples

$$l < \frac{3}{4}a, \quad m < \frac{3}{4}b, \tag{18}$$

qui excluent l'égalité.

Observons que ces dernières inégalités (18) ont été déduites en faisant usage simultanément des conditions relatives au cas d'un seul sommet et à celui de deux sommets opposés plongés dans le fluide. Ainsi, s'il arrive que l'une d'entr'el-

les ne soit pas satisfaite, on ne pourra conclure qu'une chose, c'est que pour le sommet qui s'y rapporte, il manque une position d'équilibre, sans toutefois pouvoir décider, si cette position d'équilibre disparaît pour un seul sommet immergé, ou pour les deux sommets opposés plongés dans le fluide, ou encore, qu'il manque deux positions d'équilibre, l'une pour le premier cas, et l'autre pour le second. Il faudra encore bien remarquer que si, pour un même sommet, les deux conditions (18) ne sont satisfaites ni l'une ni l'autre, cela prouvera infailliblement qu'il manque *deux* positions d'équilibre. Cette assertion est fondée sur ce que l'inégalité $m<\frac{3}{4}b$ est déduite en partant de l'hypothèse $x<a$, et $l<\frac{3}{4}a$, de celle de $y<b$; d'ailleurs, comme une valeur de x plus grande que a ne peut pas donner pour y une valeur plus grande que b en vertu de la formule $y=\frac{\rho ab}{x}<\rho b<b$, il faut en conclure évidemment que chaque condition (18), non-satisfaite, emporte séparément une position d'équilibre.

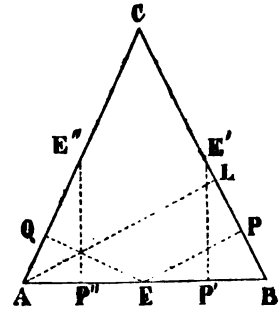
Eu égard à cette dernière remarque, nous sommes en droit d'affirmer que, pour le triangle rectangle ABC (fig. 2), il manquera encore une position d'équilibre outre celles qui ont été mentionnées plus haut; en effet, en supposant le côté $CB>AB$, et abaissant du point E la perpendiculaire EQ, la ligne CQ sera plus grande que les $\frac{3}{4}$ de AC; cela se voit de suite en observant que, par la grandeur relative des angles A et C, la projection CR de CB sera plus grande que la projection AR, double de AQ, de BA. De cette manière, le nombre des positions d'équilibre du prisme se trouve réduit à 13. Si le triangle rectangle avait ses deux côtés AB et BC égaux, il y aurait encore une position d'équilibre d'enlevée, et leur nombre ne dépasserait pas 12.

Des conclusions tout-à-fait analogues auront lieu pour le cas du triangle obtusangle.

Les conditions (18), déduites indépendamment des conditions de la réalité des racines des équations (2) et (4), vont

nous conduire à la conclusion définitive qu'un prisme triangulaire ne peut jamais avoir 18 positions d'équilibre. Pour être en droit de tirer cette conséquence, il suffira de prouver qu'il n'existe aucun triangle *acutangle* (les triangles *rectangles* et *obtusangles* étant déjà exclus par ce qui précède) satisfaisant, pour chacun de ses sommets, aux dites conditions (18). Avant de démontrer cette proposition de Géométrie élémentaire, remarquons que, dans un triangle *équilatéral*, les lignes que nous avons désignées par l et m seront toutes égales entr'elles par rapport à tous les sommets, et que leur valeur commune sera les $\frac{3}{4}$ du côté du triangle. De plus, nous rappellerons que si la section du prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes est un triangle équilatéral, le nombre de ses positions d'équilibre, pour ρ compris entre les limites $\frac{7}{16}$ et $\frac{9}{16}$, sera seulement de *douze*. Il sera donc inutile de considérer le triangle équilatéral ; il suffira, pour notre but, de démontrer qu'il y aura au moins une des conditions (18) qui ne sera pas satisfaite pour tout triangle acutangle, différent d'un triangle équilatéral. Pour cela nous allons considérer séparément les trois cas suivants : 1° un triangle *scalène* dont les deux angles égaux sont les plus grands ; 2° un triangle *scalène* dont les deux angles égaux sont les plus petits ; 3° un triangle *acutangle* dont les trois angles sont inégaux.

Fig. 3.



1er CAS. Soit ABC (fig. 3) un triangle *scalène* dont les angles égaux A et B sont les plus grands. Les deux lignes $CP = l$ et $CQ = m$, égales entr'elles seront plus grandes que les $\frac{3}{4}$ des côtés égaux $BC = a$, $AC = b$ du triangle ABC.

En effet, abaissant du point A la perpendiculaire AL sur CB, on aura

$$CL = AC.\ \text{Cos.}\ C, \qquad BL = AB.\ \text{Cos.}\ B,$$

et par suite, à cause de

$$AC > AB, \quad \text{Cos.}\ C > \text{Cos.}\ B,$$

on trouvera

$$CL > BL;$$

de là on déduira immédiatement

$$BL < \tfrac{1}{2}a, \quad \text{et par suite } PB < \tfrac{1}{4}a;$$

donc

$$CP = l > \tfrac{3}{4}a, \quad \text{et de même } CQ = m > \tfrac{3}{4}b.$$

Ainsi, il manquera au moins *deux* positions d'équilibre relatives aux deux cas où C serait immergé, ou les deux sommets opposés A, B seraient plongés en même temps dans le fluide.

Si le sommet A, ou les deux opposés B et C étaient plongés dans le fluide, on aurait

$$AP' = l' = \frac{3}{4}c,$$

et, par conséquent, *une* nouvelle position d'équilibre serait emportée. La même chose aurait lieu pour le cas du sommet B, ou des deux sommets opposés A et C immergés, car on trouverait

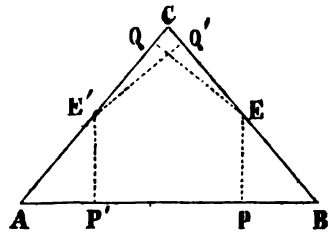
$$BP'' = m'' = \frac{3}{4}c;$$

il y aurait donc encore *une* position d'équilibre d'enlevée. De cette manière, au lieu de 18 positions d'équilibre, il ne resterait tout-au-plus que 14.

2^d CAS. En représentant par ABC (fig. 4) un triangle *scalène*, dont les angles égaux A et B sont les plus petits, on verra, comme plus haut, qu'en faisant $AP = l$, $AQ = m$, on aura

$$l = \frac{3}{4}c, \qquad m > \frac{3}{4}b,$$

Fig. 4.



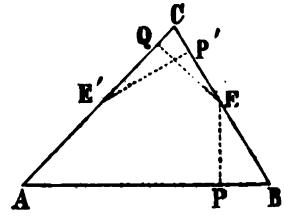
ce qui prouve qu'il y a *deux* positions d'équilibre d'enlevées pour le sommet A, ou C et B immergés à la fois. La même chose aura lieu pour B, ou C et A plongés dans le fluide, car on aura

$$BP' = l' = \frac{3}{4}c, \quad BQ' = m' > \frac{3}{4}a,$$

Il manquera donc, comme dans le cas précédent, 4 positions d'équilibre.

3^me CAS. Soit enfin ABC (fig. 5) un triangle *acutangle*, à angles inégaux, dans lequel on a $C > B > A$, et par conséquent aussi $c > b > a$. Si, du milieu E du plus petit côté $CB = a$, on abaisse les deux perpendiculaires EP et EQ respectivement sur les côtés $AB = c$ et $AC = b$, on démontrera, comme plus haut, les deux inégalités suivantes :

Fig. 5.



$$AP = > \frac{3}{4}c \quad \text{et} \quad AQ = m > \frac{3}{4}b,$$

ce qui prouve qu'il manque *deux* positions d'équilibre. Soit encore E' le milieu du côté b du triangle ; en abaissant $E'P'$ perpendiculairement sur $CB = a$, on aura, à cause de $c > b$,

$$BP' = l' > \frac{3}{4}a;$$

il manquera donc encore *une* position d'équilibre. Par conséquent, dans le cas que nous venons de considérer, le nombre des positions d'équilibre ne pourra pas aller au-delà de 15, si toutefois même ce nombre peut être atteint.

Cela posé, observons que l'inégalité (9) et celle qui s'en déduit en changeant ϱ en $1-\varrho$, expriment, comme nous l'avons vu plus haut, la réalité des racines des équations (2) et (4). Dans ce qui précède, nous n'avons pas fait usage de ces conditions; or, nous allons faire voir aprésent que ces conditions, ou plutôt les inégalités (12), moins générales que les sus-mentionnées, peuvent servir à déterminer les limites de la densité ϱ du prisme, qui correspond au *maximum* du nombre de ses positions d'équilibre. En effet, en multipliant chacune des deux inégalités

$$\varrho ab < lm, \quad (1-\varrho)ab < lm$$

par les deux inégalités (18), nommément par

$$l < \frac{3}{4}a \quad \text{et} \quad m < \frac{3}{4}b,$$

on obtient

$$\varrho < \frac{9}{16} \text{ et } \varrho > \frac{7}{16}.$$

On remarquera que ces limites de ϱ sont les mêmes que celles qui se rapportent au prisme ayant pour base un triangle *équilatéral*.

En résumant les conséquences auxquelles nous sommes parvenus, on conclura rigoureusement qu'un prisme triangulaire, homogène, ne pourra jamais avoir plus de 15 positions horizontales d'équilibre, au lieu des 18 dont on fait ordinairement mention dans les traités de Mécanique. Nous n'affirmons pas que ce nombre de 15 puisse même être atteint, d'autant plus que, dans notre analyse, nous n'avons pas employé toutes les conditions du problème. Au contraire, tout porte à croire, que le *maximum* cherché n'est que de 12, et qu'il correspond au cas d'un prisme ayant pour base un triangle *équilatéral*, et une densité comprise soit entre les limites $\frac{7}{16}$ et $\frac{1}{2}$, soit entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{9}{16}$.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 4.)

$\frac{17}{29}$ Octobre 1851.

Démonstration de quelques formules elliptiques de C. G. J. Jacobi; par M. J. Somoff.

L'un des plus beaux mémoires de l'illustre C. G. J. Jacobi, enlevé à la science par une mort précoce, a pour objet l'application des fonctions elliptiques à la théorie de la rotation d'un corps solide. Ce mémoire est inséré dans le 39me tome du Journal de Crelle, et contient la démonstration des formules publiées d'abord dans l'extrait de la lettre adressée par Jacobi à l'Académie des sciences de Paris (Comptes rendus hebdomadaires, 30 juillet 1849, No. 5 et le Journal de M. Liouville T. XIV, 1849). Mais on n'y trouve pas la démonstration des formules numérotées dans la lettre par: (1), (2) .... (8), auxquelles l'auteur attribue une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Je montrerai ici comment on parvient à ces formules remarquables en partant des principes donnés dans les *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.*

Les expressions des fonctions $\Theta(u)$, $H(u)$ en produits infinis (*Fundamenta nova* § 61) donnent

$$Z = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi} + \frac{2Ky}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Ky}{\pi}\right)}$$

$$= \frac{[1 - 2q\cos 2(x+y) + q^2]\,[1 - 2q^3\cos 2(x+y) + q^6]\ldots}{2q^{\frac{1}{4}}\sin y\,[1 - 2q^2\cos 2y + q^4]\,[1 - 2q^4\cos 2y + q^8]\ldots}$$

Faisant $e^{2ix} = \nu$, $e^{2iy} = z$, $i = \sqrt{-1}$, on trouve

$$1 - 2q^n \cos 2y + q^{2n} = (1 - q^n e^{2iy})(1 - q^n e^{-2iy})$$
$$= (1 - q^n z)(1 - q^n z^{-1})$$

$$1 - 2q^n \cos 2(x+y) + q^{2n} = (1 - q^n \nu z)(1 - q^n \nu^{-1} z^{-1})$$

$$\sin y = \frac{z-1}{2iz^{\frac{1}{2}}},$$

donc

$$Z = \frac{iz^{\frac{1}{2}}[(1-q\nu z)(1-q^2\nu z)\ldots.][(1-q\nu^{-1}z^{-1})(1-q^2\nu^{-1}z^{-1})\ldots.]}{q^{\frac{1}{4}}(z-1)[(1-q^2z)(1-q^4z)\ldots.][(1-q^2z^{-1})(1-q^4z^{-1})\ldots.]}$$

Cette fonction de z peut être décomposée en fractions simples sous la forme

$$Z = \frac{iz^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{A_0}{z-1} + \sum_1^\infty \frac{A_m}{1-q^{2m}z} + \sum_1^\infty \frac{B_m}{z-q^{2m}}\right).$$

Pour déterminer les coefficients: A_o, A_m, B_m on aura

$$A_0 = \left[\frac{q^{\frac{1}{4}} Z(z-1)}{iz^{\frac{1}{2}}}\right]_{z=1} = \frac{[(1-qv)(1-q^3v)\ldots.][(1-qv^{-1})(1-q^3v^{-1})\ldots.]}{[(1-q^2)(1-q^4)\ldots.][(1-q^2)(1-q^4)\ldots.]} \tag{a}$$

$$A_m = \left[\frac{q^{\frac{1}{4}} Z(1-q^{2m}z)}{iz^{\frac{1}{2}}}\right]_{z=q^{-2m}} = \frac{(1-q^{1-2m}v)(1-q^{3-2m}v)\ldots(1-q^{-1}v)(1-qv)\ldots(1-q^{1+2m}v^{-1})\ldots}{(q^{-2m}-1)(1-q^{2-2m})\ldots(1-q^{-2})(1-q^2)\ldots(1-q^{2+2m})\ldots}$$

$$= -q^m v^m A_0$$

$$B_m = \left[\frac{q^{\frac{1}{4}} Z(z-q^{2m})}{iz^{\frac{1}{2}}}\right]_{z=q^{2m}} = \frac{q^{2m}(1-q^{1+2m}v)(1-q^{3+2m}v)\ .(1-q^{1-2m}v^{-1})(1-q^{3-2m}v^{-1})\ldots(1-q^{-1}v^{-1})\ldots}{(q^{2m}-1)(1-q^{2+2m})\ldots(1-q^{2-2m})(1-q^{4-2m})\ldots(1-q^{-2})(1-q^2)\ldots}$$

$$= q^m v^{-m} A_0,$$

ainsi

$$Z=\frac{iz^{\frac{1}{2}}A_0}{q^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{z-1}-\sum_1^{\infty}\frac{q^{m_\nu m}}{1-q^{2m_z}}+\sum_1^{\infty}\frac{q^{m_\nu-m_z-1}}{1-q^{2m_z-1}}\right)$$

Posant

$$\frac{2Kx}{\pi}=u,\quad \frac{2Ky}{\pi}=ai=ibK',$$

on aura

$$z=e^{-\frac{\pi bK'}{K}}=q^b,\ \nu^m=e^{2mix}=e^{\frac{i\pi u}{K}},\quad Z=\frac{\Theta(u+a)}{H(a)}$$

par conséquent

$$\frac{\Theta(u+a)}{H(a)}=\frac{iA_0}{q^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{q^{\frac{b}{2}}}{q^b-1}-\sum_1^{\infty}\frac{q^{m+\frac{b}{2}}e^{2mix}}{1-q^{2m+b}}+\sum_1^{\infty}\frac{q^{m-\frac{b}{2}}e^{-2mix}}{1-q^{2m-b}}\right)\quad(b)$$

Déterminons maintenant la valeur de A_0. Or d'après l'expression de $\Theta(u)$, on a

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)}=\frac{[(1-q\nu)(1-q^3\nu)\ldots.][(1-q\nu^{-1})(1-q^3\nu^{-1})\ldots.]}{[(1-q)(1-q^3)\ldots.]^2},$$

ce qui réduit la formule (a) à

$$A_0=\frac{\Theta(u)[(1-q)(1-q^3)\ldots.]^2}{\Theta(o)[1-q^2)(1-q^4)\ldots.]^2}.$$

Mais par une formule de la page (89) des *Fundamenta nova*,

$$\frac{[(1-q)(1-q^3]\ldots.]^2}{[(1-q^2)(1-q^4)\ldots.]^2}=\frac{\pi q^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}K};$$

donc

$$A_0=\frac{\Theta(u).\pi q^{\frac{1}{4}}}{\Theta(o)k^{\frac{1}{2}}K}$$

et comme

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=\Theta(K)=\Theta_1(o),\ \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}=H(K)=H_1(o)$$

on a

$$\frac{\pi}{k^{\frac{1}{2}}K}=\frac{2}{\Theta_1(o)H_1(o)}$$

et par suite

$$A_0 = \frac{2\Theta(u) \cdot q^{\frac{1}{4}}}{\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,H_1(o)}.$$

Après avoir substitué cette valeur de A_0 dans la formule (b), celle-ci se transformera en

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{i\Theta(u+ai)}{2H(ai)\,\Theta(u)}$$

$$= \frac{q^{\frac{b}{2}}}{1-q^b} + \sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{b}{2}} e^{2mix}}{1-q^{2m+b}} - \sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{b}{2}} e^{-2mix}}{1-q^{2m-b}} \quad (e)$$

Mettant $-u$ au lieu de u et remarquant que $\Theta(-u+ai) = \Theta(u-ai)$, $\Theta(-u) = \Theta(u)$, on verra que cette formule se réduit à

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{i\Theta(u-ai)}{2H(ai)\,\Theta(u)}$$

$$= \frac{q^{\frac{b}{2}}}{1-q^b} + \sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{b}{2}} e^{-2mix}}{1-q^{2m+b}} - \sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{b}{2}} e^{+2mix}}{1-q^{2m-b}} \quad (d)$$

Prenant la somme et la différence des valeurs (c) et (d) on obtiendra

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{i[\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)]}{2H(ai)\,\Theta(u)}$$

$$= \frac{2q^{\frac{b}{2}}}{1-q^b} - 2(q^{-\frac{b}{2}} - q^{\frac{b}{2}}) \sum_1^\infty \frac{q^m(1+q^{2m})\cos(2mx)}{(1-q^{2m+b})(1-q^{2m-b})} \quad (e)$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{[\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)]}{2H(ai)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{b}{2}} + q^{\frac{b}{2}}) \sum_1^\infty \frac{q^m(1-q^{2m})\sin(2mx)}{(1-q^{2m+b})(1-q^{2m-b})} \quad (f)$$

Telles sont précisément les formules (1) et (2) de la lettre de Jacobi. Les formules (3) et (4) peuvent aussi être déduites des formules (c) et (d). En effet, les formules rapportées au commencement de la page 101 du No. cité des Comptes rendus et qui ne diffèrent pas pour le fond des formules du § 62 des *Fundamenta nova*, donnent

$$\frac{H(u+ai)}{\Theta(ai)} = -e^{-ix}\frac{\Theta[u-i(K'-a)]}{H[i(K'-a)]}$$

En vertu de cette formule et de (d) dans laquelle on changera a en $K'-a$, et par suite b en $1-b$, on trouvera

$$H_1(o)\Theta(o)\Theta_1(o)\frac{H(u+ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)} = -\frac{1}{i}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}e^{-ix}}{1-q^{1-b}} + \sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}e^{-(2m+1)ix}}{1-q^{2m+1-b}} - \sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}e^{(2m-1)ix}}{1-q^{2m-1+b}}\right) \quad (g)$$

Substituant $-u$ à u et remarquant que $H(-u+ai) = -H(u-ai)$, cette formule se réduit à

$$H_1(o)\Theta(o)\Theta_1(o)\frac{H(u-ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)} = \frac{1}{i}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}e^{ix}}{1-q^{1-b}} + \sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}e^{(2m+1)ix}}{1-q^{2m+1-b}} - \sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}e^{-(2m-1)ix}}{1-q^{2m-1+b}}\right) \quad (h)$$

En faisant la somme et la différence des formules (g) et (h) on obtiendra:

$$H_1(o)\Theta(o)\Theta_1(o)\frac{H(u+ai)+H(u-ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)} = \frac{2q^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}\sin x}{1-q^{1-b}} + 2\sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}\sin(2m+1)x}{1-q^{2m+1-b}} + 2\sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}\sin(2m-1)x}{1-q^{2m-1+b}}$$

$$H_1(o)\Theta(o)\Theta_1(o)\frac{H(u+ai)-H(u-ai)}{2i\Theta(ai)\Theta(u)} = \frac{2q^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}\cos x}{1-q^{1-b}} + 2\sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}\cos(2m+1)x}{1-q^{2m+1-b}} - 2\sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}\cos(2m-1)x}{1-q^{2m-1+b}}$$

et réunissant les termes semblables par rapport aux *sin* et *cos*, on aura

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{H(u+at)+H(u-at)}{2\Theta(at)\,\Theta(u)}$$

$$=2\,(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})\sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}\,(1-q^{2m+1})\sin(2m+1)x}{(1-q^{2m+1}+b)\,(1-q^{2m+1}-b)} \quad (\mathfrak{j})$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{H(u+at)-H(u-at)}{2i\Theta(at)\,\Theta(u)}$$

$$=2\,(q^{-\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}})\sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}\,(1+q^{2m+1})\cos(2m+1)x}{(1-q^{2m+1}+b)\,(1-q^{2m+1}-b)} \quad (\mathfrak{k})$$

Ce sont les formules (3) et (4) de la lettre *).

Pour parvenir aux formules (7) et (8), décomposons en fractions simples l'expression

$$\frac{\Theta_1(u+at)}{H_1(at)}$$

$$=\frac{z^{\frac{1}{2}}\,(1+qvz)\,(1+q^2vz)\,..\,(1+qv^{-1}z^{-1})\,(1+q^2v^{-1}z^{-1})\,..}{q^{\frac{1}{4}}\,(1+z)\,(1+q^2z)\,(1+q^4z)\,..\,(1+q^2z^{-1})\,(1+q^4z^{-1})\,...}$$

Posant

$$\frac{\Theta_1(u+at)}{H_1(at)}=\frac{z^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{A_0}{1+z}+\sum_1^\infty\frac{A_m}{1+q^{2m}z}+\sum_1^\infty\frac{B_m}{z+q^{2m}}\right)$$

on trouvera

$$A_0=\frac{[(1-qv)\,(1-q^2v)....]\,[(1-qv^{-1})\,(1-q^2v^{-1})....]}{[(1-q^2)\,(1-q^4)....]\,[(1-q^2)\,(1-q^4)....]}$$

$$=\frac{2\Theta(u)\,q^{\frac{1}{4}}}{H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)}$$

---

*) Il s'est introduit quelques fautes d'impression dans l'extrait de la lettre de Jacobi. Dans les formules (3) et (4) au lieu de $\sqrt{q(1-q)}$.. $\sqrt{q^3(1-q^3)}$ ... on doit lire $q^{\frac{1}{2}}\,(1-q)$, $q^{\frac{3}{2}}\,(1-q^3)$,... et dans les formules (4) et (5) au lieu de $\sqrt{q(1+q)}$, $\sqrt{q^3(1+q^3)}$ on doit lire $q^{\frac{1}{2}}\,(1+q)$, $q^{\frac{3}{2}}\,(1+q^3)$....

et x en $\frac{\pi}{2} - x$; ce qui convertira les formules: (e), (f), (i), (k), (m), (n), (p), (q) en celle-ci:

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{i[\Theta_1(u+\omega i)+\Theta_1(u-\omega i)]}{2H(\omega i)\,\Theta_1(u)}$$

$$=\frac{2q^{\frac{b}{2}}}{1-q^b}-2\left(q^{-\frac{b}{2}}-q^{\frac{b}{2}}\right)\sum_1^\infty\frac{(-1)^m q^m(1+q^{2m})\cos(2mx)}{(1-q^{2m+b})(1-q^{2m-b})}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{\Theta_1(u+\omega i)-\Theta_1(u-\omega i)}{2H(\omega i)\,\Theta_1(u)}$$

$$=2\left(q^{-\frac{b}{2}}+q^{\frac{b}{2}}\right)\sum_1^\infty\frac{(-1)^m q^m(1-q^{2m})\sin(2mx)}{(1-q^{2m+b})(1-q^{2m-b})}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{H_1(u+\omega i)+H_1(u-\omega i)}{2\Theta(\omega i)\,\Theta_1(u)}$$

$$=2\left(q^{-\frac{b}{2}}+q^{\frac{b}{2}}\right)\sum_0^\infty\frac{(-1)^m q^{\frac{2m+1}{2}}(1-q^{2m+1})\cos(2m+1)x}{(1-q^{2m+1+b})(1-q^{2m+1-b})}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{H_1(u-\omega i)-H_1(u+\omega i)}{2i\Theta(\omega i)\Theta_1(u)}$$

$$=2\left(q^{-\frac{b}{2}}-q^{\frac{b}{2}}\right)\sum_0^\infty\frac{(-1)^m q^{\frac{2m+1}{2}}(1+q^{2m+1})\sin(2m+1)x}{(1-q^{2m+1+b})(1-q^{2m+1-b})}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{\Theta(u+\omega i)+\Theta(u-\omega i)}{2H_1(\omega i)\Theta_1(u)}$$

$$=\frac{2q^{\frac{b}{2}}}{1+q^b}+2\left(q^{-\frac{b}{2}}+q^{\frac{b}{2}}\right)\sum_1^\infty\frac{(-1)^m q^m(1+q^{2m})\cos(2mx)}{(1+q^{2m+b})(1+q^{2m-b})}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{\Theta(u-\omega i)-\Theta(u+\omega i)}{2iH_1(\omega i)\Theta_1(u)}$$

$$=2\left(q^{-\frac{b}{2}}-q^{\frac{b}{2}}\right)\sum_1^\infty\frac{(-1)^m q^m(1-q^{2m})\sin(2mx)}{(1+q^{2m+b})(1+q^{2m-b})}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{H(u+as)+H(u-as)}{2\Theta_1(as)\Theta_1(u)}$$

$$=2(q^{-\frac{b}{2}}+q^{\frac{b}{2}})\sum_0^\infty \frac{(-1)^m q^{\frac{2m+1}{2}}(1+q^{2m+1})\sin(2m+1)x}{(1+q^{2m+1}+b)(1+q^{2m+1}-b)}$$

$$H_1(o)\,\Theta(o)\,\Theta_1(o)\,\frac{H(u+as)-H(u-as)}{2i\Theta_1(as)\Theta_1(u)}$$

$$=2(q^{-\frac{b}{2}}-q^{\frac{b}{2}})\sum_0^\infty \frac{(-1)^m q^{\frac{2m+1}{2}}(1-q^{2m+1})\cos(2m+1)x}{(1+q^{2m+1}+b)(1+q^{2m+1}-b)}.$$

Ces formules peuvent servir pour calculer les rapports des cosinus:

$$\frac{\alpha}{\gamma''},\ \frac{\alpha'}{\gamma''},\ \frac{\beta}{\gamma''},\ \frac{\beta'}{\gamma''},\ \frac{\gamma}{\gamma''},\ \frac{\gamma'}{\gamma''}.$$

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. X. No.* 5.)

31 Octobre
12 Novembre 1851.

NOTE SUR LE MOUVEMENT DU PENDULE SIMPLE; PAR M. LE PROF. BRASCHMANN DE MOSCOU.

Le mouvement du pendule simple, eu égard à la rotation de la terre, a été discuté par M. Binet dans les Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris (No. 7, le 17 février 1851). M. Binet prend pour base de ses discussions les équations que Poisson a données dans son mémoire *Sur le mouvement des projectiles*. Or la démonstration de ces équations m'ayant paru trop compliquée pour être exposée dans un cours de mécanique rationnelle, où la question dont il s'agit, devenue si intéressante depuis l'expérience de M. Foucault, doit nécessairement trouver place, j'ai donné une solution directe de cette question, comme cas particulier du problème général sur le mouvement relatif.

Les équations du mouvement du pendule simple, ainsi déduites, se réduisent à celles que M. Binet a intégrées, si l'on néglige, dans une première intégration, les quantités très petites du second ordre, auxquelles on peut avoir égard ensuite, si l'on veut, par la méthode des variations des constantes arbitraires. Le problème du mouvement relatif a été résolu par Coriolis dans son *Traité de mécanique des corps solides*. Mais le savant auteur a compliqué la question par l'introduction d'une force d'entraînement F_c, dont il faut trouver la valeur dans chaque cas particulier.

La solution que j'en ai donnée dans mon cours lithographié de mécanique *), et que je reproduis ici, me paraît beaucoup plus simple; elle a d'ailleurs encore l'avantage de conduire aux équations de l'équilibre et du mouvement du système invariable.

Le problème général du mouvement relatif est celui-ci:

Trouver les équations du mouvement d'un point matériel M par rapport à trois axes rectangulaires qui se meuvent d'une manière quelconque dans l'espace, sans cesser d'être rectangulaires; en supposant que le mobile est sollicité par des forces quelconques, parmi lesquelles nous comprendrons les résistances des obstacles, s'il n'est pas libre.

Désignons par x, y, z les coordonnées du point M relativement à trois axes mobiles; ces quantités seront les inconnues du problème, et notre but est de trouver les équations, d'où l'on puisse déterminer leurs valeurs en fonction du temps t.

Soient x_1, y_1, z_1 et α, β, γ les coordonnées de M et celles de l'origine O des axes mobiles relativement à trois axes fixes; $\xi = x_1 - \alpha$, $\eta = y_1 - \beta$, $\zeta = z_1 - \gamma$ les coordonnées de M par rapport à trois axes fixes parallèles aux axes x_1, y_1, z_1 et passant par l'origine O; a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 les cosinus des angles (x, ξ), (y, ξ), (z, ξ); (x, η), (y, η), (z, η); (x, ζ), (y, ζ), (z, ζ), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax + by + cz \\ \eta &= a_1x + b_1y + c_1z \\ \zeta &= a_2x + b_2y + c_2z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= adx + bdy + cdz + xda + ydb + zdc \\ d\eta &= a_1dx + b_1dy + c_1dz + da_1 + ydb_1 + zdc_1 \\ d\zeta &= a_2dx + b_2dy + c_2dz + cda_2 + ydb_2 + zdc_2, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} d^2\xi &= ad^2x + bd^2y + cd^2z + 2(dadx + dbdy + dcdz) \\ &\quad + xd^2a + yd^2b + zd^2c \\ d^2\eta &= a_1d^2x + b_1d^2y + c_1d^2z + 2(da_1dx + db_1dy + dc_1dz) \\ &\quad + xd^2a_1 + yd^2b_1 + zd^2c_1 \\ d^2\zeta &= a_2d^2x + b_2d^2y + c_2d^2z + 2(da_2dx + db_2dy + dc_2dz) \\ &\quad + xd^2a_2 + yd^2b_2 + zd^2c_2, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

*) Au mois de mai 1851.

Si l'on multiplie ces dernières équations respectivement par a, a_1, a_2, et qu'on désigne par X la force accélératrice, qui sollicite le point M parallèlement à l'axe des x, on obtient en somme

$$\left.\begin{aligned} X dt^2 = {} & d^2x + 2dy\,(adb + a_1db_1 + a_2db_2) \\ & + 2dz(adc + a_1dc_1 + a_2dc_2) + x(ad^2a + a_1d^2a_1 + a_2d^2a_2) \\ & + y(ad^2b + a_1d^2b_1 + a_2d^2b_2) + z(ad^2c + a_1d^2c_1 + a_2d^2c_2); \end{aligned}\right\} (4)$$

parce que

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2} + a\frac{d^2\eta}{dt^2} + a_2\frac{d^2\zeta}{dt^2} = X.$$

Mettons

$$\left.\begin{aligned} adb + a_1db_1 + a_2db_2 &= -rdt = -(bda + b_1da_1 + b_2da_2) \\ cda + c_1da_1 + c_2da_2 &= -qdt = -(adc + a_1dc_1 + a_2dc_2) \\ bdc + b_1dc_1 + b_2dc_2 &= -pdt = -(cdb + c_1db_1 + c_2dc_2), \end{aligned}\right\} (5)$$

et remarquons que $a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$, nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} ad^2b + a_1d^2b_1 + a_2d^2b_2 &= -drdt - (dadb + da_1db_1 + da_2db_2) \\ ad^2c + a_1d^2c_1 + a_2d^2c_2 &= -dqdt - (dadc + da_1dc_1 + da_2dc_2) \\ ad^2a + a_1d^2a_1 + a_2d^2a_2 &= -dpdt - ((da)^2 + (db)^2 + (dc)^2). \end{aligned}\right\} (6)$$

Comme les directions des axes fixes ξ, η, ζ peuvent être choisies arbitrairement, nous supposerons, qu'à la fin du temps t ces axes coïncident avec les axes mobiles des x, y, z, alors tous les cosinus deviennent zéro, excepté a, b_1 et c_2, c.-à-d.

$$a = \cos(x, \xi) = 1,\ b_1 = \cos(y, \eta) = 1,\ c_2 = \cos(z, \zeta) = 1,$$

par conséquent

$$da = 1,\ db_1 = 0,\ dc_2 = 0.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (5), on aura

$$\left.\begin{aligned} db &= -rdt = -da_1 \\ da_2 &= -qdt = -dc \\ dc_1 &= -pdt = -db_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

et au moyen de ces équations, les expressions (6) se réduisent à celles-ci:

$$\left.\begin{aligned} ad^2b + a_1d^2b_1 + a_2d^2b_2 &= -drdt - da_2db_2 = -drdt + pqdt^2 \\ ad^2c + a_1d^2c_1 + a_2d^2c_2 &= +dqdt - da_1dc_1 = +dqdt + prdt^2 \\ ad^2a + a_1d^2a_1 + a_2d^2a_2 &= -[(da)^2 + (db)^2 + (dc)^2] \\ &= -(q^2 + r^2)\,dt^2 \end{aligned}\right\} (8)$$

Substituons les valeurs des expressions (5) et (8) dans l'équation (4), nous aurons, après avoir divisé par dt^2,

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} \\ &\quad - x(p^2 + q^2 + r^2) + p(px + qy + rz), \\ Y &= \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) + x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} \\ &\quad - y(p^2 + q^2 + r^2) + q(px + qy + rz), \\ Z &= \frac{d^2z}{dt^2} + 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) + y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} \\ &\quad - z(p^2 + q^2 + r^2) + r(px + qy + rz). \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Les deux dernières équations s'obtiennent, en prenant la somme des produits des équations (3) respectivement multipliées par b, b_1, b_2, ensuite par c, c_1, c_2. Les équations (9) contiennent la solution du problème général du mouvement relatif; mais avant de procéder à leur application, il faut connaître les valeurs de p, q, r. Or il est facile de voir des équations (7) que ces quantités sont les vitesses angulaires du point M autour des axes ξ, η, ζ, qui coïncident à la fin du temps t avec les axes mobiles x, y, z. On peut d'ailleurs le démontrer comme il suit.

Supposons le point M invariablement lié aux axes mobiles, et qu'il n'ait point d'autre mouvement que celui qu'il reçoit par les axes mobiles, alors les équations (2) se réduiraient à

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= xda + ydb + zdc \\ d\eta &= xda_1 + ydb_1 + zdc_1 \\ d\zeta &= xda_2 + ydb_2 + zdc_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (10)$$

Mais puisque les axes mobiles coïncident à la fin du temps t avec les axes fixes ξ, η, ζ, nous aurons $da = 0$, $db_1 = 0$, $dc_2 = 0$, et en vertu des équations (7), les équations (10) deviendront

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= q\zeta - r\eta\\ \frac{d\eta}{dt} &= r\xi - p\zeta\\ \frac{d\zeta}{dt} &= p\eta - q\xi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Or il est évident des équations (7) que les quantités p, q, r sont indépendantes entre elles; donc p ne changerait pas si q et r étaient zéro, et dans ce cas on aurait $d\xi = 0$, $\frac{d\eta}{dt} = -p\zeta$, $\frac{d\zeta}{dt} = p\eta$, ou $\xi = \text{const.}$, $\eta d\eta + \zeta d\zeta = 0$, le point M décrirait donc un arc de cercle perpendiculaire à l'axe des ξ, qui passe par son centre. Désignons par ds l'élément décrit, et par ϱ le rayon du cercle, nous aurons $pdt = -\frac{d\eta}{\zeta} = \frac{d\zeta}{\eta} = \frac{ds}{\varrho} = d\varphi$ c.-à-d. à l'angle décrit pendant dt, et $p = \frac{d\varphi}{dt}$ est la vitesse angulaire du point M autour de l'axe des ξ. On démontrera de même que q et r sont les vitesses angulaires autour des axes η et ζ, qui coïncident à la fin du temps t avec les axes mobiles.

Si l'on prend les sommes des produits des équations (11) d'abord respectivement multipliées par ξ, η, ζ, ensuite par p, q, r, on obtient

$$\left.\begin{aligned}\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta &= 0, \text{ et}\\ pd\xi + qd\eta + rd\zeta &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12)$$

Mais il est évident des équations (11), que tous les points ξ', η', ζ' d'une droite (l), pour lesquels $q\zeta' - r\eta' = 0$, $r\xi' - p\zeta' = 0$, $p\eta' - q\xi' = 0$, sont imobiles à la fin du temps t. On tire de ces équations

$$\frac{p}{\xi'} = \frac{q}{\eta'} = \frac{r}{\zeta'} = \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}{\sqrt{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}},$$

et mettant $\sqrt{(p^2+q^2+r^2)} = \omega$, nous trouvons

$$\frac{p}{\omega} = \frac{\xi'}{\sqrt{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}} = \cos(l, \xi),$$

et de même

$$\frac{q}{\omega} = \cos(l, \eta), \quad \frac{r}{\omega} = \cos(l, \zeta).$$

Nous pouvons donc conclure des équations (12), qu'un point M invariablement lié aux axes mobiles ne saurait décrire autour de l'origine qu'un arc de cercle perpendiculaire à la droite (l). En prenant la somme des carrés des équations (11), ajoutant et retranchant $p^2\xi^2 + q^2\eta^2 + r^2\zeta^2$ dans le second membre de l'équation, on trouve $v^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (p\xi + q\eta + r\zeta)^2$, où v désigne la vitesse du point M.

Soit R la distance du point M à l'origine O, ϱ sa distance à la droite (l), nous aurons $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$, $p\xi + q\eta + r\zeta = R\omega \cos(l, R)$; donc $v = \omega R \sin(l, R) = \omega\varrho$, d'où $\omega = \frac{v}{\varrho}$; c.-à-d. que $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)} = \omega$ est la vitesse angulaire du point M autour de la droite (l), et l'équation $p = \omega \cos(l, x)$ montre que la vitesse angulaire autour d'une droite quelconque x est égale à la vitesse angulaire autour de la droite (l), multipliée par le cosinus de l'angle (l, x). Appliquons maintenant les équations (9) au mouvement du pendule simple.

Prenons l'origine O des axes mobiles x, y, z au point de suspension, l'axe des z dans la direction de la pesanteur, l'axe des y positifs parallèlement à la ligne méridienne vers le nord, l'axe des x parallèlement à la tangente du cercle parallèle au lieu de l'observation, vers l'est. Imaginons par l'origine une droite L parallèle à l'axe de rotation de la terre, désignons par ω la vitesse constante de rotation de la terre, et par b la latitude du lieu d'observation; nous aurons $p = \omega \cos(L, x) = 0$, $q = \omega \cos(L, y) = \omega \cos(180^0 - b) = -\omega \cos b$, $r = \omega \cos(L, z) = \omega \sin b$. En négligeant la résistance de l'air, on n'a que la force accélératrice g de la pesanteur et la résistance qui provient de l'inextensibilité du fil. Désignons cette résistance par λ, et par m et l la masse du pendule simple et sa longueur, nous aurons

$$X = \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{y}{l}, \quad Z = \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{z}{l} + g,$$

et substituant dans les équations (9) ces valeurs ainsi que celles de p, q, r, remarquant d'ailleurs que

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0,$$

nous aurons pour le mouvement du pendule simple les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{x}{l} = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos b + \frac{dy}{dt}\sin b\right) - x\omega^2 \\
&\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{y}{l} = \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\sin b\,.\,\frac{dx}{dt} - y\omega^2 + \omega^2\cos b(y\cos b - z\sin b) \\
&\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{z}{l} + g = \frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos b\cdot\frac{dx}{dt} - z\omega^2 + \omega^2\sin b(y\cos b - z\sin b)
\end{aligned}\right\} (I)$$

Ces équations diffèrent respectivement des équations (a) de M. Binet par les termes

$$-\omega^2 x, \; -\omega^2 y + \omega^2\cos b\,(y\cos b - z\sin b), \text{ et}$$

$$-\omega^2 z - \omega^2\sin b\,(y\cos b - z\sin b),$$

qui proviennent de la force centrifuge des points M et O, et ne peuvent point être compris dans la pesanteur, parce qu'ils ne sont pas constants. Mais ω étant une très petite quantité, on peut d'abord négliger les termes très petits du second ordre, qui contiennent ω^2, et pour lors, les équations (I) se réduisent aux équations (a) de M. Binet.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 6.)

$\frac{14}{26}$ November 1851.

О предваренiи равноденствiй; соч. засл. Проф. ПЕРЕВОЩИКОВА.

(Съ чертежемъ.)

Въ IV томѣ послѣдняго изданiя (1847) *Физической астрономiи*, Био помѣстилъ подробный и обширный трактатъ *о предваренiи равноденствiй*. Опредѣливъ коеффиціенты въ главныхъ формулахъ и найдя ихъ несогласными съ коеффиціентами г. Петерса, знаменитый ученый дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе:

«M. Peters, dans le Mémoire que j'ai déjà cité, fait la constante *a* égale à 50″,3798 pour la même époque. Ce nombre est moindre que le plus faible de ceux que donnent nos deux calculs. M. Peters se fonde sur un travail très-étendu de M. Otto Struve, dans lequel cet astronome a déterminé les constantes de la précession pour l'époque moyenne de 1790, dans le sens d'interprétation que Bessel leur donne, en combinant les observations de Bradley avec celles qui ont été faites à Dorpat par M. Struve le père, et par M. Argelander. Mais, quoique ce travail ait été exécuté avec beaucoup de soin, la méthode de transport que Bessel a introduite dans la pratique *usuelle* des astronomes, et qu'on y a employée, *me semblerait moins appropriée à une recherche aussi délicate que celle dont nous avons fait usage, parce qu'elle n'y introduit pas aussi directement, ni avec autant d'évidence, les éléments physiques qui*

тому если проведемъ перпендикулярныя дуги $V''P''$ и VP къ NE и къ NE', то безъ ощутительной погрѣшности можемъ принять, что $VP'' = V''P = \psi'$, въ чемъ нетрудно увѣриться прямымъ вычисленіемъ, какъ увидимъ ниже. Дуга $VP'' = PV'' = \psi'$ называется *полнымъ* или *общимъ предвареніемъ равноденствій*, или *предвареніемъ равноденствій на подвижной эклиптикѣ*, которой наклоненіе ω' опредѣляется непосредственными наблюденіями. На основаніи теоріи тяготѣнія, сравненной съ наблюденіями, Лаплассъ нашелъ, что

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 50''{,}28762\,t - 0''{,}000121794\,t^2, \\ \omega &= \omega_0 + 0''{,}00000984232\,t^2, \\ \psi' &= 50''{,}0991367\,t + 0''{,}000122148\,t^2, \\ \omega' &= \omega_0 - 0''{,}521141\,t - 0''{,}00000272294\,t^2. \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

Здѣсь t представляетъ время, протекшее до или послѣ 1750 г. Въ первомъ случаѣ t должно брать отрицательнымъ, во второмъ же — положительнымъ. Притомъ и уголъ N также берется или отрицательнымъ или положительнымъ, такъ что знаки (+) или (—) при t и N всегда одинаковы.

2. Взаимное положеніе точекъ V, V', V'' и относительное разсужденіи *узла* N опредѣляются посредствомъ дугъ $V'V''$, NV', NV'' и угла N. Въ прямоугол. сф. тр — кѣ $V'P''V''$ сторона $V'P'' = \psi - \psi'$, и потому его гипотенуза $V'V'' = \xi$ вычисляется по формулѣ

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{\operatorname{tang}(\psi - \psi')}{\cos\omega_0},$$

или, по малости дугъ $\psi - \psi'$ и ξ, всегда можно принять

$$\xi = \frac{\psi - \psi'}{\cos\omega_0}.$$

Здѣсь $\psi - \psi' = 0''{,}1884833\,t - 0''{,}000243942\,t^2$; слѣд.

$$\xi = 0''{,}2054857\,t - 0''{,}000265947\,t^2.$$

Дуга ξ называется *дополненіемъ по прямому-восхожденію*. После этого въ косоугол. сф. тр—кѣ $NV'V''$ нетрудно уже опредѣлить уголъ N и стороны NV' и NV'', а потомъ по первой изъ нихъ найдется $NV=L$; но L и уголъ N полезнѣе опредѣлять въ совокупности изъ двухъ уравненій

$$\frac{\sin\omega'}{\sin N}=\frac{\sin(L-\psi)}{\sin\xi},\quad \operatorname{tang}(L-\psi)=\frac{\sin\psi'\sin\xi}{\sin\omega\cos\omega'-\sin\omega'\cos\omega\cos\xi},$$

которыя даютъ

$$\sin N\sin(L-\psi)=\sin\omega'\sin\xi,$$
$$\sin N\cos(L-\psi)=\sin\omega\cos\omega'-\sin\omega'\cos\omega\cos\xi;$$

отсюда получаются желаемыя уравненія,

$$\left.\begin{aligned}\sin N\sin L&=\sin\psi\sin(\omega-\omega')+\sin\omega'\cos\psi\sin\xi\\&\quad+2\sin\omega'\cos\omega\sin\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi,\\ \sin N\cos L&=\cos\psi\sin(\omega-\omega')-\sin\omega'\sin\psi\sin\xi\\&\quad+2\sin\omega'\cos\omega\cos\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi.\end{aligned}\right\}\ (B)$$

Чтобъ показать употребленіе этихъ формулъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ подтвердить выше-предложенное замѣчаніе о числовомъ равенствѣ дугъ VP'' и PV'', положимъ, что $t=1000$: тогда будетъ

$$\xi=-60'',462,\quad \psi=13^\circ56'5'',83,\quad \omega=23^\circ28'27'',84,$$
$$\psi'=13^\circ57'1'',28,\quad \omega'=23^\circ19'34'',14,\quad \omega-\omega'=0^\circ8'53'',7.$$

Судя по величинамъ угловъ ω и ω' и по знаку дуги $\xi=V'V''$, чертежъ 1 должно превратить въ чер. 2. Потомъ, по найденнымъ ξ, ψ, и пр. вычисляемъ:

$$\sin\psi\sin(\omega-\omega')=0{,}0006231,\quad \sin\omega'\cos\psi\sin\xi=-0{,}0001126,$$
$$\cos\psi\sin(\omega-\omega')=0{,}0025113,\quad \sin\omega'\sin\psi\sin\xi=-0{,}0000279,$$
$$2\sin\omega'\cos\omega\sin\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi=0,\quad 2\sin\omega'\cos\omega\cos\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi=0,$$

$$\operatorname{tang}L=\frac{5105}{25392},\quad L=NV=11^\circ22'3'',5,$$

$$\sin N=\frac{0{,}0005105}{\sin L},\quad N=0^\circ8'54'',22,\quad \log\sin N=7{,}4133011.$$

Теперь изъ треуг. $NV''V'$ опредѣлимъ

$$\sin NV'' = \frac{\sin\omega'\sin\xi}{\sin N}, \quad NV'' = 2^{\circ}34'6,''29,$$

и

$$NP'' = V''N + P''V'' = NV'' + \psi' - \psi = 2^{\circ}35'1,''74,$$
$$P''V'' = NP'' + NV'' = 13^{\circ}57'5,''24.$$

Потомъ

$$\sin NV'' = \frac{\sin\omega\sin\xi}{\sin N}, \quad NV'' = 2^{\circ}35'1,''77.$$

Наконецъ, изъ $NV''P$ имѣемъ

$$\tang NP = \cos N.\tang NV'', \quad NP = 11^{\circ}22'3,''34;$$

слѣд.

$$PV'' = NV'' + NP = 13^{\circ}57'5,''11.$$

И такъ чрезъ 1000 лѣтъ разность между PV'' и $P''V''$ достигаетъ только до $0,''13$.

2. По малости дугъ $\omega - \omega'$ и ξ, для небольшихъ чиселъ t, строгія формулы (B) могутъ быть превращены въ достаточно приближенныя, выраженныя членами, зависящими отъ первой и второй степени времени t.

1) Третій членъ перваго изъ выраженій (B) равняется *нулю*. Первый членъ того же выраженія $\sin\psi\sin(\omega-\omega')$ превращается въ $\psi(\omega-\omega')$, гдѣ ψ и $\omega-\omega'$ представляются въ общемъ видѣ чрезъ

$$at - bt^2 \text{ и } dt + (c+e)t^2;$$

слѣд.

$$\sin\psi\sin(\omega-\omega') = ad.t^2.$$

Наконецъ, поелику

$$\omega' = \omega_0 - (\omega_0 - \omega'), \quad \sin\omega' = \sin\omega_0 - (\omega_0 - \omega')\cos\omega_0,$$

$$\sin\xi = \xi = \frac{\psi - \psi'}{\cos\omega_0},$$

второй членъ

$$\sin\omega'\cos\psi\sin\xi = (\psi-\psi')\tan\omega_0 - (\psi+\psi')(\omega_0-\omega')$$

приметъ такую форму:

$$(ht-it^2)\tan\omega_0 - hd.t^2 +$$

такъ что выйдетъ

$$N\sin L = h.\tan\omega_0.t + [d(a-h)-i\tan\omega_0]t^2$$
$$= 0'',081844t + 0'',0000206562t^2.$$

2) Первый членъ втораго изъ выраженій (B) есть

$$\cos\psi\sin(\omega-\omega') = \omega-\omega' = dt + (c+e)t^2.$$

Потомъ находимъ

$$Q = 2\sin\omega'\cos\omega\cos\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi - \sin\omega'\sin\psi\sin\xi$$
$$= \tfrac{1}{2}\xi^2\sin\omega'\cos\omega - \xi\psi\sin\omega'$$
$$= \xi\sin\omega'(\tfrac{1}{2}\xi\cos\omega-\psi),$$

гдѣ $\cos\omega = \cos\omega_0 - ct^2.\sin\omega_0$; слѣд.

$$Q = \xi\sin\omega'\left[\frac{\psi-\psi'}{2\cos\omega_0}\cos\omega_0 - \tfrac{1}{2}ct^2(\psi-\psi')\tan\omega_0 - \psi\right]$$
$$= \xi\sin\omega'[-\tfrac{1}{2}(\psi+\psi') - \tfrac{1}{2}ct^2(\psi-\psi')\tan\omega_0]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\xi\sin\omega'[\psi+\psi' + ct^2(\psi-\psi')\tan\omega_0]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\xi\sin\omega'[\psi+\psi' + ct^2(ht-it^2)\tan\omega_0]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\xi\sin\omega'(\psi+\psi') = \tfrac{1}{2}\xi(\psi+\psi')[\sin\omega_0 - (\omega_0-\omega')\cos\omega_0]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\xi(\psi+\psi')\{(ht-it^2)\tan\omega_0 - (ht-it^2)[dt+(c+e)t^2]\}.$$

Но какъ $\psi+\psi'$ имѣетъ форму $At+Bt^2$, то наконецъ

$$Q = -\tfrac{1}{2}Ah.\tan\omega_0.t^2$$

и потому

$$N\cos L = dt + (c+e-\tfrac{1}{2}Ah\tan\omega_0)t^2$$
$$= 0'',5211441t - 0'',0000735150t^2$$

Отсюда выходитъ, что

$$\operatorname{tang} L = \frac{0'',081844 + 0'',0000206562\,t}{0,521141 - 0'',00000735150\,t}.$$

Для $t = 0$, $\operatorname{tang} L$ превращается въ $\frac{0,081844}{0,521141}$, и $L_0 = 8^\circ 55' 30'',97$.

Опредѣливъ величину L, нетрудно уже вычислять N но для употребленія, удобнѣе и N и L выразить рядами изъ членовъ, зависящихъ отъ t и t^2. Съ этою цѣлью, примемъ

$$N \sin L = gt + kt^2, \quad N \cos L = g't - k't^2,$$

и найдемъ

$$N^2 = (g^2 + g'^2)t^2 + 2(gk - g'k')t^3,$$

и

$$N = (g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot t + \frac{gk - g'k'}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} t^2$$

$$= 0'',5275285\,t - 0'',0000040578\,t^2.$$

Для выраженія величины L также рядомъ, сперва выводимъ

$$\operatorname{tang} L_0 = \frac{g}{g'}, \quad \operatorname{tang} L = \frac{g + kt}{g' - k't},$$

и потомъ полагаемъ $L = L_0 + x$, опредѣляемъ

$$x = mt - nt^2, \quad m = \frac{kg' + gk'}{g^2 + g'^2}, \quad n = \frac{gk - g'k'}{g^2 + g'^2};$$

такъ что

$$L = L_0 + mt - nt^2 = L_0 + 8'',43333\,t + 0'',000064869\,t^2.$$

Обѣ формулы, какъ выше замѣчено, не могутъ быть употребляемы для большаго числа лѣтъ; ибо когда $t = 1000$, тогда

$$L = 11^\circ 17' 9'',17 \quad \text{вмѣсто} \quad 11^\circ 22' 3'',5.$$
$$N = 0^\circ 8' 43'',47 \quad \text{вмѣсто} \quad 0^\circ 8' 54'',22.$$

4. Количества L и N необходимы для перемѣны широтъ и долготъ всякой звѣзды, относящихся къ 1750 г., на широты и долготы для $1750+t$ г. Пусть P и P' (чер. 3) будутъ полюсы эклиптики 1750 г. и эклиптики $1750+t$, и PSM, $P'SM'$ — круги широтъ звѣзды S: въ тр-кѣ $PP'S$ сторона $PP'=$ уг. N, $PS=90^0-\lambda$, $P'S=90^0-\lambda'$, уголъ $SPP'=NPP'-NPS=90^0-NM=90^0-(l+L)$, уг. $PP'S=90^0+NP'S=90^0+(l'+L')$. Здѣсь λ и l означаютъ широту и долготу въ 1750 г., λ' и l' — широту и долготу въ $1750+t$, и $L'=NV''=L-\psi'$. Изъ этого тр-ка выводимъ

$$\cos\lambda'\cos(l'+L')=\cos\lambda\cos(l+L) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\lambda'&=\cos N\sin\lambda+\sin N\cos\lambda\sin(l+L)\\ \tang(l'+L')&=\cos N\tang(l+L)-\frac{\sin N\tang\lambda}{\cos(l+L)}\end{aligned}\right\}\ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\lambda&=\cos N\sin\lambda'-\sin N\cos\lambda'\sin(l'+L')\ldots,\\ \tang(l+L)&=\cos N\tang(l'+L')+\frac{\sin N\tang\lambda'}{\cos(l'+L')}.\end{aligned}\right\}\ldots (3)$$

Посредствомъ урав. (2) вычисляются широта и долгота для $1750+t$ по данными широтѣ и долготѣ 1750 г.; посредствомъ же уравненій (3) разрѣшается задача обратная. Эти формулы суть строгія для всякаго времени t, если L, L' и N будутъ опредѣлены также по строгимъ формуламъ (B). По уравненію (1) повѣряются найденныя величины. Но когда данная широта λ не весьма близка къ 90^0, и когда t не превышаетъ столѣтія, тогда незначительная величина угла N позволяетъ выразить λ' и l' рядами, содержащими первую и вторую степени N. При этихъ условіяхъ можно принять, что

$$\begin{aligned}\sin\lambda'&=\sin\lambda-2\sin^2\tfrac{1}{2}N\sin\lambda+2\sin\tfrac{1}{2}N\cos\tfrac{1}{2}N\cos\lambda\sin(l+L)\\ &=\sin\lambda+N\cos\lambda[\sin(l+L)-\tfrac{1}{2}N\tang\lambda].\end{aligned}$$

Отсюда

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda)=N\cos\lambda[\sin(l+L)-\tfrac{1}{2}N\tang\lambda],$$

constituent le mouvement de précession dans l'intervalle des observations combinées; comme aussi elle ne fait pas assez distinguer les deux systèmes de valeurs indépendantes qu'on peut en obtenir par les ascensions droites et par les déclinaisons. La constante b de M. Peters diffère à peine de la nôtre; mais pour la constante c, la différence commence dès le second chiffre significatif. Cela tient à ce que les évaluations des masses planétaires adoptées par M. Peters lui ont donné une différence du même ordre sur le coefficient g, comparé à celui que M. Le Verrier m'a fourni; ce qui réagit sur c, dont g est un facteur. Quant à la valeur, un peu plus forte, que nos calculs donnent au coeficient principal de ψ, *il ne serait pas impossible qu'elle tînt à la dissemblance des méthodes employées pour sa détermination dans les deux formules;* и пр.

Это замѣчаніе ученаго, котораго голосъ въ наукахъ физико-математическихъ имѣетъ полный вѣсъ, не можно оставлять безъ вниманія, особенно слова, напечатанныя курсивомъ. Полагая, что формулы Біо, отличающіяся отъ формулъ Бесселя только своею наружностью (Tabulae Regiomontanae), не могутъ привести къ несогласнымъ результатамъ, если вычисленія безошибочны, и если *данныя* опредѣлены точными наблюденіями, сперва я увѣрился въ неправности вычисленій Біо полнымъ ихъ повтореніемъ съ надлежащею осмотрительностью. Послѣ того, по формуламъ и по методѣ Біо надобно было сравнить Брадлеевы звѣзды съ другимъ новѣйшимъ каталогомъ. Я могъ располагать только частнымъ каталогомъ, помѣщеннымъ въ прекрасномъ разсужденіи г. Отто Струве (Bestimmung der constante der praecession, 1842 г.), и потому не могъ найти значительнаго числа звѣздъ, которыхъ бы положенія относились къ одному году, и которыя были бы противоположны по прямымъ—восхожденіямъ, близкимъ къ 0 и 12 ч., потому что формулы, служащія для опредѣленія количествъ, изображенныхъ буквами q и A, требуютъ, чтобъ косинусы этихъ прямыхъ-восхожденій приближались къ $+1$ и -1. Несмотря на этотъ невольный недостатокъ, сравненіе показало, что главный коеффиціентъ лапласовыхъ формулъ дѣйствительно должно увеличить, но

не такъ много, какъ нашелъ Біо, — и что различіе происходило отъ несовершенной точности каталога Піацци. Опредѣливъ такимъ образомъ количества q и A для 69-лѣтняго періода, я испытывалъ ихъ вычисленіемъ положеній многихъ звѣздъ Брадлеева каталога, и получивъ результаты удовлетворительные, я рѣшился посредствомъ ихъ перенести формулы [illegible] на 1824 г., принявъ въ уваженіе то обстоятельство, что точнѣйшія наблюденія надъ положеніями звѣздъ относятся къ концу первой четверти текущаго столѣтія. Въ эти формулы вошли коеффиціенты, нѣсколько отличные отъ коеффиціентовъ г. Петерса, — почему я почелъ необходимымъ сравнить результаты тѣхъ и другихъ коеффиціентовъ, произведши вычисленія и по формуламъ Біо и по формуламъ Бесселя надъ звѣздами, находящимися въ частномъ каталогѣ, помѣщенномъ въ Connaissance des tems на 1849 г., стр. 447 и слѣд. Этотъ каталогъ я буду называть *каталогомъ Эйри.* Такое сравненіе привело къ заключенію, что найденныя мною фундаментальныя числа не недостойны вниманія астрономовъ. Вотъ почему осмѣливаюсь представить Академіи наукъ мою записку, въ которой я изложилъ также выводъ формулъ Біо, думая, что это не будетъ безполезно въ учебномъ отношеніи.

—

1. Пусть NVE (чер. 1.) и VQ будутъ изображать эклиптику и экваторъ въ 1750 г.; послѣ t лѣтъ та и другая плоскость примутъ положенія $V'V''Q'$ и $NV''E'$, такъ что V, точка ихъ пересѣченія, отступитъ къ западу на дугу $VV' = \psi$, и наклоненіе $EVQ = \omega_0 = 23^\circ 28' 18''$ эклиптики къ экватору сперва перемѣнится въ $EV'Q' = \omega$, а потомъ, отъ перемѣщенія эклиптики, въ $E'V''Q' = \omega'$. Отступленіе экватора на дугу VV' производится дѣйствіемъ тяготѣнія луны и солнца на земной сфероидъ, и дуга $VV' = \psi$ называется *луно-солнечнымъ предвареніемъ равноденствій* на неподвижной эклиптикѣ; перемѣщеніе же самой эклиптики происходитъ отъ тяготѣнія планетъ. Уголъ ENE', означающій величину этого перемѣщенія, весьма малъ, и по-

тому если проведемъ перпендикулярныя дуги $V''P''$ и VP къ NE и къ NE', то безъ ощутительной погрѣшности можемъ принять, что $VP'' = V''P = \psi'$, въ чемъ нетрудно увѣриться приемы вычисленія, какъ увидимъ ниже. Дуга $VP'' = PV'' = \psi'$ называется *полнымъ* или *общимъ предваренiемъ равноденствій*, или *предваренiемъ равноденствій на подвижной эклиптикѣ*, которой наклоненіе ω' опредѣляется непосредственными наблюденіями. На основаніи теоріи тяготѣнія, сравненной съ наблюденіями, Лаплас нашелъ, что

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 50'',28762t - 0'',000121794t^2, \\ \omega &= \omega_0 + 0'',000009842 32t^2, \\ \psi' &= 50'',0991367t + 0'',000122148t^2, \\ \omega' &= \omega_0 - 0'',521141t - 0'',000002722 94t^2. \end{aligned}\right\} \quad . . \quad (A)$$

Здѣсь t представляетъ время, протекшее до или послѣ 1750 г. Въ первомъ случаѣ t должно брать отрицательнымъ, во второмъ же — положительнымъ. Притомъ и уголъ N также берется или отрицательнымъ или положительнымъ, такъ что знаки (+) или (—) при t и N всегда одинаковы.

2. Взаимное положеніе точекъ V, V', V'' и относительное разсужденіе *узла* N опредѣляются посредствомъ дугъ $V'V''$, NV, NV'' и угла N. Въ прямоугол. сф. тр—кѣ $V''P''V'''$ сторона $V''P'' = \psi - \psi'$, и потому его гипотенуза $V'V'' = \xi$ вычисляется по формулѣ

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{\operatorname{tang}(\psi - \psi')}{\cos\omega_0},$$

или, по малости дугъ $\psi - \psi'$ и ξ, всегда можно принять

$$\xi = \frac{\psi - \psi'}{\cos\omega_0}.$$

Здѣсь $\psi - \psi' = 0'',1884833t - 0'',000243942t^2$; слѣд.

$$\xi = 0'',2054837t - 0'',000265947t^2.$$

Дуга ξ называется *вспомогательною по прямому восхожденію*. После этого въ косоугол. сф. тр—кѣ $NV'V''$ нетрудно уже опредѣлить уголъ N и стороны NV' и NV'', а потомъ по первой изъ нихъ найдется $NV=L$; но L и уголъ N полезнѣе опредѣлять въ совокупности изъ двухъ уравненій

$$\frac{\sin\omega'}{\sin N}=\frac{\sin(L-\psi)}{\sin\xi},\quad \tang(L-\psi)=\frac{\sin\omega'\sin\xi}{\sin\omega\cos\omega'-\sin\omega'\cos\omega\cos\xi},$$

которыя даютъ

$$\sin N\sin(L-\psi)=\sin\omega'\sin\xi,$$
$$\sin N\cos(L-\psi)=\sin\omega\cos\omega'-\sin\omega'\cos\omega\cos\xi;$$

отсюда получаются искомыя уравненія

$$\left.\begin{aligned}\sin N\sin L&=\sin\psi\sin(\omega-\omega')+\sin\omega'\cos\psi\sin\xi\\&\quad+2\sin\omega'\cos\omega\sin\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi,\\ \sin N\cos L&=\cos\psi\sin(\omega-\omega')-\sin\omega'\sin\psi\sin\xi\\&\quad+2\sin\omega'\cos\omega\cos\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi.\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

Чтобъ показать употребленіе этихъ формулъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ подтвердить выше-предложенное замѣчаніе о числовомъ равенствѣ дугъ VP'' и PV'', положимъ, что $t=1000$: тогда будетъ

$$\xi=-60''{,}462,\quad \psi=13^\circ56'5''{,}83,\quad \omega=23^\circ28'27''{,}84,$$
$$\psi'=13^\circ57'1''{,}28,\quad \omega'=23^\circ19'34''{,}14,\quad \omega-\omega'=0^\circ8'53''{,}7.$$

Судя по величинамъ угловъ ω и ω' и по знаку дуги $\xi=V'V''$, чертежъ 1 должно превратить въ чер. 2. Потомъ, по найденнымъ ξ, ψ, и пр. вычисляемъ:

$$\sin\psi\sin(\omega-\omega')=0{,}0006231,\quad \sin\omega'\cos\psi\sin\xi=-0{,}0001126,$$
$$\cos\psi\sin(\omega-\omega')=0{,}0025113,\quad \sin\omega'\sin\psi\sin\xi=-0{,}0000279,$$
$$2\sin\omega'\cos\omega\sin\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi=0,\quad 2\sin\omega'\cos\omega\cos\psi\sin^2\tfrac{1}{2}\xi=0,$$

$$\tang L=\frac{5105}{25392},\quad L=NV=11^\circ22'3''{,}5,$$

$$\sin N=\frac{0{,}0005105}{\sin L},\quad N=0^\circ8'54''{,}22,\quad \log\sin N=7{,}4133011.$$

Отсюда выходитъ, что

$$\operatorname{tang} L = \frac{0'',081844 + 0'',0000206562\,t}{0'',521141 - 0'',00000735150\,t}.$$

Для $t = 0$, $\operatorname{tang} L$ превращается въ $\frac{0,081844}{0,521141}$, и $L_0 = 8^\circ 55' 30'',97$.

Опредѣливъ величину L, нетрудно уже вычислять N но для употребленія, удобнѣе и N и L выразить рядами изъ членовъ, зависящихъ отъ t и t^2. Съ этою цѣлью, примемъ

$$N \sin L = gt + kt^2, \quad N \cos L = g't - k't^2,$$

и найдемъ

$$N^2 = (g^2 + g'^2)t^2 + 2(gk - g'k')t^3,$$

и

$$N = (g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}} \cdot t + \frac{gk - g'k'}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} t^2$$
$$= 0'',5275285\,t - 0'',0000040578\,t^2.$$

Для выраженія величины L также рядомъ, сперва выводимъ

$$\operatorname{tang} L_0 = \frac{g}{g'}, \quad \operatorname{tang} L = \frac{g + kt}{g' - k't},$$

и потомъ полагаемъ $L = L_0 + x$, опредѣляемъ

$$x = mt - nt^2, \quad m = \frac{kg' + gk'}{g^2 + g'^2}, \quad n = \frac{gk - g'k'}{g^2 + g'^2};$$

такъ что

$$L = L_0 + mt - nt^2 = L_0 + 8'',43333\,t + 0'',000064869\,t^2.$$

Объ формулы, какъ выше замѣчено, не могутъ быть употребляемы для большаго числа лѣтъ; ибо когда $t = 1000$, тогда

$$L = 11^\circ 17' 9'',17 \quad \text{вмѣсто} \quad 11^\circ 22' 3'',5.$$
$$N = 0^\circ 8' 43'',47 \quad \text{вмѣсто} \quad 0^\circ 8' 54'',22.$$

4. Количества L и N необходимы для перемѣны широтъ и долготъ всякой звѣзды, относящихся къ 1750 г., на широты и долготы для $1750+t$ г. Пусть P и P' (чер. 3) будутъ полюсы эклиптики 1750 г. и эклиптики $1750+t$, и PSM, $P'SM'$ — круги широтъ звѣзды S : въ тр-кѣ $PP'S$ сторона $PP'=$ уг. N, $PS=90^0-\lambda$, $P'S=90^0-\lambda'$, уголъ $SPP'=NPP'-NPS=90^0-NM=90^0-(l+L)$, уг. $PP'S=90^0+NP'S=90^0+(l'+L')$. Здѣсь λ и l означаютъ широту и долготу въ 1750 г., λ' и l' — широту и долготу въ $1750+t$, и $L'=NV''=L-\psi'$. Изъ этого тр—ка выводимъ

$$\cos\lambda'\cos(l'+L')=\cos\lambda\cos(l+L) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\lambda'&=\cos N\sin\lambda+\sin N\cos\lambda\sin(l+L)\\ \operatorname{tang}(l'+L')&=\cos N\operatorname{tang}(l+L)-\frac{\sin N\operatorname{tang}\lambda}{\cos(l+L)}\end{aligned}\right\}\ldots\ (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\lambda&=\cos N\sin\lambda'-\sin N\cos\lambda'\sin(l'+L')\ \ldots,\\ \operatorname{tang}(l+L)&=\cos N\operatorname{tang}(l'+L')+\frac{\sin N\operatorname{tang}\lambda'}{\cos(l'+L')}\ldots\end{aligned}\right\}\ldots\ (3)$$

Посредствомъ урав. (2) вычисляются широта и долгота для $1750+t$ по даннымъ широтѣ и долготѣ 1750 г.; посредствомъ же уравненій (3) разрѣшается задача обратная. Эти формулы суть строгія для всякаго времени t, если L, L' и N будутъ опредѣлены также по строгимъ формуламъ (B). По уравненію (1) повѣряются найденныя величины. Но когда данная широта λ не весьма близка къ 90^0, и когда t не превышаетъ столѣтія, тогда незначительная величина угла N позволяетъ выразить λ' и l' рядами, содержащими первую и вторую степени N. При этихъ условіяхъ можно принять, что

$$\begin{aligned}\sin\lambda'&=\sin\lambda-2\sin^2\tfrac{1}{2}N\sin\lambda+2\sin\tfrac{1}{2}N\cos\tfrac{1}{2}N\cos\lambda\sin(l+L)\\ &=\sin\lambda+N\cos\lambda[\sin(l+L)-\tfrac{1}{2}N\operatorname{tang}\lambda].\end{aligned}$$

Отсюда

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda)=N\cos\lambda[\sin(l+L)-\tfrac{1}{2}N\operatorname{tang}\lambda],$$

и если положимъ, что незначительная разность $\lambda' - \lambda = x$, или $\lambda' = \lambda + x$, то получимъ

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos(\lambda + \tfrac{1}{2}x) = x\cos\lambda - \tfrac{1}{2}x^2\sin\lambda$$
$$= N\cos\lambda\,[\sin(l+L) - \tfrac{1}{2}N\operatorname{tang}\lambda],$$

или

$$x = N[\sin(l+L) - \tfrac{1}{2}N\operatorname{tang}\lambda] + \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{tang}\lambda,$$

или

$$x = N\sin(l+L) - \tfrac{1}{2}N^2\operatorname{tang}\lambda\cos^2(l+L).$$

И такъ

$$\lambda' = \lambda + N\sin(l+L) - \tfrac{1}{2}N^2\operatorname{tang}\lambda\cos^2(l+L). \quad . \quad . \quad (4)$$

Для выраженія величины l', обращаемся ко второму уравненію изъ (2), которое даетъ

$$\operatorname{tang}(l'+L')$$
$$= \operatorname{tang}(l+L) - 2\operatorname{tang}(l+L)\sin^2\tfrac{1}{2}N - \frac{2\sin\frac{1}{2}N\cos\frac{1}{2}N\operatorname{tang}i}{\cos(l+L)}$$
$$= \operatorname{tang}(l+L) - \frac{2\sin\frac{1}{2}N}{\cos(l+L)}[\sin\tfrac{1}{2}N\sin(l+L) + \cos\tfrac{1}{2}N\operatorname{tang}\lambda]$$
$$= \operatorname{tang}(l+L) - \frac{N}{\cos(l+L)}[\tfrac{1}{2}N\sin(l+L) + \operatorname{tang}\lambda].$$

Но какъ $L' = L - \psi'$, то

$$\operatorname{tang}(l' - l - \psi')$$
$$= \operatorname{tang}[(l'+L') - (l+L)] = \frac{\operatorname{tang}(l'+L') - \operatorname{tang}(l+L)}{1 + \operatorname{tang}(l'+L')\operatorname{tang}(l+L)},$$

Вставивъ сюда величину $\operatorname{tang}(l'+L')$, по сокращеніи и по малости дуги $l' - l - \psi'$, найдемъ

$$l' - l - \psi' = -\frac{N[\frac{1}{2}N\sin(l+L) + \operatorname{tang}\lambda]\cos(l+L)}{1 - N\sin(l+L)[\frac{1}{2}N\sin(l+L) + \operatorname{tang}\lambda]},$$

изъ чего нетрудно вывести, что

$$l' = l + \psi' - N\cos(l+L)\operatorname{tang}\lambda$$
$$- N^2\sin(l+L)\cos(l+L)(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\lambda). \quad . \quad . \quad (5)$$

Поступивъ такимъ же образомъ съ уравненіями (3), составимъ

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda' - N\sin(l'+L') - \tfrac{1}{2}N^2\operatorname{tang}\lambda'\cos^2(l'+L') \ldots\ldots \\ l &= l' - \psi' + N\operatorname{tang}\lambda'\cos(l'+L') \\ &\quad - N^2\sin(l'+L')\cos(l'+L')(\tfrac{1}{2}+\operatorname{tang}^2\lambda'). \end{aligned}\right\} (6)$$

5. Теперь слѣдовало бы показать, какимъ образомъ положенія звѣзды относительно эклиптики переносятся отъ $1750+t_1$ къ $1750+t_2$; но эта задача почти безполезна для практики, и потому оставляя ее, переходимъ къ полному изложенію опредѣленія прямыхъ-восхожденій и склоненій соотвѣтственно разнымъ эпохамъ. Пусть P и P' (чер. 4) будутъ полюсы экваторовъ ΥQ и $\Upsilon'\Upsilon''Q'$, относящихся къ 1750 г. и $1750+t$, и продолженныхъ до ихъ взаимнаго пересѣченія въ Q' подъ угломъ $\Upsilon Q''\Upsilon' = q$. Тогда изъ тр—ка $Q''\Upsilon\Upsilon'$, въ которомъ стороны суть $\Upsilon\Upsilon' = \psi$, $Q''\Upsilon = \mu$, $Q''\Upsilon' = \mu'$, и углы суть q, ω_0 и $180^0 - \omega$, по аналогіямъ Непера найдемъ

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mu+\mu') = \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mu-\mu') = \frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_0)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi.$$

Но какъ въ первой изъ этихъ формулъ знаменатель весьма малъ, то для удобности вычисленія, положимъ

$$\mu = 90^0 + u, \quad \mu' = 90^0 - u';$$

отъ этого выйдетъ

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u-u') &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}, \ldots\ldots \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u+u') &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_0)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi, \ldots\ldots \\ \text{и} \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}q &= \frac{\sin\frac{1}{2}(u+u')}{\cos\frac{1}{2}(u-u')}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_0) \ldots \end{aligned}\right\} (7)$$

Теперь обращаемся къ тр—ку $PP'S$, къ которомъ $PS = 90_0 - \delta$, $P'S = 90 - \delta'$, $PP' = q$, уг. $SPP' = 90^0 - (\alpha + \mu)$, $PP'S = 90^0 + (\alpha' + \mu' + \xi)$, и потому получимъ

$$\cos\delta'\cos(\alpha' + \mu' + \xi) = \cos\delta\cos(\alpha + \mu), \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta' &= \sin q\cos\delta\sin(\alpha+\mu) + \cos q\sin\delta, \quad \ldots\ldots \\ \operatorname{tang}(\alpha'+\mu'+\xi) &= \cos q\operatorname{tang}(\alpha+\mu) - \frac{\sin q\operatorname{tang}\delta}{\cos(\alpha+\mu)}, \end{aligned}\right\} (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= -\sin q\cos\delta'\sin(\alpha'+\mu'+\xi) + \cos q\sin\delta' \\ \operatorname{tang}(\alpha+\mu) &= \cos q\operatorname{tang}(\alpha'+\mu'+\xi) + \frac{\sin q\operatorname{tang}\delta'}{\cos(\alpha'+\mu'+\xi)}. \end{aligned}\right\} (10)$$

Посредствомъ формулъ (9) опредѣляются склоненіе δ' и прямое-восхожденіе α' для $1750 + t$ по даннымъ склоненію δ и прямому-восхожденію α для 1750 г.; формулы же (10) разрѣшаютъ обратную задачу. Уравненіе (8) служитъ для повѣрки того и другаго рѣшенія — Если время t не превышаетъ столѣтія, то вмѣсто строгихъ формулъ (9) можно употреблять приближенныя, которыя составляются по способу, предложенному въ чл. (4), и которыя суть:

$$\delta' = \delta + q\sin(\alpha+\mu) - \tfrac{1}{2}q^2\operatorname{tang}\delta\cos^2(\alpha+\mu), \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\alpha' = (\alpha+\mu-\mu'-\xi) - q\cos(\alpha+\mu)\operatorname{tang}\delta - q^2\sin(\alpha+\mu)\cos(\alpha+\mu)(\tfrac{1}{2}+\operatorname{tang}^2\delta). \quad (12)$$

6. Когда для опредѣленія склоненій и прямыхъ-восхожденій, должно перейти отъ $1750 + t_1$ къ $1750 + t_2$; тогда продолживъ экваторы $1750 + t_1$ и $1750 + t_2$ (чер. 5) до взаимнаго ихъ пересѣченія въ Q'' подъ угломъ $V''_2Q''V''_1 = q$, принявъ Π и Π' за соотвѣтствующіе имъ полюсы, и положивъ $Q''V''_1 = \mu_1$, $Q''V''_2 = \mu_2$, найдемъ

$$\cos\delta_1\cos(\alpha_1+\xi_1+\mu_1) = \cos\delta_2\cos(\alpha_2+\xi_2+\mu_2), \quad \ldots\ldots (13)$$

$$\sin\delta_2 = \sin q\cos\delta_1\sin(\alpha_1+\mu_1+\xi_1) + \cos q\sin\delta_1, \quad \ldots\ldots (14)$$

$$\operatorname{tang}(\alpha_2+\mu_2+\xi_2) = \cos q\operatorname{tang}(\alpha_1+\mu_1+\xi_1) - \frac{\sin q\operatorname{tang}\delta_1}{\cos(\alpha_1+\mu_1+\xi_1)}, \quad (15)$$

и

$$\sin\delta_1 = \cos q \sin\delta_2 - \sin q \cos\delta_2 \sin(\alpha_2 + \mu_2 + \xi_2), \quad \ldots\ldots (16)$$

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1) = \cos q \operatorname{tang}(\alpha_2 + \mu_2 + \xi_2) + \frac{\sin q \operatorname{tang}\delta_2}{\cos(\alpha_2 + \mu_2 + \xi_2)}. \quad (17)$$

Изъ этихъ строгихъ формулъ, (16) и (15) выражаютъ переносъ координатъ δ_1 и α_1, соотвѣтствующихъ $1750 + t_1$, къ координатамъ δ_2 и α_2, соотвѣтствующимъ $1750 + t_2$; формулы же (16) и (17) разрѣшаютъ задачу обратную. Но принимая t_2 не болѣе столѣтія, формулы (14) и (15) позволительно перемѣнить на слѣдующія приближенныя:

$$\delta_2 = \delta_1 + q\sin(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1) - \tfrac{1}{2}q^2 \operatorname{tang}\delta_1 \cos^2(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1), \quad (18)$$

$$\alpha_2 = (\alpha_1 + \xi_1 - \xi_2 + \mu_1 - \mu_2) - q\cos(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1)\operatorname{tang}\delta_1 - q^2\cos(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1)\sin(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1)(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\delta_1). \quad (19)$$

Потомъ изъ тр—ка $V'_2 Q'' V'_1$ выводятъ

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)\operatorname{tang}(\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)}, \ldots\ldots \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u_2 + u_1) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1), \ldots\ldots \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}q &= \frac{\sin\frac{1}{2}(u_2 + u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_2 - u_1)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (20)$$

гдѣ $\mu_1 = 90^0 + u_1$, $\mu_2 = 90^0 - u_2$, $\psi_2 - \psi_1 = V'_1 V'_2$. Отъ этихъ условій, выйдетъ

$$\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1 = \alpha_1 + 90^0 + u_1 + \xi_1,$$
$$\sin(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1) = \cos(\alpha_1 + u_1 + \xi_1) = \cos U,$$
$$\cos(\alpha_1 + \mu_1 + \xi_1) = -\sin(\alpha_1 + u_1 + \xi_1) = -\sin U,$$

и положивъ $u_1 + u_2 + \xi_1 - \xi_2 = A$, формулы (18) и (19) сократимъ въ слѣдующія:

$$\delta_2 = \delta_1 + q\cos U - \tfrac{1}{2}q^2 \operatorname{tang}\delta_1 \sin^2 U, \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A + q\sin U \operatorname{tang}\delta_1 + q^2 \sin U \cos U(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\delta_1). \quad (22)$$

такъ что первая приближенная величина q есть

$$\frac{\delta_2-\delta_1}{\cos U},$$

вторая же, точнѣйшая, будетъ

$$q=\frac{\delta_2-\delta_1}{\cos U}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\delta_2-\delta_1)^2}{\cos^2 U}\operatorname{tang}\delta_1\sin^2 U. \quad \ldots \quad (7)$$

Эта формула показываетъ, что для опредѣленія q, надобно брать такія звѣзды, которыя давали бы $\cos U$, приближающимся или къ $+1$ или къ -1. Эти звѣзды берем изъ каталога Брадлея (Fundamenta Astronomiae) и изъ каталога, помѣщеннаго въ прекрасномъ разсужденіи г. Отто Струве о предваренін равноденствій (Bestimmung der constante der praecession), и предварительно замѣчаемъ:

1) Греничъ западнѣе Парижа на 9 м. 22 с. или на 0,0065 д. $=\tau$; слѣд. разность между 1750 г. по парижскому меридіану и 1755 г. по гренического будетъ $t=(T)+\tau$, гдѣ (T) изображаетъ число юліанскихъ дней между этими двумя эпохами.

2) Дерптъ восточнѣе Парижа на 1 ч. 27 м. 33 с. или на 0,067743 д. $=\tau'$; слѣд. между 1750 и 1824 г. прошло времени $t_2=(T')-\tau'$ юліанскихъ дней.

Чтобъ опредѣлить (T) и (T'), принимая въ расчетъ грегоріанскіе высокосные годы, надобно положить

$$(T)=5.365+1=5.365{,}25-0{,}25=1826\text{ д.}$$
$$(T')=74.365+17=74.365{,}25-74.0{,}25+17=27027\text{ д.}$$

И такъ

$$t_1=1826{,}0065\text{ д.},\quad t_2=27026{,}932257\text{ д.}$$

или, въ юліанскихъ годахъ,

$$t_1=4{,}99933,\quad t_2=73{,}9957\text{ г.}$$

Потомъ находимъ

$$\omega_1=23^\circ 28'18''{,}000246,\quad \omega_2=23^\circ 28'18''{,}05389,$$
$$\omega_2=23^\circ 28'18''{,}02707,$$
$$u_2-u_1=16''{,}016,\quad u_2+u_1=3182''{,}04,\quad u_2=1599''{,}03,$$
$$u_1=1583''{,}01,$$
$$\xi_1=1''{,}021,\quad \xi_1+u_1=1584''{,}031=26'24''{,}03.$$

Имѣя величину суммы $\xi_1 + u_1$, будемъ всегда знать уголъ U въ формулѣ (27). Такимъ образомъ получаемъ:

35	Рыбъ	$q = 1381''{,}000$,
$\varkappa$	Кассіопеи, ...	$= 1384{,}916$,
51	Рыбъ, ...	$= 1384{,}885$,
ζ	Кассіопеи, ...	$= 1384{,}173$,
π	Андромеды	$= 1383{,}906$,
α	Кассіопеи	$= 1381{,}501$,
ψ'	Рыбъ	$= 1380{,}172$,
σ^2	Рыбъ	$= 1383{,}614$,
77	Рыбъ	$= 1376{,}070$,
17	Дѣвы	$= 1378{,}688$,
12	Волосы Вереники . .	$= 1384{,}785$,
24	» » . .	$= 1383{,}965$,
		Сред. $1382''{,}306$.

Чтобъ оцѣнить достоинство средняго вывода, вычисляемъ разности его отъ каждой частной величины и квадраты этихъ разностей:

Разности	квадраты разностей
$+ 1''{,}306$	1,706
$- 2{,}610$	6,811
$- 2{,}579$	6,651
$- 1{,}867$	3,485
$- 1{,}600$	2,560
$+ 0{,}805$	0,648
$+ 2{,}134$	4,553
$- 1{,}308$	1,710
$+ 6{,}236$	38,887
$+ 3{,}618$	13,089
$- 2{,}479$	6,144
$- 1{,}659$	2,752
	$\Sigma^2 = 88{,}996$

37 Кита, 1755, $\alpha_1 = 15^{\circ}31'2''{,}9$, $\delta_1 = -9^{\circ}14'46''{,}1$
1824, $\alpha'_2 = 16\ 23\ 4{,}47$, $\delta'_2 = -8\ 52\ 15{,}94$
выч., $\alpha_2 = 16\ 23\ 2{,}921$, $\delta_2 = -8\ 52\ 35{,}026$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = +1''{,}549$, $\delta'_2 - \delta_2 = +19''{,}086$

δ Касс. 1755, $\alpha_1 = 17^{\circ}30'\ 6''{,}000$, $\delta_1 = 58^{\circ}57'8''{,}100$
1824, $\alpha'_2 = 18\ 30\ 18{,}755$, $\delta'_2 = 59\ 19\ 0{,}000$
выч. $\alpha_2 = 18\ 30\ 15{,}610$, $\delta_2 = 59\ 19\ 4{,}409$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = +3''{,}145$ $\delta'_2 - \delta_2 = -4''{,}409$

θ' Ориона, 1755, $\alpha_1 = 80^{\circ}48'42''{,}8$, $\delta_1 = -5^{\circ}34'21''{,}8$
1824, $\alpha'_2 = 81\ 39\ 29{,}850$, $\delta'_2 = -5\ 30\ 49{,}030$
выч. $\alpha_2 = 81\ 39\ 30{,}697$, $\delta_2 = -5\ 30\ 50{,}829$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = -0''{,}847$, $\delta'_2 - \delta_2 = +1''{,}799$

2 Рыси, 1755, $\alpha_1 = 89^{\circ}29'47''{,}2$, $\delta_1 = 59^{\circ}3'43''{,}20$
1824, $\alpha'_2 = 91\ 1\ 19{,}53$, $\delta'_2 = 59\ 3\ 37{,}92$
выч. $\alpha_2 = 91\ 1\ 17{,}488$, $\delta_2 = 59\ 3\ 36{,}964$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = +2''{,}042$, $\delta'_2 - \delta_2 = +0''{,}956$

17 Дѣвы, 1755, $\alpha_1 = 182^{\circ}31'11''{,}3$, $\delta_1 = 6^{\circ}40'13''{,}9$
1824, $\alpha'_2 = 183\ 23\ 48{,}15$, $\delta'_2 = 6\ 17\ 7{,}05$
выч. $\alpha_2 = 183\ 23\ 63{,}872$, $\delta_2 = 6\ 17\ 11{,}378$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = -15''{,}722$, $\delta'_2 - \delta_2 = -4''{,}328$

χ Драк., 1755, $\alpha_1 = 276^{\circ}21'43''{,}2$, $\delta_1 = 72^{\circ}37'10''{,}3$
1824, $\alpha'_2 = 276\ 3\ 16{,}965$, $\delta'_2 = 72\ 39\ 14{,}48$
выч. $\alpha_2 = 276\ 1\ 20{,}405$, $\delta_2 = 72\ 39\ 39{,}249$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = +1'\ 56''{,}560$ $\delta'_2 - \delta_2 = -24''{,}769$

ε Лебедя, 1755, $\alpha_1 = 309^{\circ}\ 4'35''{,}2$, $\delta_1 = 33^{\circ}\ 3'55''{,}1$
1824, $\alpha'_2 = 309\ 45\ 83{,}445$, $\delta'_2 = 33\ 18\ 57{,}2$
выч. $\alpha_2 = 309\ 45\ 55{,}888$, $\delta_2 = 33\ 18\ 34{,}20$
$\alpha'_2 - \alpha_2 = +27''{,}557$ $\delta'_2 - \delta_2 = +23''{,}00$

Разности $\alpha'_2 - \alpha_2$, $\delta'_2 - \delta_2$ называются *собственными движеніями* звѣздъ по прямому-восхожденію и по склоненію; изъ нихъ вычисляются дѣйствительныя ихъ движенія Δ и направленія или уголъ положенія S по слѣдующимъ формуламъ:

$$\Delta^2 = (\delta'_2 - \delta_2)^2 + \cos\delta'_2 \cos\delta_2 (\alpha'_2 - \alpha_2)^2,$$
$$\sin S = \frac{\alpha'_2 - \alpha_2}{\Delta} \cos\delta'_2 .$$

Такъ для χ Дракона будетъ

$$\Delta = 42''669, \text{ въ } 69 \text{ лѣтъ},$$
$$S = 125^\circ 28' 9''.$$

8. И такъ коэффиціенты въ формулахъ Лапласа должны быть исправлены, хотя и не такъ много, какъ нашелъ Біо; это исправленіе зависитъ отъ q, посредствомъ котораго упомянутыя формулы переносимъ къ 1824 г., для чего составляемъ чер. 6, не требующій особеннаго объясненія, и изъ теоріи вѣковыхъ возмущеній планетъ Леверрье заимствуемъ слѣдующія данныя для 1824 г.:

$$N \sin L = 0''{,}06360\, t + 0''{,}000019617\, t^2 = gt + kt^2,$$
$$N \cos L = 0''{,}47513\, t - 0''{,}00000583\, t^2 = g't - k't^2.$$

Сверхъ того въ разсужденіи «Объ обращеніи земли около ея центра тяжести» Пуассонъ доказалъ, что

$$b = \left(\frac{g'}{\operatorname{tang} 2\omega_0} - \frac{3ef}{2(1+\nu)}\right) a = ia, \quad c = \tfrac{1}{2} ga,$$

гдѣ $\omega_0 = 23^\circ 27' 42''{,}79$, эксцентрицитетъ земной орбиты $e = 0{,}0167818$, вѣковое его измѣненіе въ годъ $f = -0{,}000000432214$, и ν выражаетъ отношеніе между дѣйствіями луны и солнца на земной сфероидъ; величину для этого отношенія беремъ среднюю изъ найденныхъ Лапласомъ и Линденау, именно: $\nu = 2{,}19539$. По этимъ даннымъ вычисляемъ:

$$\frac{g'}{\operatorname{tang} 2\omega_0} = 0{,}00000215378, \quad \frac{3ef}{2(1+\nu)} = -0{,}00000008172,$$
$$i = 0{,}0000022355.$$

$$\psi = 50''{,}38781\,t - 0''{,}000112642\,t^2,$$
$$\omega = \omega_0 + 0''{,}00000776833\,t^2,$$
$$\psi' = 50''{,}24127 + 0''{,}000108807\,t^2,$$
$$\omega_1 = \omega_0 - 0''{,}47513\,t - 0''{,}000001934\,t^2,$$
$$\xi = 0''{,}15974\,t - 0''{,}000241407\,t^2.$$

Потомъ формулы (26) даютъ

$$\left.\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 0''{,}159743\,t + 0''{,}000000357106\,t^2,\\ u_2 + u_1 &= 46''{,}22202\,t - 0''{,}000103329\,t^2,\\ q &= 20''{,}06136\,t - 0''{,}0000448471\,t^2,\\ A &= 46''{,}06228\,t + 0''{,}000138078\,t^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (28$$

Для испытанія этихъ основныхъ формулъ и чиселъ, сравнимъ положенія нѣкоторыхъ звѣздъ 1824 г. со звѣздами 1840 г., содержащимися въ каталогѣ Эйри. Поелику здѣсь $t = 16{,}002$ г., $\log t = 1{,}2041254$, слѣд.

$$u_2 - u_1 = 2''{,}555\,, \quad u_2 + u_1 = 739''{,}561\,,$$
$$u_2 = 371''{,}058\,, \quad u_1 = 368''{,}503 = 6'\,8''{,}503.$$
$$q = 320''{,}9708\,, \quad \log q = 2{,}5064654\,, \quad \xi = 2''{,}494.$$

Когда въ формулы (11) и (12) вставимъ значенія μ и μ', тогда получимъ

$$\delta_1 = \delta + q\cos(\alpha + u) - \tfrac{1}{2}q^2 \tang\delta \sin^2(\alpha + u)\,,$$
$$\alpha_1 = \alpha + u_2 + u_1 - \xi + q\sin(\alpha + u)\tang\delta + q^2\sin(\alpha + u)\cos(\alpha + u)(\tfrac{1}{2} + \tang^2\delta),$$

по которымъ находимъ

α Кассіоп., 1840 г.,	$\alpha'_1 = 7^{\circ}\,51'\,61''{,}050$	$\delta'_1 = 55^{\circ}\,39'\,32''{,}060$
выч.,	$\alpha_1 = 7\ 51\ 59{,}479,$	$\delta_1 = 55\ 39\ 32{,}450$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = +1''{,}571,$	$\delta'_1 - \delta_1 = -0''{,}394$

β Андром. 1840 г.,	$\alpha'_1 = 15^{\circ}\,11'\,53''{,}250,$	$\delta'_1 = 34^{\circ}\,46'\,13{,}72$
выч.,	$\alpha_1 = 15\ 11\ 50{,}255,$	$\delta_1 = 34\ 46\ 15{,}779$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = +2''{,}995,$	$\delta'_1 - \delta_1 = -2''{,}059$

o Кита, 1840 г.,	$\alpha'_1 = 32^\circ 48' 59'',850$,	$\delta'_1 = -3^\circ 42' 26'',460$
выч.,	$\alpha_1 = 32\ 48\ 63,467$,	$\delta_1 = -3\ 42\ 21,782$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = -3'',617$,	$\delta'_1 - \delta_1 = -4'',678$

α Персея, 1840 г.,	$\alpha'_1 = 48^\circ 13' 58'',800$,	$\delta'_1 = 49^\circ 17' 7'',610$
выч.,	$\alpha_1 = 48\ 13\ 59,911$,	$\delta_1 = 49\ 17\ 8,352$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = -1'',111$,	$\delta'_1 - \delta_1 = -0'',742$

α Бол. Мед.,	$\alpha'_1 = 163^\circ 26' 57'',750$,	$\delta'_1 = 62^\circ 36' 47'',150$
выч.,	$\alpha_1 = 163\ 26\ 60,477$,	$\delta_1 = 62\ 36\ 47,981$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = -2'',727$,	$\delta'_1 - \delta_1 = -0'',831$

γ Бол. М., 1840 г.,	$\alpha'_1 = 176^\circ 20' 45'',000$,	$\delta'_1 = 54^\circ 35' 3'',470$
выч.,	$\alpha_1 = 176\ 20\ 43,575$,	$\delta_1 = 54\ 35\ 3,151$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = +1'',425$,	$\delta'_1 - \delta_1 = +0'',319$

δ Бол. М., 1840 г.,	$\alpha'_1 = 181^\circ 52' 8'',100$,	$\delta'_1 = 57^\circ 55' 19'',100$
выч.,	$\alpha_1 = 181\ 52\ 6,173$,	$\delta' = 57\ 55\ 18,682$
	$\alpha'_1 - \alpha_1 = +1'',927$,	$\delta'_1 - \delta_1 = +0'',418$

Таковы суть выводы и употребленіе методы Bio. Теперь, чтобъ опредѣлить имъ цѣну, надобно сравнить ихъ съ выводами по методѣ Бесселя и съ основными числами Гг. Отто Струве и Петерса. Здѣсь представляются два обстоятельства: различіе формулъ и различіе основныхъ чиселъ. Сперва обратимъ вниманіе на первое изъ нихъ, т. е. сравнимъ выводы найденныхъ нами чиселъ по однимъ и тѣмъ же формуламъ Бесселя. Если отъ выраженій (28) возьмемъ дифференціалы относительно t и положимъ $dt = 1$; то получимъ величины тѣхъ количествъ, которыя Бессель изобразилъ чрезъ n и m; именно:

$$n = 20'',09136 - 0'',0000896942t,$$
$$m = 46'',06228 + 0'',000276156t.$$

Отсюда опредѣляемъ

	n	m
1824	20″,06136	46″,06228
1830	20,05598	46,06394

Измѣненія тысячныхъ и сотыхъ долей секунды въ n и m требуютъ, чтобъ положенія звѣздъ въ 1824 г. были перенесены сперва въ 1830 г., и отсюда уже въ 1840. Такимъ образомъ по формуламъ

$$\alpha' = \alpha + \tau(m + n \operatorname{tang}\delta \sin\alpha),$$
$$\delta' = \delta + \tau . n \cos\alpha,$$

находимъ

	1830		1840	
Звѣзды	α'	δ'	α_1	δ_1
α Кассіоп.	7°43′38″,750	55°36′13″,618	7°51′58″,780	55°39′32″,156
β Андром.	15 3 33,174	34 43 2,148	15 11 49,917	34 46 15,820
o Кита	32 41 29,732	-3 45 10,444	32 49 3,266	-3 42 21,655
α Персея	48 3 25,576	49 14 54,585	48 13 59,336	49 17 8,637
α Б. Мед.	163 17 29,073	62 40 00,230	163 26 61,270	62 36 48,138
γ Б. Мед.	176 12 44,676	54 38 23,336	176 20 43,485	54 35 3,212
δ Б. Мед.	181 44 35,697	57 58 39,183	181 52 6,581	57 55 18,714

	$\alpha'_1 - \alpha_1$	$\delta'_1 - \delta_1$
α Кассіоп.	+2″,270	—0″,096
β Андром.	+3,333	—2,100
o Кита	—3,416	—4,805
α Персея	—0,538	—1,027
α Бол. Мед.	—3,520	—0,988
γ Бол. Мед.	+1,525	+0,258
δ Бол. Мед	+1,519	+0,386

Сличая эту таблицу съ предъидущею, склоняемся къ заключенію, что формулы Біо, не требующія переходныхъ и повторительныхъ вычисленій, даютъ выводы бо-

лѣе точные, нежели формулы Бесселя, которыя безъ упомянутыхъ переходныхъ вычисленій, должно дополнять членами изъ дифференціаловъ втораго и третьяго порядка, если τ не заключается въ пространствѣ одного года [1]). Сверхъ того должно замѣтить, что если перенесеніе звѣздъ производится чрезъ большое пространство времени для точнаго опредѣленія ихъ собственныхъ движеній; то всего благонадежнѣе употреблять строгія формулы (7) и (9), или (14), (15) и (20). — Остается посмотрѣть, достойны ли вниманія найденныя нами основныя числа сравнительно съ числами гг. Отто Струве и Петерса. Для этого, изъ выраженій г. Петерса

$$n = 20'',0607 - 0'',0000863t,$$
$$m = 46'',0623 + 0'',00028491t,$$

опредѣляемъ предварительно

	n	m
1824	20″,0587	46″,0691
1830	20,0581	46,0780

и потомъ вычисляемъ:

	1830		1840	
Звѣзды	a'	δ'	a_1	δ_1
α Кассіоп.	7°43′38″,786	55°36′13″,703	7°51′58″,956	55°39′32″,459
β Андром.	15 3 33,147	34 43 2,134	15 11 49,855	34 46 15,826
o Кита	32 41 29,880	−3 45 10,458	32 49 3,560	−3 42 21,651
α Персея	48 3 25,606	49 14 54,587	48 13 59,626	49 17 8,673
α Б. Мед.	163 17 29,103	62 40 00,282	163 26 61,703	62 36 48,110
γ Б. Мед.	176 12 44,712	54 38 23,352	176 20 44,162	54 35 3,193
δ Б. Мед.	181 44 35,749	57 58 39,189	181 52 6,727	57 55 18,695

1) Полезно объ этомъ предметѣ справиться съ разсужденіемъ Шуберта, помѣщенномъ въ X томѣ «Записокъ С. Петербургской Академіи Наукъ» стр. 86 и слѣд.

	$\alpha'_1 - \alpha_1$	$\delta'_1 - \delta_1$
α Кассіопеи	$+2''{,}094$	$-0''{,}399$
β Андром.	$+3{,}405$	$-2{,}106$
o Кита	$-3{,}710$	$-4{,}809$
α Персея	$-0{,}826$	$-1{,}063$
α Бол. Мед.	$-3{,}953$	$-0{,}960$
γ Бол. Мед.	$+0{,}838$	$+0{,}277$
δ Бол. Мед.	$+1{,}373$	$+0{,}405$

Сравнивъ эту табличку съ двумя предъидущими, нельзя не заключить, что наши основныя числа, если не имѣютъ преимущества предъ числами г. Петерса, то по крайней мѣрѣ заслуживаютъ такого же вниманія астрономовъ, такъ что окончательное рѣшеніе этого вопроса должно ожидать отъ будущихъ наблюденій, которыя — позволяемъ себѣ думать — обнаружатъ дѣйствительную потребность измѣнить немного числа г. Петерса, чтобъ болѣе приблизиться къ точности опредѣленія собственныхъ движеній звѣздъ.

(Изъ *Bullet. phys.-mathém.* T. X. No. 7. 8.)

$\frac{8}{20}$ August 1851.

Ueber die Olbers'sche Methode Cometenbahnen zu berechnen, von Hrn. Observator CLAUSEN in Dorpat.

Jedem, der sich mit der Berechnung von Cometenbahnen beschäftigt hat, ist es bekannt, welche grosse Erleichterung durch die Olbers'sche sinnreiche Methode erlangt wurde; und dass wir einen grossen Theil der berechneten Bahnen dieser so leichten Methode verdanken. Einige Astronomen haben überdiess die Behauptung aufgestellt, dass die durch die Olbers'sche Methode erlangte erste Annäherung viel grösser sei, als die erste Annäherung durch die übrigen bisher bekannten Methoden: und zwar, dass jene die Annäherung bis auf Grössen der zweiten Ordnung excl. gebe, wenn man die Grössen erster Ordnung den Zwischenzeiten proportional setzt; während die Laplace'sche und andere Methoden diese Annäherung nur bis auf Grössen erster Ordnung exclusive geben. Ich glaube, wenn ich diese letztere Behauptung zu widerlegen suche, ganz im Geiste meines verewigten Gönners zu handeln, der aller Eitelkeit fremd, jeden auf einen Irrthum gegründeten Ruhm gewiss von sich zu entfernen gesucht hätte.

Es ist freilich ausser allem Zweifel, dass das Olbers'sche M, oder das Verhältniss der curtirten Distanzen des Cometen von der Erde in der ersten und dritten Beobachtung bis auf Grössen zweiter Ordnung exclusive, wenn man die Zwischenzeiten als Grössen erster Ordnung betrachtet, genau sei. Nicht so aber ist es mit den Elementen der Bahn, oder z. B. mit ϱ

der Entfernung des Cometen von der Erde in der ersten Beobachtung. Denn es sei die Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung τ', die Entfernungen von der Erde ϱ, ϱ''; so ist die Zeit T in der der parabolische Sector zwischen den beiden Oertern durchlaufen wird, eine Function von ϱ und ϱ'', und muss mit τ' übereinstimmen. Man hat also

$$dT = \left(\frac{dT}{d\varrho}\right) d\varrho + \left(\frac{dT}{d\varrho''}\right) d\varrho'',$$

und wenn man $\varrho'' = M\varrho$ setzt:

$$d\varrho'' = M d\varrho + \varrho\, dM,$$

also $$dT = \left\{\left(\frac{dT}{d\varrho}\right) + M\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right)\right\} d\varrho + \varrho\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right) dM.$$

Hat man also mit der ersten Annäherung von M den Werth von ϱ so bestimmt, dass $T = \tau'$, und setzt man die Correction von $M \ldots . dM$; so wird, da $dT = 0$ sein muss, die Correction von $\varrho \ldots$

$$d\varrho = \frac{-\varrho\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right)}{\left(\frac{dT}{d\varrho}\right) + M\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right)} dM \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Wären nun Zähler und Nenner in dem Factor von dM von gleicher Ordnung, so würde, da dM von zweiter Ordnung ist, $d\varrho$ ebenfalls von zweiter Ordnung sein. Dieses findet aber nicht Statt, denn es ist, wenn man die Entfernungen des Cometen von der Sonne mit r, r'' bezeichnet, die Sehne aber mit k:

$$2K \,.\, T = k(r + r'')^{\frac{1}{2}} + \text{etc.},$$

wo $\log K = 8{,}2335814$, und die vernachlässigten Glieder von dritter und höheren Ordnungen sind, da k von der ersten Ordnung ist. Es wird also:

$$\left.\begin{aligned} 2K\left(\frac{dT}{d\varrho}\right) &= (r + r'')^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dk}{d\varrho}\right) + \frac{1}{2}\frac{k}{(r + r'')^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dr}{d\varrho}\right) + \cdots \\ 2K\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right) &= (r + r'')^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dk}{d\varrho''}\right) + \frac{1}{2}\frac{k}{(r + r'')^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dr''}{d\varrho''}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Man sieht leicht, dass, wenn man die Winkel zwischen der Gesichtslinie und der Chorde in der ersten und dritten Beobachtung ε und ε'' setzt, dass

$$\left(\frac{dk}{d\varrho}\right) = -\cos\varepsilon, \quad \left(\frac{dk}{d\varrho''}\right) = \cos\varepsilon'';$$

wo die Winkel an derselben Seite der Chorde genommen werden. Es wird $\cos\varepsilon$ von der Form $a + b\tau' +$ etc. und ebenso $\cos\varepsilon''$ von der Form $a'' + b''\tau' + \ldots\ldots$; da sie aber für $\tau' = 0$ sich gleich sind, so wird $a = a''$. Eben so ist M von der Form $a_{,} + b_{,}\tau' +$ etc., da aber für $\tau' = 0$, $M = 1$ wird, so hat man $a_{,} = 1$. Es wird also:

$$2K\left\{\left(\frac{dT}{d\varrho}\right) + M\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right)\right\} =$$

$$(r+r'')^{\frac{1}{2}}\left\{-(a+b\tau'+..)+(1+b_{,}\tau'+..)(a+b''\tau'+..)\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{k}{(r+r'')^{\frac{1}{2}}}\left\{\left(\frac{dr}{d\varrho}\right)+M\left(\frac{dr''}{d\varrho''}\right)\right\}+\ldots$$

$$=(r+r'')^{\frac{1}{2}}(b''+ab_{,}-b)\tau'+\ldots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{k}{(r+r'')^{\frac{1}{2}}}\left\{\left(\frac{dr}{d\varrho}\right)+M\left(\frac{dr''}{d\varrho''}\right)\right\}+\ldots$$

Das erste Glied ist offenbar von erster Ordnung. Das zweite, da es mit K multiplicirt ist, von nicht weniger als erster Ordnung. Also ist der Nenner in der Gleichung (⊙) im Allgemeinen von erster Ordnung.

In den Gleichungen (C) ist der erste Theil von $\left(\frac{dT}{d\varrho''}\right)$ von 0ter Ordnung, da $\left(\frac{dk}{d\varrho''}\right)$ im Allgemeinen von 0ter Ordnung ist; und der zweite Theil von erster Ordnung, da er mit k multiplicirt ist. Der Zähler von der Gleichung (⊙) ist also von 0ter Ordnung im Allgemeinen, und da dM von zweiter Ordnung ist, so ist $d\varrho$ von erster Ordnung. W. z. b. w.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X, No.* 11.)

$\frac{12}{24}$ August 1851.

Das astronomische Längenmaass. Von Dr. M. G. von PAUCKER, Correspondent der Akademie.

Bei Ueberreichung des nachstehenden Aufsatzes über die wissenschaftlichen Längenmaasse sei es mir erlaubt, durch einige Worte meinen Zweck näher zu bezeichnen. Bei jeder Beobachtung müssen die einzelnen Vergleichungen, auf denen sie beruht, mitgetheilt werden, weil diese in den Stand setzen den mittleren Fehler zu berechnen, und hiernach die Sicherheit der Beobachtung zu ermessen. In sofern sind die meisten älteren Maassbestimmungen, selbst die aus dem Anfang dieses Jahrhunderts, von geringem wissenschaftlichen Werth. Man nahm damals auf die blosse Versicherung der Künstler Maasse als vollkommen gleich an, von denen jetzt erwiesen ist, dass sie Unterschiede von 25 bis 30 Theilen zeigen, deren 100000 auf einen Zoll gerechnet werden.

Die Astronomen der französischen Gradmessung im Anfang dieses Jahrhunderts erkannten, dass die Perutoise ein wissenschaftlich unbrauchbares Maass ist, da sie an verschiedenen Stellen ihrer Endflächen eine ungleiche Länge hat. Sie bedienten sich also bei der genannten Gradmessung eines neuen Grundmaasses (module). Sie verglichen zwar dieses Grundmaass mit der Perutoise; aber diese Vergleichung ist von geringem Werth: einmal wegen der thatsächlichen Ungleichförmigkeit der Perutoise, sodann weil dabei eine Hülftoise gebraucht wurde, die nicht weiter verglichen worden ist, sondern nur auf das Wort des Künstlers hin als der Toise

gleich angesehen wird. Alle Bestimmungen der Grösse der Erde, welche auf der Perutoise beruhen, sind unsicher; weil man unterlassen hat, die Grundlinie der peruanischen Gradmessung mit dem Grundmaasse der französischen zu übermessen.

Bei dem französischen Meter muss man einen Unterschied machen zwischen dem idealen und materiellen Meter. Das ideale Meter soll der zehnmillionte Theil des Viertelumfangs der Erde sein. Ob das materielle Meter diese Bedingung erfüllt, ist zweifelhaft. Die beiden Urmaasse des Meters im pariser Längenbureau und im Nationalarchiv sind niemals, weder mit der Toise, noch mit dem Grundmaass der französischen Gradmessung verglichen worden. Es findet sich nur eine halbamtliche Bestimmung von Prony für zwei Meter, eines von Eisen, das andere von Platina, von denen man nicht erfährt, ob sie die beiden Urmaasse selbst waren. Das von Prony verglichene materielle Meter ist im Mittel um 112 Theile eines Zolls kürzer als das ideale Meter.

Das einzige wissenschaftliche Maass ist gegenwärtig der mittlere Yard der messingenen Maassröhre der astronomischen Gesellschaft zu London. Ueber diesen Yard und seine Theile hat Baily im Jahr 1835 eine vortreffliche Arbeit bekannt gemacht. So werthvoll die von ihm gegebenen Vergleichungen sind, so schien es mir doch nothwendig, sie einer strengen Ueberrechnung nach neuern Methoden zu unterziehen. Diesen Yard nenne ich zum Unterschiede von anderen Yards den astronomischen, seinen 36sten Theil den astronomischen Zoll, den ich zu 100000 astronomischen Theilen annehme.

Diese neue Berechnung bezieht sich erstens auf die einzelnen Abtheilungen des astronomischen Yards, wo die Genauigkeit der Beobachtungen Baily's so gross ist, dass der mittlere Fehler nur 1 bis 2 Theile beträgt; zweitens auf die authentischen Yards, nämlich den dänischen, welchen ich um 3 Theile, den russischen, welchen ich um $^1/_4$ Theil, den Reichsyard, welchen ich um 5 Theile, den Shuckburgh-Yard, welchen ich um 28 Theile kleiner finde als nach Baily's Rechnung. Drittens bezieht sich die Untersuchung auf

die beiden englischen Meter, welche Nachbilder der französischen sind.

Bei der Ausdehnung der Metalle gebrauche ich ein in der Astronomie bewährtes Verfahren, indem ich eine aus vielen Bestimmungen gezogene mittlere Ausdehnung zum Grunde lege, und den gefundenen Zahlwerthen ein Glied beigebe, welches den Einfluss einer veränderten Ausdehnung anzeigt.

Mit der Berechnung der Vergleichungen des Meters von Baily verbinde ich die von Kater. Der letztere hat mehrere Umstände übersehen, welche feste Fehler nach sich ziehen, daher verdienen die aus Baily's Vergleichungen gefolgerten Werthe den Vorzug. Doch ist der Unterschied im Ganzen nicht sehr erheblich. Das Strichmeter ist nach Baily um $16'_{,}$ Theile kürzer, das Flächenmeter um $44^1/_4$ Theile kürzer als nach Kater.

Aus den Baily'schen Vergleichungen ergiebt sich ein mittlerer Fehler, welcher beim Strichmeter $4^1/_2$ Theile, beim Flächenmeter $9^1/_2$ Theile ist.

Während man nach Kater's früherer Rechnung das Meter des pariser Längenbureau = 39,37079 engl. Zoll annahm, so ist durch diese Umrechnung festgestellt, dass es 39,36966 astronomische Zoll, also 113 Theile weniger hält, mit einem mittlern Fehler von $4^1/_2$ Theilen.

Das bisher angenommene Verhältniss zwischen dem französischen und englischen Maass beruht auf einer alten Bestimmung von 1758, wobei auf die Metallausdehnung keine Rücksicht genommen ist. Diese unsichere Zahl ist, so unglaublich es scheint, in allen wissenschaftlichen Werken bei Reductionen u. dgl. bis auf die neueste Zeit beibehalten worden. Wenn man aber unter gewissen Voraussetzungen die Bestimmungen von Prony und Baily verbindet, so kann man als wahrscheinliches Verhältniss des französischen Zolls zum englischen 1,0657651 setzen, eine Zahl, die durch einen sonderbaren Zufall nur um $1^1/_2$ Theile grösser ist, als die bisher angenommene.

Noch muss ich bemerken, dass bei der Baily'schen Untersuchung der Fall vorkommt, wo aus 14 Beobachtungen mit mehrstelligen Gewichten 10 unbekannte Grössen berechnet

werden sollen, was zu sehr weitläufigen Rechnungen führt. Diese habe ich durch einen neuen Weg beträchtlich abgekürzt, auf welchem statt 10 nur 4 Gleichungen aufzulösen sind.

Die festen Metalle erleiden, eben so wie die Flüssigkeiten, bei einer hohen Wärme, welche die Siedhitze des Wassers übertrifft, eine ungleichmässige Ausdehnung deren Glieder wie die zweiten und höhern Potenzen der Wärme sich verhalten. Diese Glieder verschwinden aber bei einer niedrigen Wärme unterhalb der Wassersiedhitze, so dass dann nur ein Glied übrig bleibt, welches einfach im Verhältniss der Wärme steht.

Die Verschiedenheiten, welche die Beobachter in der Ausdehnung einer und derselben Metallgattung finden, werden erklärt, eines Theils durch die ungleiche Bearbeitung des Metalls, anderen Theils, bei zusammengesetzten, durch Unterschiede in dem Verhältniss der Bestandtheile. Man verlangt daher von den Beobachtern, dass sie die Ausdehnung der von ihnen benutzten metallenen Maassstäbe, ehe dieselben mit der Theilung versehen werden, ermitteln.

Aber selbst bei guter Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungen bleibt in dem aus ihnen geschlossenen Mittel ein gewisser fester Fehler zurück, welcher nicht von den Zuständen der Beobachtung sondern von der Beschaffenheit der Vorrichtung abhängt. Um diese festen Fehler wegzuschaffen verbindet man die von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Vorrichtungen erlangten Werthe. Nach diesem Grundsatz habe ich aus den in mehreren Werken zusammengestellten Angaben für die in diesem Aufsatz vorkommenden Ausdehnungen folgende Mittelwerthe berechnet, welche für 1^0 des hunderttheiligen Thermometers gelten.

Eisen	25	Bestimmungen	$^{5}11612$	mittl. Fehler	$^{7}1059$
Messing	17	»	18715	» »	1203
Platina	5	»	$^{6}91425$	» »	3042

Dieser Mittelwerthe bedient man sich wie in der Astronomie, indem man zu dem Rechnungsergebniss ein Glied hinzufügt, welches den Einfluss einer veränderten Ausdehnung anzeigt.

Von den zu vergleichenden Maassen nenne ich das erste dasjenige, in dessen Theilen das andre ausgedrückt werden soll. Da die Metallausdehnungen von der Frostwärme, d. h. von derjenigen bei welcher das Wasser gefriert, gerechnet werden, so ist es bei einer Reihe von Beobachtungen am bequemsten, sie alle auf die Frostwärme zu bringen.

Die Beobachtung gebe

das erste Maass t'^0 über Frostwärme, Ausdehn. für $1^0 = a'$
das zweite — t''^0 über Frostwärme, Ausdehn. für $1^0 = a''$
das zweite Maass habe bei der Beobachtung m Theile des ersten, bei der Frostwärme $\overset{0}{M}$ Theile des ersten. Dann ist.

$$\overset{0}{M} = m.\frac{1 + a't'}{1 + a''t''} = m + \varepsilon - \varepsilon'$$
$$\varepsilon = a'mt' - a''mt'' \qquad \varepsilon' = \varepsilon a''t''$$

Hat man aus einer Reihe von Beobahtungen die einzelnen $\overset{0}{M}$ und aus diesen das Mittel $\overset{0}{M}$ gefunden, so ergiebt sich durch einmalige Rechnung

$$M = \overset{0}{M}.\frac{1 + a''u''}{1 + a'u'}$$

wo M die Anzahl Theile des ersten Maasses ist, die das zweite enthält, wenn das erste die Wärme u', das zweite die Wärme u'' hat. Diese Wärme mag diejenige sein, bei welcher die Maasse ihre wahre Länge haben sollen.

Wenn beide Maasse einerlei Wärme t haben, und die beobachteten t weit aus einander liegen, so lässt sich aus den Beobachtungen der Unterschied der Metallausdehnungen finden. Es entspreche nämlich den beobachteten m, t, das Gewicht p, und es sei $\smile$ das Summenzeichen, so ist durch Ausgleichung

$$\underset{\smile}{p}\,\overset{0}{M} = \underset{\smile}{pm} + \underset{\smile}{pmt}.(a' - a'')$$

$$\underset{\smile}{pmt}\,\overset{0}{M} = \underset{\smile}{pmmt} + \underset{\smile}{pmmtt}.(a' - a'')$$

woraus $\overset{0}{M}$ und $(a' - a'')$ gefunden werden.

Die Perutoise.

Langlès bildet 1735 die eiserne Perutoise nach einer eisernen Messstange von 1665 am pariser Stadthause. Die Perutoise dient 1736 als Grundmaass bei der Erdmessung von Bouguer in Peru. Gleichzeitig verfertigt Langlès noch zwei eiserne Toisen, die eine für Mairan zur Bestimmung des Sekundenpendels, die andre für Maupertuis zur lappländischen Gradmessung. Man setzt ein solches Vertrauen in die Geschicklichkeit des Künstlers, dass von einer Vergleichung der Toisen mit einander und mit dem Urmaass nicht die Rede ist. Diese Vergleichung geschieht erst 60 Jahr später, siehe Delambre Base du système métrique décimal III. 402. Man findet die Länge der Perutoise an den verschiedenen Stellen der Einschnitte nicht ganz gleich. Als wissenschaftliches Längenmaass ist die Perutoise unbrauchbar, was auch W. Struve Breitengradmessung 1831, II. bestätigt. Der Maassausschuss von 1799 ersetzt zwar die Perutoise durch ein anderes Maass, den französischen Stab (module No. I). Aber man unterlässt es, mit diesem genauern Maasse die Gradmessung unter dem Aequator zu wiederholen. Daher bleibt denn unsere Kenntniss von der Grösse der Erde mit der ganzen Unsicherheit behaftet, welche die Perutoise hat.

Der französische Stab.

Der französische Stab (module I) ist das Grundmaass der französischen Gradmessung, von Platina und nahe zwei Toisen. Es sind nur fünf Vergleichungen bekannt, zwei von Borda, Base III. 335, drei vom Maassausschuss, Base III. 407—409. In den ersten beiden wird die Wärme nach dem Metallthermometer bestimmt.

$$t = \frac{386{,}0625 - 385{,}3}{1{,}853} = 0{,}411495$$

$$t = \frac{413{,}475 - 385{,}3}{1{,}853} = 15{,}20507$$

Die Vergleichung geschieht nicht unmittelbar mit der Perutoise, sondern in den ersten beiden mit der Gesammtlänge

zweier Lenoirtoisen, in den drei andern mit einer Gesammtlänge, welche aus der Perutoise und einer Lenoirtoise besteht. Es wird nur einfach die Versicherung gegeben, die Lenoirtoise sei der Perutoise vollkommen gleich, was mit der Thatsache in Widerspruch steht, dass die Länge der Perutoise an den verschiedenen Stellen ihrer Endflächen verschieden ist.

Die Wärme, bei welcher die Maasse ihre wahre Länge haben sollen, ist bei der Perutoise $u' = 16{,}25$
bei dem französischen Stab $u'' = 17{,}6$

$a' = 1{,}1612$ $a'' = 1{,}1425$ $a' - a'' = 0{,}0187$ $\varepsilon = (a' - a'')\,m$

t	$r = m - 1$	ε	$M - 1 = r + \varepsilon$
1 0,411495	0,0028875	0,0001016	0,0029891
2 15,20567	— 0,0011625	0,0037549	0,0025924
3 12,4	0	0,0030622	0,0030622
4 12,4	— 0,0003500	0,0030622	0,0027122
5 10,6	0,0006500	0,0026177	0,0032677
	Mittel	$M - 1$ ...	0,0029247 $\quad \delta = 0{,}0001209$
		$a'' u''$ ..	0,0160908
		$a' u'$ —	0,0188695
		$M - 1$ ..	0,0001460

Wenn also die Gesammtlänge der beiden Lenoirtoisen $= 1$, oder die Gesammtlänge der Perutoise und Lenoirtoise $= 1$, und die Maasse die vorgeschriebene Wärme u', u'' haben, so ist der französische Platinstab $= 1{,}00000146$
mittlerer Ausgleichungsfehler $\delta = 0{,}0000121$

Das vorläufige Meter nach Lenoir.

Lacaille bestimmt 1758 den 45sten Breitengrad zu 57027 Toisen, das Viertel des Erdumfangs also zu 5132430 Toisen. Das vorläufige Meter soll also sein 0,5132430 Perutoisen, wenn die Perutoise die Wärme $u' = 16{,}25$, das vorläufige Meter die Wärme $u'' = 10^0$ hat. Nach dem Bericht des Maassausschusses, Base III. 680, macht Lenoir die Abgleichung auf folgende Art.

Vier messingne Meter, M', M'' . . . . ihre Gesammtlänge $\overset{\smile}{M}$

Zwei eiserne Toisen, P', P''; ihre Gesammtlänge $\overset{\smile}{P}$

Sechs eiserne Stäbe, S', S'' . . . . . ihre Gesammtlänge $\overset{\smile}{S}$

Die Vergleichungen in Einheiten der 7ten Stelle von P.

$M' = m - 459$ $\quad P' = P - 315$

$M'' = m - 26$ $\quad P'' = P - 338$

$M''' = m$ $\quad \overset{\smile}{M} - \overset{\smile}{P} = S' + 2615$

$M^{IV} = m - 34$ $\quad \overset{\smile}{S} = P'' + 60150 = P + 59812$

$S^{I} = S'$ $\quad S^{IV} = S' + S''' - 100$

$S^{II} = S' + 83$ $\quad S^{V} = S' + S^{IV} + 275$

$S^{III} = S' + S'' - 166$ $\quad S^{VI} = S' + S^{IV} + S^{V} - 1212$

Diese Vergleichungen geben

$\overset{\smile}{M} = 4m - 519$, $\overset{\smile}{P} = 2P - 653$, $\overset{\smile}{M} - \overset{\smile}{P} = 4m - 2P + 134$,

$4m = 2P + S' + 2481$, $\overset{\smile}{S} = 19S' - 1394 = P + 59812$

$19S' = P + 61206 = P \,.\, 1{,}0061206$ $\quad S' = P \,.\, 0{,}0529537$

$4m = S' + P \,.\, 2{,}0002481$

$4m = P \,.\, 2{,}0532018$

$m = P \,.\, 0{,}5133004$

$t = 16{,}2$, $\quad a' = 11612$, $\quad a'' = 18715$.

bei der Frostwärme $\overset{0}{M} = m \dfrac{1 + a't}{1 + a''t} = P \,.\, 0{,}5132413$

bei $16\frac{1}{4}^{\circ}$ u. 10° . . $M = \overset{0}{M} \dfrac{1 + a''u''}{1 + a'u'} = P \,.\, 0{,}5132405.$

Das endgültige Meter des Maassausschusses.

Siehe Base III. 691. «Das von Borda für das vorläufige Meter gewählte Verfahren findet man zu verwickelt. Lemoir

verfertigt zu den neuen Vergleichungen eine Theilung, welche Millionentel der Toise giebt, ausserdem 12 Meter von Eisen, 2 Meter von Platina, und 19 eiserne Stäbe, deren jeder nahe gleich sein soll dem Ueberschuss von 4 Metern über 2 Toisen. Einer davon $S' = S$ wird zur Vergleichung mit den übrigen gewählt. Dieser Stab S bildet mit der Perutoise und Lenoir-toise eine Länge E, welche mit je vieren der 12 Meter verglichen wird. Eines dieser Meter, bezeichnet mit (. .) dient zur Vergleichung mit den übrigen. Die Uebereinstimmung dieser 12 Meter ist so gross, dass sie als Urmaasse unter die Mitglieder des Ausschusses vertheilt werden.«

»Eines der beiden Platinameter $= N$ wird am 22. Juni 1799 als Urmaass im Nationalarchiv hinterlegt. Das andere Platinameter $= \mathfrak{C}$ wird dem Längenbureau zur Aufbewahrung in der kaiserlichen Sternwarte übergeben. Am 26. Juni 1806 wird dieses Meter mit dem Urmaass des Nationalarchivs bei 22,8 bis 23° C mittels der neuen Vorrichtung von Lenoir verglichen. Aus vielen Vergleichungen ergiebt sich im Mittel

$$\mathfrak{C} - N < \frac{N}{600000}$$

In diesem Bericht fehlt grade die Hauptsache, nämlich die Vergleichung der beiden Meter mit der Perutoise oder mit dem französischen Stab.

Das Eisenmeter nach Tralles.

Den hinterlassenen Bericht von Tralles giebt Hassler Comparison of Weights etc. 1832. 74:

»Die Stäbe S', S^2, . . vergleicht Lenoir mittels eines Fühlhebels, welcher kleine Abstände um mehr als 25 Mal vergrössert. Es sei wie $S' = S$, die Perutoise $= P$, die Lenoirtoise $= P'$, $P + P' = 2P''$, $2P'' + S = E$, so ist

	Ueberschuss der Eisenstäbe über *S*.		Ueberschuss der Eisenmeter über das Meter (..) = *m*.	
1	— 5		— 4	$19S = P''.1{,}0009050$
2	10	A	0	$S = P''.0{,}0526792$
3	0		— 11	$E = P''.2{,}0526792$
4	— 20		— 6	$A = P''.2{,}0526752.$
5	— 70			$B = P''.2{,}0526802$
6	— 50		— 6	$C = P''.2{,}0526772$
7	0	B	1	$D = P''.2{,}0526792$
8	— 50		— 2	$4m = P''.2{,}0526773$
9	— 40		— 3	$4m = P''.2{,}0526812$
10	— 20			$4m = P''.2{,}0526787$
11	5		— 7	$4m = P''.2{,}0526804$
12	— 70	C	— 3	
13	0		— 2	
14	— 50		— 3	
15	— 70			
16	— 60		— 2	
17	— 20	D	0	
18	— 20		— 8	
19	— 10		— 2	

$$S = 19S - 540$$
$$\widetilde{S} = P'' + 8510$$
$$\widetilde{19S} = P'' + 9050$$
$$19S = P''.1{,}0009050$$

$$A = E - 40 = 4m - 21$$
$$B = E + 10 = 4m - 10$$
$$C = E - 20 = 4m - 15$$
$$D = E \quad\quad = 4m - 12$$

Es ist also im Mittel

$$16m = P''.8{,}2107176$$
$$m = P''.0{,}5131698$$
$$\overset{0}{M} = m = P''.0{,}5131698$$

$a' = a'' = 11612$

$u' = 16\frac{1}{4} \quad u'' = 0 \quad M = \frac{\overset{0}{M}}{1 + a'u'} = P''.0{,}5130730$

Eine Vergleichung des hier berechneten Eisenmeters (..) mit den beiden Urmaassen des Platinameters fehlt.

Die Perutoise nach Bird.

Siehe Philos. Trans. 1786. 326. Bird findet 1758
die Perutoise $M = 76{,}734$ engl. Zoll

$$\frac{M}{72} = 1{,}06575.$$

Die Metallausdehnung durch die Wärme ist nicht berücksichtigt. Dessen ungeachtet ist diese unsichere Zahl von Delambre bei den Gradmessungen, Base III. 187, von Muncke, Dove, u. a. beibehalten worden.

Die Toise und das Meter nach Prony.

Siehe Base III. 467. 479. Das Vergleichungsmaass ist eine Pictet gehörige, 49 Zoll lange Theilung auf Messing von Troughton 1797. Für die Gültigkeit dieses Maasses ist nach dem damaligen Zustande keine andre Gewähr als die einfache Versicherung des Künstlers. Es ist wahrscheinlich nicht mehr vorhanden, sonst hätte es Baily in seinem weiter unten angeführten Aufsatz mit der astronomischen Maassröhre verglichen. Die Prony'sche Bestimmung der Toise und des Meters kann also nicht unmittelbar auf den astronomischen Zoll zurückgeführt werden. Wir erhalten das Ergebniss dieser Vergleichung ohne die Einzelheiten, welche zur Bestimmung des mittlern Fehlers erforderlich sind. Wir erfahren ferner nicht, ob die Toise die Perutoise selbst, oder ihr Lenoir'sches Nachbild ist. Eben so wenig ersehen wir, ob das Platinameter eines der beiden oben erwähnten Urmaasse, und ob das Eisenmeter das oben mit (. .) bezeichnete ist.

Für die Toise ist

$t = 13{,}5 \quad a' = 18715 \quad a'' = 11612 \quad u' = 16\frac{1}{2} \quad u'' = 16\frac{1}{4}$

$m = 76{,}7394$

$$\overset{0}{M} = m\,\frac{1 + a't}{1 + a''t} = 76{,}7467575$$

$$M = \overset{0}{M}\,\frac{1 + a''u''}{1 + a'u'} = 76{,}7373036$$

$$\frac{M}{72} = 1{,}0657959$$

Für das Platinameter ist

$a' = 18715, \quad a'' = 91425, \quad u' = 16\frac{1}{2}, \quad u'' = 0,$

t	m	$\overset{0}{M}$
15,3	39,3775	39,3832664
12,75	39,3781	39,3829055
Mittel	$\overset{0}{M}$	= 39,3830859

$$M = \frac{\overset{0}{M}}{1 + a'u'} = 39,3708056$$

Für das Eisenmeter ist

$$a' = 18715, \quad a'' = 11612, \quad u' = 16\tfrac{2}{3}, \quad u'' = 0,$$

t	m	$\overset{0}{M}$
15,3	39,3788	39,3830788
12,75	39,3795	39,3830660
Mittel	$\overset{0}{M}$	= 39,3830719

$$M = \frac{\overset{0}{M}}{1 + a'u'} = 39,3707916$$

Hieraus das Verhältniss des Meters zur Toise

beim Platinameter = 0,5130595
beim Eisenmeter = 0,5130593

Wir wollen annehmen, das Mittel dieser beiden Meter sei gleich dem Urmaass des pariser Längenbureau. Die Bestimmung dieses letztern durch Baily nach der unten folgenden neuen Berechnung giebt dann die Toise in astronomischen Zollen

$$\frac{39,36965828}{0,5130594} = 76,7350881 = 72 \,.\, 1,0657651.$$

Das astronomische Maass.

Siehe Baily Report on the new Standard Scale of the Royal Astronomical Society, presented December 11, 1835, in den Memoirs of the R. A. Society Vol IX. 1836.

Die Einheit der Vergleichungen ist das neue wissenschaftliche Längenmaass, welches der königlichen astronomischen Gesellschaft zu London gehört. Ich will es das »astronomische Maass« nennen.

Die Theilung befindet sich auf der Oberfläche einer messingenen Walzenröhre von 63 Zoll Länge. Die Röhre ruhet in feinster Berührung auf zwei kleinen Rollen, deren jede 15 Zoll vom Ende absteht. Sie ist aus drei in einander gezogenen Röhren zusammengesetzt, die äussere $^1/_{10}$ Zoll, die innern jede $^1/_{20}$ Zoll stark. Auf der Oberfläche der astronomischen Maassröhre, $1^1/_2$ Zoll vom Ende ausgehend, sind zwei sehr feine gleichlaufende Linien von $^9/_{100}$ Zoll Abstand, zwischen denen Stifte von Palladium mit feinen Strichen, welche die Abtheilungsgrenzen für die Fusse, Zolle, Zehntelzolle, bilden.

Vor dieser Bezeichnung wird die Röhre eine Zeitlang einer Wärme von $115^1/_2$ C. ausgesetzt, um die Ausdehnung zu bestimmen. Sechs Vergleichungen geben 1026, 1030, 1056, 1049, 1057, 1068, also im Mittel

für 1° F	$\overset{5}{1048}$	mittl. Fehler	$\overset{8}{68067}$
für 1° C	18864	» »	12252
oben angenommen	18715	» »	1203.

Den Werth eines Theils der Messschraube setzt Baily aus 240 Vergleichungen auf 0,00005 Zoll. Da diese Vergleichungen nicht vorliegen, so kann der mittlere Fehler dieses Werths nicht angegeben werden.

Der Palladiumstrich, welcher 12 Zoll vom linken Ende der Theilung sich befindet, wird als Ausgang der Theilung angesehen. Von diesem Ausgang werden die einzelnen Abtheilungen rechts oder links genommen. Die astronomischen Werthe bezeichne ich durch die Zifer rechts oder links von 0. z. B.

$$12 \text{ Zoll rechts vom Ausgang} = {}^{0}12$$
$$12 \text{ Zoll links vom Ausgang} = 12^{0}.$$

Als abgekürzte Bezeichnung setze ich

$$a^0 = a + a'$$
$${}^0a = a + {}'a$$

Die Abtheilung rechts vom Ausgang °36 nennt Baily den mitt-

rn Yard und setzt ihn = 36, d. h. gleich dem genauen Werth von 36 astronomischen Zollen.

Baily giebt S. 153, 154, Tafel I—VI, 14 Beobachtungen, deren jede auf 20 Vergleichungen beruht. Einige Mittel, welche er nicht genau gezogen hat, habe ich verbessert, und hieraus die von ihm nicht angegebenen Mittelfehler Δ und Gewichte p berechnet. Der aus den 20 Vergleichungen auf die gewöhnliche Art gezogene Mittelfehler von λ sei d, so nehme ich das Gewicht von λ, nämlich p, im umgekehrten Verhältniss von dd. In dem Mittelfehler Δ ist der mittlere Ausgleichungsfehler $\mathfrak{d}$, und der mittlere Verbindungsfehler δ enthalten, so dass $\Delta\Delta = \mathfrak{d}\mathfrak{d} + \delta\delta$.

Hier folgt Tafel A.

Für die Abstände der Zollstriche 1, 2, 5, 7, 10, 11 giebt Baily, S 103, Bestimmungen, welche nach der vorstehenden neuen Rechnung abzuändern sind. Jede Beobachtung beruht auf fünf Vergleichungen, welche nicht vorliegen, weshalb der mittlere Fehler nicht berechnet werden kann.

Vergleichung der Maassabtheilungen.		Neu berechneter astron. Werth.
$1^0+1^0+1^0-3^0$	$= 320-990$	$1^0 = 0{,}9999815$
$2^0+2^0+2^0-3^0-3^0$	$= -320-990-990$	$2^0 = 1{,}9999311$
$5^0+5^0-4^0-6^0$	$= 650$	$5^0 = 5{,}0000404$
$7^0+7^0-6^0-8^0$	$= 10$	$7^0 = 6{,}9999278$
$10^0+10^0+10^0-9^0-9^0-12^0$	$= -700-1470$	$10^0 = 9{,}9997964$
$11^0+11^0+11^0-9^0-12^0-12^0$	$= -700-700+1470$	$11^0 = 10{,}9998285$

Da das Meter 39,37 engl. Zoll, das londoner Sekundenpendel 39,14 engl. Zoll hält, so ist die Untersuchung der Strecke zwischen den Zollstrichen 3^0 und 4^0 erforderlich. Nach der neuen Rechnung ist diese Strecke = 1,0000370 astr. Zoll. Sie ist durch feine Striche in Zehntel getheilt. Die Abstände der einzelnen Zehntel giebt Baily S. 104, aber ohne die einzelnen Vergleichungen, weshalb die mittlern Fehler nicht geschlossen werden können. Zwischen den Strichen 3,3 und 3,4 ist auf einem Palladiumstift der Meterstrich angebracht, dessen Abstand vom Ausgang nahe = 3,37 ist. Diese Ab-

stände findet Baily 1835 Mai und Okt. aus je fünf nicht angezeigten Vergleichungen:

Abschnitt.	Bezeichnung.	Nach Baily.	Neu berechnet.
3^0	A	3,0000160	3,0000116
$(3,3)-3^0$	π	0,3	"
$(3,4)-(3,3)$	ϱ	0,0999930	"
	c	$\frac{13942}{19982}$	"
$(3,37)-(3,3)$	$c\varrho$	0,0697679	"
(39,3)	$36+A+\pi$	39,3000160	39,0000116
(39,4)	$36+A+\pi+\varrho$	39,4000090	39,4000046
(39,37)	$36+A+\pi+c\varrho$	39,3697840	39,3697795

Da die Vergleichungen auf denen die Bestimmungen von π, ϱ, c, beruhen, nicht angezeigt sind, so können die mittlern Fehler der drei letzten Abschnitte nicht berechnet werden.

Die authentischen Yards.

Siehe Baily 113—121, Taf. VII—XVI. Die vier wichtigsten sind: der dänische Yard, der russische Yard, der Reichsyard von 1760, und der Shuckburgh-Yard gemessen von 10 bis 46 Zoll. Diese vier Yards bezeichne ich durch $36+\mathfrak{D}$, $36+\mathfrak{R}$, $36+\mathfrak{J}$, $36+\mathfrak{S}$.

Die beiden von Bird verfertigten Reichsyards von 1758 und 1760 wurden einige Wochen nach der Vergleichung, im Brande der Parlamentshäuser Oktober 1835, zerstört, so dass England jetzt kein gesetzliches Reichsmaass hat.

Die Stellung der Beobachter und die Nähe des Maasses haben Einfluss auf die Vergleichung. Um diese Einflüsse zu beseitigen, nehme ich erstlich das Mittel der Vergleichngen bei denen die Beobachter ihre Stellen wechseln, was hier durch $+-$ angezeigt ist, sodann das Mittel dieser ersten Mittel, in denen das eine oder andre Maass dem Beobachter näher ist. Daher muss ich mehrere von Baily benutzte Vergleichungen weglassen. Die hier folgende vollständige Mittelziehung soll als Beleg für meine Abweichung von Baily dienen.

Dän. Y. und Astron. Y. (Taf. XII.)

Maass	Beob.	No.	λ	dd
DA	+	1 — 5	210	49912,5
"	—	6 — 10	— 835	979662,5
"	+	11 — 15	— 805	54587,5
"	—	16 — 20	435	346100
"	+	21 — 25	— 20	66837,5
"	—	26 — 30	— 135	154912,5
"	+	70 — 71	— 3075	160000
"	—	72 — 73	— 1362,5	26406,25
AD	+	31 — 40	— 5040	80808,3
"	—	41 — 50	— 3807,5	24792,4
"	+	66 — 67	— 2450	105625
"	—	68 — 69	— 4150	62500

Maass	λ	dd
DA	— 312,5	257393,75
"	— 185	100171,87
"	— 77,5	55437,5
"	— 2218,75	46601,56
AD	— 4423,75	26400,17
"	— 3300	42031,25

Maass	λ	$\Delta\Delta = \delta\delta + \delta\delta$
DA	— 975,7353	416593,8
AD	— 3990,2184	331234,8
$\mathfrak{D} =$	— 2482,9768	186957,1

Russ. Y. und Astron. Y. (Taf. XIII.)

Maass	Beob.	No.	λ	dd
RA	+	1 — 5	2840	17537,5
"	—	6 — 10	2055	32337,5
"	+	11 — 15	1720	18212,5
"	—	16 — 20	3620	22150
"	+	21 — 25	3690	43850
"	—	26 — 30	2215	18287,5

AR	+	31 — 35	— 2705	20337,5
»	—	36 — 40	— 1180	42150
»	+	41 — 45	— 1500	64437,5
»	—	46 50	— 1470	57650
»	+	51 — 55	— 1570	12212,5
»	—	56 — 60	— 1525	17125

Mass	λ	dd
RA	2447,5	12468,75
»	2670	10090,62
»	2952,5	15534,37
AR	— 1942,5	15621,87
»	— 1485	30521,87
»	— 1547,5	7334,37

Mass	λ	$\Delta\Delta = bb + ss$
RA	2671,3988	30903,9
AR	— 1647,1798	28600,8
$\Re =$	512,1095	14876,2

Dän. Y. und Russ. Y. (Taf. XIV.)

Mass	Beob.	No.	λ	dd
DR	+	1 — 5	1185	75162,5
»	—	6 — 10	2765	87537,5
»	+	11 — 15	2040	39475
»	—	16 — 20	1635	32412,5
»	+	21 — 25	1585	89037,5
»	—	26 — 30	1645	37712,5
RD	+	33,34, 45,46	4731,25	213059,9
»	—	35,36, 47,48	4731,25	27851,5
»	+	37,38	4975	2500
»	—	39,40	3362,5	507656,2
»	+	41,42	4587,5	18906,2
»	—	43,44	5100	180625

Maass	λ	dd
DR	1975	40675
»	1837,5	17971,87
»	1615	31687,5
RD	4731,25	60227,85
»	4168,75	127539,06
»	4843,75	49882,81

Maass	λ	$\Delta\Delta = \mathfrak{bb} + \mathfrak{88}$
DR	1804,9268	34566,7
RD	4682,8110	94663,4
$-\mathfrak{D} + \mathfrak{R} =$	3243,8609	32307,5

Reichs Y. und Astron. Y. (Taf. IX.)

Maass	Beob.	No.	λ	dd	
JA	+	1 — 10	— 4130	60495,2	I.
	+	152 — 156			
»	—	157 — 161	— 3885	71600	
»	+	86 — 88	$-7215\frac{5}{8}$	62811,1	II.
	+	132 — 136			
»	—	89 — 90	$-2271\frac{5}{7}$	31679,4	III.
	—	127 — 131			
»	+	142 — 146	— 5930	99537,5	
»	—	147 151	— 2858	204014	
»	+	162 — 166	— 4850	113125	
»	—	167 171	— 3005	46775	
AJ	+	91 — 95	960	72600	
»	—	96 — 100	— 7850	5937,5	

Maass	λ	dd
JA	— 4007,5	33023,8
»	— 4743,5	23622,6
»	— 4394	75887,9
»	— 3927,5	39975
AJ	— 4405	19634,4

Maass	λ	$\Delta\Delta = \mathfrak{bb} + \mathfrak{88}$
JA	— 4316,5832	78241,4
AJ	— 4405	19634,4
$\mathfrak{Z} =$	— 4360,7916	24468,9

Dän. Y. und Reichs Y. (Taf. X.)

Beob.	No.	λ	dd	
+	1 — 10	550	33486,1	
—	11 — 20	— 4652,5	34756,2	
+	21 — 30			
+	45 — 49	— 3106,25	117241,4	I.
+	55 — 59			
—	41 44	11163	188142,4	II.
—	50 — 54			
+	31 — 35	— 2820	168150	
—	36 — 40	1585	118850	
		— 2051,25	17060,6	
		— 994,7917	76345,9	
		— 617,5	71750	
			$\Delta\Delta = \mathfrak{bb} + \mathfrak{ss}$	
$-\mathfrak{D}+\mathfrak{J} =$		— 1656,3838	205337,5	

Russ. Y. und Reichs Y. (Taf. XI.)

Beob.	No.	λ	dd
+	1 — 5	— 2560	18975
—	6 — 10	— 6855	23087,5
+	11 — 15	— 8210	63662,5
—	16 — 20	— 1020	99462,5
+	21 — 25	— 5100	160250
—	26 — 30	— 3625	181750
		— 4707,5	10515,62
		— 4615	40781,25
		— 4362,5	85500
			$\Delta\Delta = \mathfrak{bb} + \mathfrak{ss}$
$-\mathfrak{R}+\mathfrak{J} =$		— 4659,4976	23996,3

Diese beiden Vergleichungen des Reichsyards mit dem dänischen und russischen Yard Taf. X. XI. sind unvollständig, weil die Maasslage nicht gewechselt ist.

Die obigen sechs Vergleichungen sind nach der neuen Mittelziehung:

	λ	dd	p
$\mathfrak{D} =$	— 2482,9768	186957,1	1,0983135
$\mathfrak{N} =$	512,1095	14876,2	13,8030880
$\mathfrak{J} =$	— 4360,7916	24468,9	8,3917750
$-\mathfrak{D}+\mathfrak{N} =$	3243,8609	32307,5	6,3557224
$\mathfrak{D}+\mathfrak{J} =$	— 1656,3838	205337,5	1,
$-\mathfrak{N}+\mathfrak{J} =$	— 4659,4976	23996,3	8,5570484

Die Ausgleichung giebt folgende neue Werthe:

	λ	β	$\delta\delta$	$\Delta\Delta$
$\mathfrak{D} =$	— 2711,4268	— 91,3013	12167,33	20503,25
$\mathfrak{N} =$	478,4323	83,3672	4147,75	11097,86
$\mathfrak{J} =$	— 4275,4987	— 137,5745	5568,39	24495,15

Shuckburgh Y. und Reichs Y. (Taf. XV.)

Maass	Beob.	No.	λ	dd
SJ	+	1 — 5	3535	94600
"	—	6 — 10	— 2795	182462,5
"	+	18 — 22	— 2410	129037,5
"	—	23 — 27	3350	155062,5
JS	+	28 — 32	1690	36850
"	—	33 — 37	315	83412,5
		SJ	370	69265,62
		"	470	71025
		JS	1002,5	30965,62
				$\Delta\Delta = \delta\delta + \beta\beta$
		$\mathfrak{S} - \mathfrak{J} =$	710,9365	25674,2
	oben ist	$\mathfrak{J} =$	— 4275,4987	24495,1
	also	$\mathfrak{S} =$	— 3564,5622	50169,3

Die Vergleichung des Shuckburgh-Yards mit dem astronomischen Yard, Taf. XVI, bleibt unbenutzt, weil die Stellung der Beobachter nicht gewechselt ist.

Auf dem Shuckburgh-Yard seien die Yards

von 0 bis 36 = 36 + $\mathfrak{S}'$, von 12 bis 48 = 36 + $\mathfrak{S}''$,

von 24 bis 60 = 36 + $\mathfrak{S}'''$;

so ist nach Baily aus je 20 nicht angezeigten Vergleichungen:

$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + 2640$, $\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S} - 1325$, $\mathfrak{S}''' = \mathfrak{S} - 5705$.

Die authentischen Yards ausgedrückt in astronomischen Zollen sind demnach:

	Nach Baily	Neu berechnet	Δ
Astronomischer Yard	36,0000000	36,0000000	
Dänischer Yard	35,9997580	35,9997289	143
Russischer Yard	36,0000500	36,0000478	105
Reichsyard	35,9996240	35,9995725	156
Shuckburgh-Yard 10—46	35,9999210	35,9996436	224
Shuckburgh-Yard 0—36	36,0001850	35,9999076	

Das englische Strichmeter.

Das englische Strichmeter von Platina = M^e ist kürzer als das Platina-Strichmeter des pariser Längenbüreau = M^p. Nach Arago's Bestimmung ist

$$M^p = M^e \,.\, 1{,}00001759$$

Da die einzelnen Vergleichungen, auf denen diese Bestimmung beruht, nicht vorliegen, so kann ihr mittlerer Fehler nicht berechnet werden.

Kater's Untersuchung des englischen Strichmeters findet sich in Philos. Trans. 1818. I. 54. 103. Die Vergleichung geschieht mit der Zolltheilung, welche Troughton 1797 für Sir George Shuckburgh Evelyn verfertigte, und zwar mit dem Abschnitt von 0 bis 39,4. Diesen Abschnitt giebt Kater in mittlern Zollen A = 39.39994864.

Derselbe Abschnitt lässt sich in astronomischen Zollen geben. Baily findet, S. 142, am 29 Mai 1835 aus acht Vergleichungen

$$A = (39{,}4) - 6160$$

nach der neuen Rechnung $(39{,}4) = 39{,}4000046$

also $A = 39{,}39938860$

Die einzelnen Vergleichungen giebt Baily nicht, weshalb der mittlere Fehler von A nicht berechnet werden kann.

Kater macht 14 Beobachtungen. Ihre mittlern Fehler kennt man nicht. Man muss also alle Gewichte gleich, alle $p = \frac{1}{14}$ annehmen. Für den Werth eines Schraubentheils giebt Kater 10 Vergleichungen:

23350	23369
23337,5	23357,5
23375,5	23383
23373,2	23358,5
23345	23378,5.

Also im Mittel 1 Zoll in Schraubentheilen = 23362,77.

1 Schraubentheil in Zollen $c = \overset{5}{4}2803143634.$

Die Ablesung sei α, so ist die Beobachtung $m = A - c\alpha$.

Beide Maasse haben t^0 Fahr. über der Frostwärme. Man bringt also alle Beobachtungen auf die Frostwärme durch den Ausdruck $\overset{0}{M} = m\frac{1 + a' t}{1 + a'' t}$, wo nach den obigen Mittelwerthen ist für Fahrenh. Gr.

$a' = \frac{4}{5} . 18715 = \overset{5}{1}039722 \ldots \quad a'' = \frac{5}{5} . 91425 = \overset{6}{5}079166 \ldots$

Will man andre Ausdehnungen anwenden, so ist für Fahr. Gr.

$$\underset{\sim}{pmt} = 1132{,}60442 \ldots$$

Man fügt dann zu dem Mittelwerth $\overset{0}{M}$ noch das Glied

$$\underset{\sim}{pmt}\,(da' - da'').$$

	t	α	m	$\overset{0}{M}$
1	28,0	559,5	39,37544024	39,38130263
2	28,7	563,5	526903	27793
3	29,7	564,8	521328	43161
4	30,0	565,5	518342	46444
5	30,4	568,0	507642	44116
6	30,3	570,8	495657	30036
7	30,2	570,0	499081	31367
8	30,2	566,0	516202	48491
9	30,1	566,5	514062	44257
10	26,8	548,0	593248	54373
11	27,0	554,0	567566	32874
12	27,0	554,0	567566	32874
13	27,2	548,8	589824	59322
14	27,1	551,0	580407	47810

Mittel $\overset{0}{M} = 39{,}38140941$ $\delta = \overset{\delta}{2679}$

$u' = 30$ $u'' = 0$ $M' = \frac{\overset{0}{M}}{1 + \alpha' u'} = 39{,}36912952$

69250

pariser Str. Meter $M^p = 39{,}36982202.$

Baily, S. 130 — 132 Taf. XVII. XVIII, vergleicht das englische Strichmeter mit den drei Abschnitten der astronomischen Maassröhre, welche oben durch (39,3), (39,4), (39,37) bezeichnet wurden, nämlich:

Beob. 1 — 6 mit (39,3) $= A = 39{,}30001160$
Beob. 7 — 12 mit (39,4) $= A = 39{,}40000460$
Beob. 13 — 19 mit (39,37) $= A = 39{,}36977950$

Die Ablesung sei $= r$, so ist die Beobachtung $m = A + r$.

Da die mittlern Fehler von A unbekannt sind, so nehme ich den mittlern Fehler von m gleich dem Mittelfehler d von

r. Da jedes r auf mehreren Vergleichungen beruht, so wird d aus diesen Vergleichungen auf die gewöhnliche Art geschlossen. Das Gewicht p wird so berechnet, dass

$$pdd = \text{Const.} \quad \text{und} \quad p' + p'' \ldots = \underbrace{p} = 1.$$

Jede Beobachtung m wird auf die Frostwärme gebracht durch $\overset{0}{M} = m \frac{1 + a' t'}{1 + a'' t''}$, wo a', a'', wie oben.

Will man andre Ausdehnungen anwenden, so ist für Fahrenheit Gr. $\underbrace{pmt'} = 871{,}0567047$ $\underbrace{pmt''} = 880{,}9592892$.

Man fügt dann zu dem Mittelwerth $\overset{0}{M}$ noch die Glieder

$$\underbrace{pmt'} \,.\, da' - \underbrace{pmt''} \,.\, da''$$

Hier folgt Tafel B.

Das englische Flächenmeter.

Das englische Flächenmeter von Platina $= M^b$ hat eine viel geringere Gültigkeit als das Strichmeter. Denn es sind keine Bestimmungen vorhanden über den Unterschied zwischen dem Strichmeter des pariser Längenbureau und den beiden Flächenmetern, dem pariser und dem englischen.

Kater lässt durch Stahlfedern zwei geschliffene messingene Tafelstücke I, II, an die Endflächen des Meters drücken. Auf die Tafelstücke sind feine Striche gezogen, deren Abstand gemessen wird. Wenn die Tafelstücke einander berühren, so ist der Abstand der Striche bei I 456,7, bei II 500,5 Schraubentheile. Diese Grösse wird von dem auf den angedrückten Tafelstücken gemessenen Abstand abgezogen, wodurch u sich ergiebt.

MF bedeutet die Lage des Flächenmeters wo das Meterzeichen oben, FM die wo es unten liegt. Kater macht in jeder Lage fünf Beobachtungen, welche auf die Frostwärme gebracht, das dieser Lage entsprechende mittlere $\overset{0}{M}$ und dessen Mittelfehler d geben. Man nimmt für beide Lagen das Mittel

$$\breve{M} = \tfrac{1}{2}(\breve{M}' + \breve{M}'') \qquad dd = \tfrac{1}{4}(d'd' + d''d'')$$

und hat nun für jedes der beiden Tafelstücke I, II, ein $\overset{0}{M}$ mit dem entsprechenden d, woraus das entsprechende Gewicht p sich ergiebt. Man nimmt aus beiden mit Rücksicht auf diese Gewichte das Mittel. Zur Anwendung andrer Ausdehnungen ist hier für Fahr. Gr. $\underset{\frown}{pmt} = 955{,}145544$.

Hier folgt Tafel C.

Baily vergleicht das englische Flächenmeter, S. 137 Tafel XIX, mit dem Abschnitt der astronomischen Maassröhre, welcher oben bezeichnet ist mit

$$(39{,}4) = A = 39{,}40000460$$

Er macht acht Beobachtungen, deren jede auf vier Vergleichungen beruhet. Aus je vier Vergleichungen folgt die dieser Beobachtung entsprechende mittlere Ablesung r und deren Mittelfehler d. Sowohl das Meter als die angedrückten Tafelstücke I, II werden umgelegt, wodurch die Berührungsfehler auf entgegengesetzte Seiten fallen, und im Mittel einander aufheben, Die Werthe dieser Tafelstücke sind

$$\text{bei I} \quad q = \overset{3}{2}101000$$

$$\text{bei II} \quad q = 2338400$$

dann ist die Beobachtung $m = A - q + r$.

Da weder für A noch q die einzelnen Vergleichungen vorliegen, so können ihre Mittelfehler nicht gegeben werden.

Um andre Ausdehnungen anzuwenden ist hier für Fahr. Gr.

$$\underset{\frown}{pmt'} = 645{,}024208 \qquad \underset{\frown}{pmt''} = 646{,}960619.$$

Hier folgt Tafel D. u. E.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 14. 15.)

		t
MF	I	27,7
»	I	22,8
»	I	23,0
»	I	23,1
»	I	23,2
FM	I	24,8
»	I	24,7
»	I	24,8
»	I	24,8
»	I	24,8
MF	II	23,6
»	II	23,7
»	II	23,9
»	II	23,2
»	II	23,2

mass bei $16^2/_3$ C.
$16^1/_4$ C

D. E. Zu Seite 428.

m	*M*	dd
,37857960	39,38201329	^{9}14291666
826835	170201	9182291
880835	184423	13432291
847960	151545	17541666
820435	168023	9515625
813560	161147	29375000
778685	158429	14640625
766185	145927	10057291
MF I	39,38185765	^{10}5868489
FM I	67984	7743489
MF II	64585	9722656
FM II	52178	6174479

			p
I	39 38176875	^{10}3402994	0,5387196
II	39,38158381	3974284	0,4612804

ittel $\overset{0}{M}$ = 39,38168344

er M^{b} = 39,36940347
st:

ngen in astronomischen Zollen nach der
Berechnung.

der Frostwärme.	Das Meter in der Frostwärme, das astronom. Maass bei 62° F.
32,60442 ($da' - da''$)	39,36912952
71,05670 da'	39,36896578
80,95929 da''	
32,60442 ($da' - da''$)	39,36982202
71,05670 da'	39,36965828
80,95929 da''	
55,14554 ($da' - da''$)	39,36984632
45,02421 da'	39,36940347
46,96062 da''	

$\frac{8}{20}$ August 1851.

Zur Theorie der kleinsten Quadrate. Von Dr. M. G. von PAUCKER. (Zweiter Artikel.

Man überzeugt sich leicht, dass der mittlere Fehler eines Mittels durch die Ausgleichung allein zu niedrig bestimmt wird. Es mögen z. B. mehrere Beobachtungen zufällig einander nahe gleich sein, während ihre aus den einzelnen Vergleichungen gezogenen Mittelfehler beträchtlich sind. Der durch Ausgleichung sich ergebende Mittelfehler des Mittels der Beobachtungen ist dann gering, da er doch wegen der grossen einzelnen Mittelfehler erheblich sein sollte. Wegen der häufigen Anwendung dieser Rechnung möge hier ein ausführlicher Beweis stehen.

Die unbeziehliche Beobachtung . . . λ
ihr unbeziehlicher Mittelfehler . . . d
ihr Gewicht . . . . . p
ihre gewichtliche Zahl . . . . . a
ihre einheitliche Zahl . . . . . $\frac{a}{\sqrt{p}} = \mathfrak{A}$
die einheitliche Beobachtung . . . $\lambda\sqrt{p} = l$
der einheitliche Mittelfehler . . . $d\sqrt{p} = g$
der einheitliche Fehler überhaupt h
irgend ein Mittel . . . . . $m = \mathfrak{A}'l' + \mathfrak{A}''l'' \ldots$
oder $m = a'\lambda' + a''\lambda'' \ldots$
dessen Fehler $dm = \mathfrak{A}'h' + \mathfrak{A}''h'' \ldots$

Man bezeichne den mittleren Werth einer veränderlichen Grösse durch den über diese Grösse gesetzten Bogen. Der Mittelfehler von m sei Δ, so ist $\Delta\Delta = \overset{\frown}{dm \cdot dm}$

also $\Delta\Delta = \mathfrak{A}'^2 \overset{\frown}{h'^2} + \mathfrak{A}''^2 \overset{\frown}{h''^2} \ldots$
$+ 2\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' \overset{\frown}{h'h''} + 2\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''' \overset{\frown}{h'h'''} \ldots$

Es können zwei Fälle stattfinden. Die Zahlen $\mathfrak{A}$ sind entweder gegebene, von bestimmten Bedingungen abhängige, oder sie sind durch Ausgleichung gefundene Werthe. Im ersten Fall setzt man nach Gauss:

$$\widehat{h'h'} = g'g' \qquad \widehat{h''h''} = g''g'' \text{ u. s. w.}$$
$$\widehat{h'h''} = 0 \qquad \widehat{h'h'''} = 0 \text{ u. s. w.}$$

dann wird $\Delta\Delta = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}'g'g' + \mathfrak{A}''\mathfrak{A}''g''g'' \ldots$

oder $\Delta\Delta = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}'d'd' + \mathfrak{a}''\mathfrak{a}''d''d'' \ldots$

Z. B. zwei Beobachtungen λ' λ'' enthalten thatsächlich eine und dieselbe Grösse mit entgegengesetztem Vorzeichen. Man nimmt um diese unbekannte Grösse wegzuschaffen

$$m = \tfrac{1}{2}\lambda' + \tfrac{1}{2}\lambda''$$
$$\text{dann ist } \Delta\Delta = \tfrac{1}{4}d'd' + \tfrac{1}{4}d''d''$$

weil hier die Zahlen $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' = \frac{1}{2}$ nicht auf Ausgleichung beruhen.

Wenn aber im zweiten Fall die Zahlen $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{a}$ auf Ausgleichung beruhen, so setzt man

$$h' = f' + g' \qquad h'' = f'' + g'' \text{ u. s. w.}$$

wo f' f''.. die veränderlichen Theile, $g'g''$.. die aus den einzelnen Vergleichungen geschlossenen festen Theile, denen man auch die sogenannten konstanten Fehler beifügen kann. Es ist dann nach Gauss:

$$\widehat{f'} = 0 \quad \widehat{f''} = 0 \quad .. \quad \widehat{f'f'} = 0 \quad \widehat{f'f''} = 0 ..$$
$$\widehat{f'f'} = \mathfrak{ff} \qquad \widehat{f''f''} = \mathfrak{ff}$$

Woraus folgt $\widehat{f'g'} = 0 \qquad \widehat{f''g''} = 0 \quad \widehat{f''g'} = 0$

$$\widehat{h'h'} = \mathfrak{ff} + g'g' \qquad \widehat{h''h''} = \mathfrak{ff} + g''g''$$
$$\widehat{h'h''} = g'g'' \qquad \widehat{h'h'''} = g'g'''$$
$$\Delta\Delta = (\mathfrak{A}'\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{A}'' ..)\,\mathfrak{ff}$$
$$+ (\mathfrak{A}'g' + \mathfrak{A}''g'' ..)\,(\mathfrak{A}'g' + \mathfrak{A}''g'' ..)$$

Es sei alsdann der mittlere Ausgleichungsfehler $= \mathfrak{b}$
der mittlere Verbindungsfehler $= \delta$

so ist $\mathfrak{bb} = (\mathfrak{A}'\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{A}'' \ldots)\,\mathfrak{ff}$

oder $\mathfrak{bb} = \left(\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'}{p'} + \frac{\mathfrak{a}''\mathfrak{a}''}{p''} \ldots\right)\mathfrak{ff}$

$\delta = \mathfrak{A}'g' + \mathfrak{A}''g'' \ldots$

oder $\delta = \mathfrak{a}'d' + \mathfrak{a}''d'' \ldots$

und $\Delta\Delta = \mathfrak{bb} + \delta\delta$

der hieraus folgende Satz ist:

»Dieselben Zahlen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, .. mit welchen die Beobachtungen λ', λ'' .. zur Bildung des Mittels m multiplicirt werden, geben mit den Mittelfehlern d', d'', ... der Beobachtungen den mittlern Ausgleichungsfehler δ des Mittels. Das Quadrat des vollständigen Mittelfehlers ist gleich den Quadraten des Ausgleichungsfehlers und Verbindungsfehlers zusammen.«

Wenn aus den Beobachtungen durch Ausgleichung mehrere Mittel gefunden werden, so gilt derselbe Satz für jedes Mittel.

$m' = \mathfrak{a}'\lambda' + \mathfrak{a}''\lambda'' \ldots$ $\qquad$ $m'' = \mathfrak{b}'\lambda' + \mathfrak{b}''\lambda'' \ldots$

$\mathfrak{b}'\mathfrak{b}' = \left(\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'}{p'} + \frac{\mathfrak{a}''\mathfrak{a}''}{p''} \ldots\right)\mathfrak{ff}$ $\qquad$ $\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'' = \left(\frac{\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'}{p'} + \frac{\mathfrak{b}''\mathfrak{b}''}{p''} \ldots\right)\mathfrak{ff}$

$\delta' = \mathfrak{a}'d' + \mathfrak{a}''d'' \ldots$ $\qquad$ $\delta'' = \mathfrak{b}'d' + \mathfrak{b}''d'' \ldots$

$\Delta'\Delta' = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}' + \delta'\delta'$ $\qquad$ $\Delta''\Delta'' = \mathfrak{b}''\mathfrak{b}'' + \delta''\delta''$

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 15.)

$\frac{8}{20}$ August 1851.

Zur Theorie der kleinsten Quadrate Von Dr. M. G. von PAUCKER. (Dritter Artikel.)

Wenn der Unterschied zwischen der Anzahl der Beobachtungen und der aus ihnen zu bestimmenden Mittel beträchtlich geringer ist als die Anzahl der Mittel, so kann man sich eines Verfahrens bedienen, welches erhebliche Vortheile gewährt. Bekanntlich wächst die Weitläufigkeit der Rechnung unverhältnissmässig mit der Anzahl der aufzulösenden Gleichungen, besonders wenn die Gewichte nicht in einfachen Zahlen ausgedrückt sind, sondern aus den Beobachtungsfehlern auf mehrere Decimalstellen berechnet werden. Dann ist es zweckmässig, den ersten Theil der Rechnung ohne Zuziehung der Gewichte auszuführen, in den zweiten Theil aber die umgekehrten Gewichte zu bringen, welche wie die Quadrate der Beobachtungsfehler sich verhalten. Statt wie gewöhnlich zuerst die Mittel zu bestimmen und durch sie die Beobachtungen auszugleichen, wird man hier umgekehrt zuerst die Beobachtungen ausgleichen, und aus den ausgeglichenen Beobachtungen die Mittel berechnen. Bei diesem Verfahren werden mehrere neue Beziehungen zwischen den Rechnungsgrössen aufgedeckt. Als Beispiel dient die in dem Aufsatz «das astronomische Längenmaass» vorkommende Untersuchung der londoner astronomischen Maassröhre, wo aus 14 Beobachtungen 10 Mittel gefunden werden. Auf die gewöhnliche Art hat man 10, auf die hier vorgeschlagene Art aber nur 4 Gleichungen aufzulösen.

Der allgemeine Ausdruck jeder ausgeglichenen Beobachtung $\mathfrak{C}$ durch die Mittel $m' m''$.. ist

$$\mathfrak{C} = am' + bm'' \ldots$$

Die Anzahl der Beobachtungen sei n, die der Mittel sei r. Man bringt die Beobachtungen in zwei Abtheilungen, welche man durch die darüber gesetzten Ziffern 1, 2, unterscheidet. in der ersten Abtheilung r Beobachtungen, in der zweiten $n - r$ Beobachtungen.

Folgende Aufstellung gewährt eine Uebersicht der ganzen Rechnung. Zuerst ohne Zuziehung der Gewichte:

$$1.\begin{Bmatrix} \overset{1}{a}' & \overset{1}{a}'' \\ \overset{1}{b}' & \overset{1}{b}'' \end{Bmatrix} \quad 2.\begin{Bmatrix} \overset{2}{a}' & \overset{2}{a}'' \\ \overset{2}{b}' & \overset{2}{b}'' \end{Bmatrix} \quad 3.\begin{Bmatrix} \overset{0}{a}' & \overset{0}{a}'' \\ \overset{0}{b}' & \overset{0}{b}'' \end{Bmatrix} \quad 4.\begin{Bmatrix} \alpha' & \alpha'' \\ \beta' & \beta'' \end{Bmatrix}$$

$$5.\begin{Bmatrix} \overset{1}{\lambda}' & \overset{1}{\lambda}'' \ldots & \overset{2}{\lambda}' & \overset{2}{\lambda}'' \ldots & \varepsilon' & \varepsilon'' \ldots \end{Bmatrix}$$

Hier wird 3. aus 1. durch gewöhnliche Umwendung gebildet, so dass jede senkrechte oder horizontale Reihe von 1. mit einer senkrechten oder horizontalen Reihe von 3. entweder $= 1$, oder $= 0$ giebt, je nachdem die Reihen gleichnamig oder ungleichnamig sind. Aus 2. und 3. wird 4. durch die Gleichungen:

$$\alpha' = \overset{0,2}{a}\overset{0,2}{a}' + \overset{0,2}{b}\overset{0,2}{b}' \ldots \qquad \alpha'' = \overset{0,2}{a}\overset{0,2}{a}'' + \overset{0,2}{b}\overset{0,2}{b}'' \ldots$$

$$\beta' = \overset{0,2}{a}\overset{0,2}{a}_{,} + \overset{0,2}{b}\overset{0,2}{b}'' \ldots \qquad \beta'' = \overset{0,2}{a}\overset{0,2}{a}'' + \overset{0,2}{b}\overset{0,2}{b}'' \ldots$$

In 5. sind λ die gegebenen unausgeglichenen Beobachtungen, ε die Abstände, so dass

$$\varepsilon' = \overset{2}{\lambda}' - \underbrace{a\overset{1}{\lambda}} \qquad \varepsilon'' = \overset{2}{\lambda}'' - \underbrace{\beta\overset{1}{\lambda}} \quad \text{u. s. w.}$$

Für den zweiten Theil der Rechnung, welcher die Gewichte hinzuzieht, ist die Aufstellung:

$$6.\begin{Bmatrix} \overset{1,1}{p}\,\overset{1,1}{p}'' \ldots \overset{2,2}{p}\,\overset{2,2}{p}'' \ldots \pi'\,\pi'' \ldots \varrho'\,\varrho'' \ldots \end{Bmatrix}$$

$$7.\begin{Bmatrix} \underbrace{EE} & \underbrace{EF} \ldots \\ \underbrace{EF} & \underbrace{FF} \ldots \end{Bmatrix} \qquad 8.\begin{Bmatrix} \underbrace{ee} & \underbrace{ef} \ldots \\ \underbrace{ef} & \underbrace{ff} \ldots \end{Bmatrix}$$

$$9.\begin{Bmatrix} \overset{2}{\mathfrak{A}}'\,\overset{2}{\mathfrak{A}}'' \ldots \overset{1}{\mathfrak{A}}'\,\overset{1}{\mathfrak{A}}'' \ldots \overset{2,2}{\mathfrak{k}}'\,\overset{2,2}{\mathfrak{k}}'' \ldots \overset{1,1}{\mathfrak{k}}'\,\overset{1,1}{\mathfrak{k}}'' \ldots \\ \overset{2}{\mathfrak{C}}'\,\overset{2}{\mathfrak{C}}'' \ldots \overset{1}{\mathfrak{C}}'\,\overset{1}{\mathfrak{C}}'' \ldots m'\,m'' \ldots \end{Bmatrix}$$

In 6. sind die Gewichte p, die umgekehrten Gewichte π und ϱ. so dass $1 = \overset{1}{p}\pi = \overset{2}{p}\varrho$

In 7. ist $\underbrace{EE} = \varrho' + \underbrace{\pi\alpha\alpha}$ $\qquad \underbrace{EF} = \underbrace{\pi\alpha\beta}$

$\underbrace{FF} = \varrho'' + \underbrace{\pi\beta\beta}$

Die umgekehrten Gewichte ϱ werden nur in den Quergliedern $\underbrace{EE}$, $\underbrace{FF}$.... hinzugefügt. Die Umwendung von 7. giebt 8. Die Anzahl der Glieder in 7. und 8. ist $= s - r$.

In 9. berechnet man

$$\overset{2}{\mathfrak{K}}' = \underbrace{ee\varepsilon'} + \underbrace{ef\varepsilon''}... \qquad \overset{2}{\mathfrak{K}}'' = \underbrace{ef\varepsilon'} + \underbrace{ff\varepsilon''}....$$

$$\overset{1}{\mathfrak{K}}' = -\alpha'\overset{2}{\mathfrak{K}}' - \beta'\overset{2}{\mathfrak{K}}''.. \qquad \overset{1}{\mathfrak{K}}'' = -\alpha''\overset{2}{\mathfrak{K}}' - \beta''\overset{2}{\mathfrak{K}}''...$$

$$\overset{1}{\mathfrak{k}}' = \pi'\overset{1}{\mathfrak{K}}' \quad \overset{1}{\mathfrak{k}}'' = \pi''\overset{1}{\mathfrak{K}}''... \quad \overset{2}{\mathfrak{k}}' = \varrho'\overset{2}{\mathfrak{K}}' \quad \overset{2}{\mathfrak{k}}'' = \varrho''\overset{2}{\mathfrak{K}}''...$$

$$\overset{1}{\mathfrak{C}} = \overset{1}{\lambda} - \overset{1}{\mathfrak{k}} \quad \overset{2}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\lambda} - \overset{2}{\mathfrak{k}} \quad m' = \overset{0}{a}\underbrace{\overset{1}{\mathfrak{C}}} \quad m'' = \overset{0}{b}\underbrace{\overset{1}{\mathfrak{C}}}..$$

Mit der Berechnung dieser Mittel m ist die Rechnung der Hauptsache nach geschlossen. Zur Prüfung ist

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}' = \alpha\underbrace{\overset{1}{\mathfrak{C}}} \qquad \overset{2}{\mathfrak{C}}'' = \beta\underbrace{\overset{1}{\mathfrak{C}}} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{C}} = \overset{1}{a}m' + \overset{1}{b}m''.. \qquad \overset{2}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{a}m' + \overset{2}{b}m''...$$

Noch sind die mittlern Fehler der Mittel zu bestimmen. Die mittlern Beobachtungsfehler seien d. Mit ihnen wird ganz dieselbe Rechnung durchgeführt wie mit den Beobachtungen λ selbst, von 5. bis 9. Man erlangt dadurch statt der Mittel $m'\ m''$... ihre mittlern Verbindungsfehler $\delta'\ \delta''$..

Um die Ausgleichungsfehler zu erhalten ist noch folgende Aufstellung erforderlich:

$$10.\begin{Bmatrix} s' & s'' \\ t' & t'' \\ \vdots & \end{Bmatrix}.. \qquad 11.\begin{Bmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \\ \vdots & \end{Bmatrix}.. \qquad 12.\begin{Bmatrix} \overset{0}{m}' & \overset{0}{m}'' \\ x' & x'' \\ \vdots & \end{Bmatrix}..$$

$$13.\begin{Bmatrix} \overset{00}{\underbrace{\pi aa}}, & \overset{00}{\underbrace{\pi ab}}, \\ \overset{00}{\underbrace{\pi ab}}, & \overset{00}{\underbrace{\pi bb}}, \\ \vdots & \end{Bmatrix}.. \qquad 14.\begin{Bmatrix} s\underbrace{a} & s\underbrace{b} \\ t\underbrace{a} & t\underbrace{b} \\ \vdots & \end{Bmatrix}.. \qquad 15.\begin{Bmatrix} \underbrace{\mathfrak{AA}} & \underbrace{\mathfrak{AB}} \\ \underbrace{\mathfrak{AB}} & \underbrace{\mathfrak{BB}} \\ \vdots & \end{Bmatrix}..$$

In 10. ist $s' = \underset{\smile}{\pi a \overset{0}{a}}$ $s'' = \underset{\smile}{\pi \beta \overset{0}{a}} \ldots$

$t' = \underset{\smile}{\pi a \overset{0}{b}}$ $s'' = \underset{\smile}{\pi \beta \overset{0}{b}} \ldots$

In 11. ist $\mathfrak{a}' = \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{e}}\, s' + \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}\, s'' \ldots$ $\mathfrak{a}'' = \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}\, s' + \underset{\smile}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}\, s'' \ldots$

$\mathfrak{b}' = \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{e}}\, t' + \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}\, t'' \ldots$ $\mathfrak{b}' = \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}\, t' + \underset{\smile}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}\, t'' \ldots$

In 12. ist $\overset{0}{m}' = \underset{\smile}{\overset{0}{a}\overset{1}{\lambda}}$ $\overset{0}{m}'' = \underset{\smile}{\overset{0}{b}\overset{1}{\lambda}}$

$x' = \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{a}} = \underset{\smile}{s\overset{2}{\mathfrak{K}}}$ $x'' = \underset{\smile}{\mathfrak{e}\mathfrak{b}} = \underset{\smile}{t\overset{2}{\mathfrak{K}}}$

Die Gleichheit der beiden Werthe jedes x gewährt eine Prüfung. Eine weitere Prüfung erhält man durch die Ausdrücke

$$m' = \overset{0}{m}' + x' \qquad m'' = \overset{0}{m}'' + x''$$

und durch die Gleichheit je zweier Seitenglieder in 14. wie $\underset{\smile}{s\mathfrak{b}} = \underset{\smile}{t\mathfrak{a}}$.

In 15. ist $\underset{\smile}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}} = \underset{\smile}{\pi a \overset{00}{a}} - \underset{\smile}{s\mathfrak{a}}$ $\underset{\smile}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \underset{\smile}{\pi b \overset{00}{b}} - \underset{\smile}{t\mathfrak{b}}$

$(\alpha\text{—}\gamma)$ $\mathfrak{f}\mathfrak{f} = \underset{\smile}{\varepsilon\overset{2}{\mathfrak{K}}}$ $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}' = \underset{\smile}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\, \mathfrak{f}\mathfrak{f}$ $\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'' = \underset{\smile}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}\, \mathfrak{f}\mathfrak{f}$

$$\Delta'\Delta' = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}' + \delta'\delta' \qquad \Delta''\Delta'' = \mathfrak{b}''\mathfrak{b}'' + \delta''\delta''$$

Hier ist Δ der vollständige Mittelfehler des Mittels m.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém.* T. I. No. 15.)

$\frac{19}{31}$ December 1851.

Observations de la comète de FAYE, faites a Poulkova, en 1851, par M. OTTO STRUVE.

En général, les observations des comètes n'entrent plus dans le cadre des travaux à exécuter à l'aide du grand réfracteur de Poulkova. Cependant, sur l'invitation de M. Le Verrier, j'ai cru devoir faire une exception de cette règle pour la première réapparition de la comète périodique découverte, en 1843, par M. Faye. Nous nous souvenons avec plaisir que les observations de cette comète, faites en 1844, et continuées, à l'aide de notre grande lunette, deux mois après que tous les autres astronomes avaient cessé de l'observer, ont été de grande utilité à M. Le Verrier pour la déduction exacte des éléments de l'orbite de cet astre. Or, par cette seule raison, il devait être intéressant pour nous de vérifier, après le premier retour de la comète, par nos propres observations, jusqu'à quel point les observations antérieures, entre les mains de M. Le Verrier, avaient suffi à donner des éléments exacts. Nous trouvions d'ailleurs une raison décisive dans les conditions moins favorables pour la visibilité de la comète, dans lesquelles devait se faire, cette année, son retour au périhélie, et qui probablement ne permettaient qu'aux lunettes les plus fortes de la reconnaître. Maintenant que la co-

mète a disparu de nouveau depuis 9 mois, nous voyons qu'en dehors de nos propres mesures, toute la récolte en observations obtenues cette année, ne consiste qu'en 12 positions, en partie très peu exactes, d'après le jugement de M. Challis lui-même, déterminées à l'aide du Northumberland Equatoreal de l'observatoire de Cambridge, en Angleterre, et en deux observations isolées faites en Amérique, par M. Bond, au commencement du mois de janvier. Quoique le nombre d'observations qu'il m'a été possible d'exécuter ne s'élève qu'à dix, nous voyons qu'elles doublent à peu près le nombre des données qui serviront à la correction des éléments. Par cette raison, j'ose leur attribuer un certain degré d'importance, et cela d'autant plus que toutes ces observations jouissent d'un assez haut degré d'exactitude.

La comète fut retrouvée à Cambridge, en Angleterre, le 28 novembre 1850, à l'aide d'une éphéméride calculée par les soins de M. Stratford, superintendant du Nautical Almanac, d'après les éléments fournis par M. Le Verrier. Malheureusement cette éphéméride ne me parvint pas à temps. De plus, la lettre de M. Le Verrier, dans laquelle il m'invitait à faire des observations de la comète, et qui fut accompagnée d'une éphéméride très exacte, n'arriva ici que vers la fin du mois de décembre. C'est ainsi que les mois de novembre et de décembre furent perdus pour les observations de Poulkova. En outre au commencement du mois de janvier l'état de l'atmosphère était ici constamment infavorable aux observations astronomiques ; de sorte que les premières observations que j'ai pu faire datent du 24 janvier. A cette époque le diamètre apparent de la comète soustendait encore un angle de 25″. Quoiqu'alors elle s'éloignât déjà assez rapidement de la Terre, la visibilité n'en souffrait pas beaucoup, parce qu'elle s'approchait encore du Soleil. Mais ce qui rendit les observations de jour en jour plus difficiles, ce fut la circonstance que la durée croissante des jours et le crépuscule ne permirent de commencer les observations de la comète, qui se trouvait très près de l'équateur, que quelques heures après son passage par le méridien c.-à-d. dans une petite élévation au dessus de l'horizon. Pendant les derniers jours d'observation la

durée du temps où il était possible de voir distinctement la comète ne s'éleva qu'à une demi-heure. Ma dernière observation date du 4 mars ; les jours immédiatement suivants, le ciel couvert et le clair de Lune empêchaient les observations, et lorsque la Lune fut suffisamment éloignée, la comète avait entièrement disparu dans les rayons du Soleil.

Les observations de Cambridge ont été continuées également jusqu'au 4 mars ; mais M. Challis ne regarde pas les deux dernières positions du 26 février et du 4 mars comme déterminées avec une exactitude satisfaisante. Aussi la position du 4 mars n'est qu'incomplète. Toutefois, c'est une preuve de la force optique du Northumberland équatoréal, qu'il ait été possible de reconnaître encore la comète à cette époque avancée.

Par rapport à nos observations je n'ai aucune raison de supposer qu'il y ait une différence sensible en exactitude entre les positions obtenues dans le premier temps ou à la fin de la série. Elles ont été déterminées toutes d'après la même méthode, à l'aide de mesures micrométriques de l'angle de position et de la distance entre la comète et de petites étoiles environnantes. Peut-être l'exactitude de quelques positions a été altérée tant soit peu par des circonstances extraordinaires ; on trouvera là dessus des indications dans les notes ajoutées aux observations. En général je dois remarquer que la position de la comète, dans une partie du ciel voisine du pôle de la voie lactée, où la rareté des étoiles ne permit pas de choisir à volonté les étoiles de comparaison, dans des positions favorables pour les jonctions micrométriques, a dû nuire un peu à l'exactitude des résultats.

Je donnerai maintenant en premier lieu les relations moyennes déterminées chaque jour entre la comète et l'étoile correspondante de comparaison. J'ai ajouté à chaque relation le nombre d'observations dont elle a été déduite. Ces relations sont corrigées pour l'effet de la réfraction qui, pour les derniers jours d'observation, a été très considérable à cause de la petite élévation de la comète au dessus de l'horizon. En effet à la fin des observations du 4 mars l'élévation de la comète sur l'horizon était au dessous de 5°.

1851.	Temps sid. de Poulk.	Étoile de compar.	Grandeur de l'étoile.	Distance.	Nombre d'observ.	Angle de position.	Nombre d'observ.	Notes.
Janvier 24	$2^h\ 54^m\ 34^s$	α	(8)	$5'\ 27''{,}00$	12	$270^\circ\ 34'{,}5$	18	Diamètre apparent de la comète = 25″.
Février 1	3 11 35	β	(11)	1 27,05	8	255 2,6	12	L'intensité de la lumière de la comète a augmenté depuis le 24 janvier.
— 4	3 47 21	γ	(8)	2 23,86	12	52 26,7	16	Mesures très exactes.
— 7	4 19 4	δ	(10 . 11)	4 13,80	8	162 21,5	12	La comète extrêmement faible par le clair de Lune.
— 17	4 46 47	ε	(11)	4 5,27	4	144 54,8	8	Le lever de la Lune empêcha la continuation des observations.
— 18	4 48 8	ζ	(11)	1 59,42	11	219 27,5	12	
— 21	5 16 27	η	(10)	2 54,70	12	21 52,3	16	Au commencement des observations la comète était très faible. Plus tard je la vis très bien. Elle avait un diamètre apparent de 20″. Les observations furent troublées par des coups de vent.
— 23	5 22 2	θ	(11 . 12)	2 37,72	4	147 53,0	8	Observations interrompues par des nuages.
Mars 2	6 13 32	λ	(11)	3 15,59	8	285 43,1	12	La comète très bien visible. Mesures exactes.
— 4	6 32 28	μ	(10 . 11)	6 29,20	8	68 43,5	12	Vers la fin des observations la comète fut très faible.

J'ai aussi observé la comète le 1 mars. Mais, vu que ce jour la comète n'était visible qu'à peine et par moments, à cause de brouillards assez forts, et que les étoiles de comparaison se trouvaient à des distances qui égalaient à peu près le diamètre du grossissement le plus faible de notre lunette, j'ai préféré de rejeter entièrement les observations de ce jour.

En partant des observations précédentes, nous avons :

1851.	Temps moy. de Poulk.	AR Com. =	Décl. Com. =
	$^h\ ^m\ ^s$	$^s\ ^{''}$	$^{'}\ ^{''}$
Janvier 24	6 40 57	AR α — 5 27,08	Décl. α + 0 3,28
Février 1	6 26 29	β — 1 24,09	β — 0 22,46
— 4	6 50 21	γ + 2 1,97	γ + 1 33,78
— 7	7 10 11	δ + 1 16,93	δ — 4 1,86
— 17	6 58 30	ε + 2 21,14	ε — 3 20,70
— 18	6 55 55	ζ — 1 16,00	ζ — 1 32.20
— 21	7 12 22	η + 1 5,21	η + 2 42,13
— 23	7 10 4	θ + 1 24,06	θ — 2 13,58
Mars 2	7 33 54	λ — 3 9,00	λ + 0 52,96
— 4	7 44 56	μ + 6 4,47	μ + 2 21,22

A l'exception de α et de γ toutes les étoiles de comparaison étaient trop faibles pour être observées dans la lunette du cercle méridien. Or il fallait déterminer, à l'aide du grand réfracteur, leurs relations par rapport à des étoiles assez brillantes pour être exactement observées à l'aide du cercle méridien. Ce travail, rendu également plus difficile que d'ordinaire, par la rareté des étoiles dans le voisinage du pôle de la voie lactée, fut exécuté dans plusieurs suites d'observations pendant l'automne courant. Les observations corrigées de l'effet de la réfraction, ont donné :

	en AR	en Décl.
	′ ″	′ ″
$\beta = ad\ \beta$	+ 6 24,35	− 4 19,92
$\delta = ad\ \delta$	− 44 31,68	+ 1 14,14
$\varepsilon = ad\ \varepsilon$	− 10 44,43	+ 2 0,53
$\zeta = ad\ \zeta$	+ 10 2,63	+ 0 14,17
$\eta = ad\ \eta$	+ 9 13,63	− 1 57,92
$\theta = ad\ \theta$	− 28 11,85	− 0 22,17
$\lambda = ad\ \lambda$	+ 19 25,06	+ 1 13,44
$\mu = ad\ \mu$	+ 17 30,42	− 8 37,93

La différence en déclinaison entre μ et $ad\,\mu$ était trop forte pour qu'on pût exécuter la comparaison directe des deux étoiles entre elles. Par cette raison je fus obligé de joindre μ en premier lieu avec une autre petite étoile μ' de 10^{me} grandeur. Cette opération donna $AR\,\mu = AR\,\mu' + 20'20''{,}95$, Décl. $\mu =$ Décl. $\mu' - 4'9''{,}72$. La distance entre μ' et $ad\mu$ fut observée $= 5'17''{,}36$ et l'angle de position $= 212°16'$; d'où nous déduisons $AR\,\mu' = AR\,ad\mu - 2'50''{,}53$, Décl. $\mu' =$ Décl. $ad\mu - 4'28''{,}21$. La combinaison de ces valeurs donne la relation entre μ et $ad\mu$ citée dans la liste précédente.

Aussi la détermination, à l'aide du cercle méridien, des positions absolues des étoiles de comparaison ou des étoiles auxquelles les étoiles de comparaison furent rapportées, ne put également se faire avant l'automne. C'est à M. Sabler que nous devons cette détermination. Comme toutes les observations de cet astronome expérimenté, les différentes déterminations de ces étoiles se distinguent par un accord admirable, malgré la faiblesse de quelques étoiles, et contiennent ainsi en elles-mêmes la preuve de leur exactitude. Chaque étoile fut observée trois fois. Après avoir réduit les différentes positions observées aux positions moyennes pour le commencement de l'année, nous avons trouvé :

Il paraît très difficile d'indiquer, à priori, le degré d'exactitude de ces positions, car l'accord des différentes observations du même soir entre elles, n'y peut guère conduire, parce que, dans les objets extrêmement faibles, mais qui possèdent encore un diamètre apparent considérable, on ne peut être sûr d'avoir pointé toujours sur le même endroit de la matière nébuleuse. Approximativement, j'estime l'erreur probable de chaque coordonnée, donnée dans la liste précédente, à environ $2''$. Au moins je suis convaincu que, dès que la comparaison de ces positions avec la théorie mènerait à des différences extraordinaires de plus de $5''$, il y aurait un indice très fort que la position serait affectée d'une erreur réelle. Cette comparaison n'a pu être exécutée ici; car quelque excellente qu'était l'éphéméride de M. Le Verrier pour trouver la comète, elle ne pouvait pas servir à la comparaison de nos observations, vu qu'elle ne s'étendit que jusqu'au 16 février, et qu'elle ne donna pour les ascensions droites que les secondes entières en temps.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 15.)

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

TIRÉS DU

BULLETIN PHYSICO-MATHÉMATIQUE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

Tome I.

5e LIVRAISON.

Avec une planche lithographiée.

(Prix: 40 Cop. arg. — 14 Ngr.)

St.-Pétersbourg,
de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.
1853.

Se vend chez MM. *Eggers* et *Comp.* libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky, No. 1/10, et à Leipzic, chez M. *Léopold Voss.*

CONTENU.

Page.

D. G. Lindhagen. Bericht an den Herrn Director der Hauptsternwarte über die Ergebnisse der im Sommer 1851 in Angelegenheiten der Gradmessung unternommenen Reise nach Lappland.....449

Savitch. Mémoire sur la détermination de l'orbite d'un satellite autour de sa planète. (Extrait.).....477

V. Bouniakowsky. Note sur l'emploi des procédés élémentaires du calcul intégral dans des questions relatives à l'analyse de Diophante.....489

W. Struve. Sur la jonction des opérations astronomico-géodésiques exécutées par ordre des gouvernements russe et autrichien.....502

Lassel. Nouvelles observations de Saturne. Lettre à M. O. Struve. (Avec 1 planche.).....535

Tchebychev. Lettre à M. *Fuss*, sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$.....543

$\frac{12}{24}$ März 1852.

Bericht an den Herrn Director der Hauptsternwarte über die Ergebnisse der im Sommer 1851 in Angelegenheiten der Gradmessung unternommenen Reise nach Lappland; von D. G. LINDHAGEN.

Aus dem Berichte, welchen ich nach meiner Rückkunft von der im Sommer 1850 ausgeführten Expedition nach dem Norwegischen Finnmarken über die Ergebnisse derselben Ihnen vorlegte, geht hervor, dass das der Expedition vorgesteckte Ziel, die Abschliessung der Norwegischen Gradmessungsoperationen, vollständig erreicht ward. Durch ungünstige Witterungsverhältnisse waren aber die für diesen Zweck auszuführenden Arbeiten erst so spät vollendet, dass die dabei benutzten, der Pulkowaer Sternwarte gehörigen, Instrumente nur bis nach Christiania zurückgebracht werden konnten, wo sie für den Winter deponirt werden mussten. Ich habe in demselben Berichte die Zusage erwähnt, welche mir von der Behörde in Christiania über die weitere Beförderung dieser Instrumente gegeben ward, wonach sie im Frühjahr 1851 zu einer von Ihnen näher anzugebenden Zeit, unter der Aufsicht des Herrn Lieutenant Klouman, von Christiania nach Stockholm gesandt werden sollten. — Ungefähr gleichzeitig mit meinem Berichte, welcher, im Auftrage der Kai-

serlichen Academie der Wissenschaften, in deren Bulletin veröffentlicht wurde, erschien im Monatsbericht der Königl. Academie der Wissenschaften in Stockholm ein vom Herrn Professor Selander erstatteter Bericht über den Standpunkt der Schwedischen Gradmessungsoperationen am Schluss des Sommers 1850. Es ist aus diesem Berichte ersichtlich, dass zu der angegebenen Zeitepoche für den Abschluss der Schwedischen Arbeiten nur noch die Messung einer Grundlinie nebst ihrer Verbindung mit einer der Hauptdreiecks-Seiten, und einige der für die Bestimmung der Polhöhe des südlichen Endpunkts des Schwedischen Bogens erforderlichen astronomischen Beobachtungen übrig waren; welche Arbeiten, nach der Ansicht des Berichterstatters, in einem Sommer ausgeführt werden konnten. — Es wären dies also für die Vollendung der Gradmessungsoperationen im hohen Norden überhaupt die einzigen rückstehenden Arbeiten gewesen, wenn es nicht nothwendig erschienen wäre, die Messungen in Finnland und Lappland, die bisher nur einen gemeinschaftlichen Punkt, Tornea, hatten, zu einem ununterbrochenen Dreiecksnetze durch eine gemeinschaftliche Seite zu vereinigen. Ueberdies musste es für zweckmässig erachtet werden die Breitenbestimmung von Tornea, als dem nördlichsten Dreieckspunkte des Finnischen Netzes, russischerseits zu wiederholen, und zwar mit denselben Instrumenten, welche im vorigen Jahre für die Breitenbestimmung von Fuglenaes, dem nördlichen Endpunkte des Norwegischen Bogens, angewandt worden waren. Es lag nun die Ansicht sehr nahe, dass diese letztgenannten Arbeiten am geeignetsten gleichzeitig mit den schwedischerseits in denselben Gegenden noch auszuführenden Operationen vorgenommen werden könnten, und dies um so mehr, als zwischen Ihnen und Herrn Professor Selander die Uebereinkunft getroffen war, dass für die Messung der Schwedischen Grundlinie derselbe Messapparat angewandt werden sollte, mit welchem die Norwegische Grundlinie im vorjährigen Sommer gemessen war, und welcher nebst den astronomischen Instrumenten im Frühjahr von Christiania nach Stockholm gebracht werden würde. Es schien ausserdem, dass die über die Anwendung dieses Apparats schon

gewonnenen Erfahrungen dadurch am besten bei einer neuen Basismessung zu Nutzen kommen würden, wenn jemand, der mit dem Apparate schon vertraut wäre, an der Basismessung in Lappland Theil nähme. In Folge der zwischen den beiden Akademien gepflogenen Verhandlungen, beschlossen Sie den Unterzeichneten im Frühjahr 1851 mit der ersten Dampfschiffsgelegenheit nach Schweden zu delegiren, und zwar in folgenden Aufträgen:

1) die von Christiania erwarteten Instrumente in Empfang zu nehmen, und den Basismessungsapparat zur Disposition der Stockholmer Akademie der Wissenschaften zu stellen,

2) den Schwedischen Herrn Geometern jede gewünschte Erläuterung über diesen Apparat zu ertheilen, und, wenn die Wünsche dieser Herren sich dahin aussprächen, selbst an der Messung der Grundlinie in Lappland Theil zu nehmen,

3) die Möglichkeit der Verbindung des Finnischen und des Schwedischen Dreiecksnetzes näher zu untersuchen, und, wenn möglich befunden, dieselbe auszuführen,

4) in der Gegend von Tornea Polhöhe- und Azimuthbestimmungen mit denselben Instrumenten, welche in Fuglenaes angewandt waren, zu machen.

Als Mitarbeiter ward mir von Seiten der Hauptsternwarte der Herr Candidat Wagner zugeordnet.

Die Vorbereitungen zur Reise wurden diesmal dadurch sehr einfach, dass die Instrumente im vorjährigen Herbst vollkommen wohlerhalten nach Christiania zurückgebracht waren und, wie es mit Zuversicht zu erwarten war, in demselben Zustande den Reisenden in Stockholm überliefert werden würden. In meinem Bericht über die vorjährige Reise habe ich die Hülfsmittel angegeben, mit welchen die Expedition von Pulkowa aus ausgerüstet wurde. Zu diesen wurden jetzt einige kleinere Hülfsinstrumente, welche damals von Christiania aus mitgenommen waren, hinzugefügt. Ausserdem ward uns ein, kurz vor unserer Abreise neu angefertigtes Zelt mitgegeben, welches so eingerichtet ist, dass die astronomischen Beobachtungen an den drei Instrumenten, welche bei Tornea angewandt werden sollten, vom Zelte aus mit Bequemlichkeit angestellt werden konnten. Es war diese Maass-

regel hauptsächlich deswegen getroffen, um bei der Ankunft am Beobachtungsorte gleich fertig zu sein die Beobachtungen anzufangen; wogegen für den Aufbau eines besonderen Gebäudes wohl zwei oder drei Wochen erforderlich gewesen wären um es so einzurichten, dass es die nöthigen Vorrichtungen für die Beobachtungen und den gehörigen Schutz der Instrumente in sich vereinigte. Schliesslich ward ich von Ihnen mit folgender schriftlichen Instruction versehen:

«Der Auftrag, der Ihnen für den Sommer 1851 im Namen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften und von Seiten der Hauptsternwarte hiermit ertheilt wird, und für dessen Ausführung Ihnen Herr Candidat Wagner als Gehülfe zugeordnet ist, besteht in Folgendem:

1) Sie haben auf einem der nördlichsten Punkte der Russischen Dreiecke in der Nähe von Tornea oder Kemi die Beobachtungen der Polhöhe und des Azimuts mit denselben Instrumenten auszuführen, die im vorigen Jahre in Fuglenaes gebraucht sind, und ihren Beobachtungsort mit dem nächsten oder mehrern Dreieckspunkten zu verbinden.

2) Es ist die Verbindung der Russischen Dreiecke mit den Schwedischen zu machen, und zwar entweder unter Mitwirkung der Schwedischen Herrn Geometer, oder, wenn dieses nicht thunlich sein sollte, von Ihrer Seite allein.

3) Sie haben den Basisapparat der Commission der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm zu überliefern, und jede denselben betreffende gewünschte Erläuterung zu geben, und auf den Fall, dass Ihre Mitwirkung bei der Ausführung der Basismessung von Schwedischer Seite gewünscht wird, sich mit Herrn Wagner zur Beihülfe dahin zu begeben, wo dieselbe ausgeführt wird.

4) Sollte es im Interesse der Arbeit nothwendig erfunden werden und es möglich sein, eine besondere Basis in der Nähe von Tornea zu messen, so sind Sie hiedurch mit der Ausführung der Messung beauftragt, und haben sich zu vereinigen, ob dieselbe der Schwedischen Basismessung vorausgehen soll, oder späterhin, nachdem diese vollendet sein wird, unternommen werden muss.»

Am 28sten Mai n. St. fuhren Herr Wagner und ich mit

dem Dampfschiffe »Storfursten« von Kronstadt ab, und langten nach einer viertägigen Reise am 1sten Juni in Stockholm an. Gleich bei der Ankunft erblickten wir am Ufer meinen vorjährigen trefflichen Mitarbeiter, Lieutenant Klouman, welcher vor mehr als einer Woche mit den Instrumenten aus Christiania angekommen war. Ehe er seine Rückreise nach Norwegen antrat, welches schon am 4ten Juni geschah, wurden alle Kasten der Instrumente geöffnet und die Instrumente durchgesehen. Nachdem sie alle vollkommen unbeschädigt und in dem besten Zustande befunden waren, wurden sie mir vom Herrn Lieutenant Klouman gegen Quittung übergeben. Späterhin ward der Basismessungsapparat vom Herrn Professor Selander und seinem Mitarbeiter an der Gradmessung, dem Herrn Marine-Lieutenant Skogman sammt mehreren Mitgliedern der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Augenschein genommen und von dem Erstgenannten empfangen.

Bei den Conferenzen, welche ich während unseres Aufenthalts in Stockholm mit dem Herrn Professor Selander über die Angelegenheit der Gradmessung hatte, wurde mir mitgetheilt, dass das Terrain für die Schwedische Basismessung schon ausgewählt sei, und dass dasselbe in der Nähe von Öfver-Tornea, etwa 70 Werst nördlich von der Stadt Tornea, läge; dass Herr Professor Selander selbst, als Abgeordneter der Akademie der Wissenschaften beim Reichstage, sich genöthigt sähe, seine Reise nach Lappland aufzuschieben, bis der Reichstag seinem Schluss näher gerückt sei; dass er aber die Hoffnung hege, um die Mitte Juli herum die Reise antreten zu können; dass indess sein Mitarbeiter, Lieutenant Skogman, sich mit der ersten Dampfschiffsgelegenheit nach Lappland hinaufbegeben sollte um das Basisterrain vorbereiten zu lassen, die Endpunkte der Basis genau zu bezeichnen und die Operationen zur Verbindung der Basis mit den Hauptdreiecken anzufangen. Aus dem Umstande, dass Herr Professor Selander nicht gleich Anfangs an den Arbeiten Theil nehmen konnte, war es nicht möglich zu festen Beschlüssen in Bezug auf eine erleichternde Gemeinschaftlichkeit bei einigen der Sommerarbeiten zu gelangen. Wie die Zeit-

verhältnisse sich später gestalten würden, war vor der Hand nicht abzusehen. Unter andern musste deswegen auch dahingestellt bleiben, in wie fern der Vorschlag zur Ausführung kommen würde, den ich dem Herrn Prof. Selander machte, die Schwedische Basis zwei Mal zu messen um dadurch ein Urtheil über die Genauigkeit der mit diesem Apparate ausgeführten Messungen zu gewinnen, — eine Prüfung, für deren Ausführung der diesjährige Sommer deswegen recht geeignet erschien, theils weil in der Gegend sich hinreichende Arbeitskräfte befanden, theils weil diese die letzte für die Gradmessung mit diesem Apparate auszuführende Basismessung war. Beschlossen ward indess, dass der Basismessungsapparat gleich vom Herrn Lieutenant Skogman zur See nach Haparanda gebracht, und weiter nach Öfver-Tornea befördert werden sollte, damit unmittelbar nach der Ankunft des Herrn Professor Selander die Basismessung vorgenommen werden könne, und dass Professor Selander die hinreichende Anzahl Böcke für den Apparat in Stockholm verfertigen lassen und auf seiner Reise mitnehmen sollte.

Ehe Herr Wagner und ich Stockholm verliessen, engagirten wir einen Unterofficier, welcher uns als Diener nach dem Lappmarken begleiten sollte. Dies schien uns um so mehr zweckmässig, als die Instrumente, ein Mal unter ihrem Zelte bei Tornea aufgestellt, nachher während der Zeiten, da die Beobachter abwesend sein würden, eine sichere Ueberwachung erheischten, wozu sich an einem fremden, schwach bevölkerten Orte wohl nicht leicht die erforderlich zuverlässige Person finden würde. Endlich, am 15. Juni, mit dem ersten in diesem Jahre von Stockholm nach Haparanda abgehenden Dampfschiffe, Thule, traten wir, in Gesellschaft des Lieutenant Skogman, unsere Reise nach dem Norden an. Nachdem wir während der Fahrt alle längs der Schwedischen Küste zwischen Stockholm und Haparanda gelegenen Städte, bei welchen allen das Dampfschiff anlief, kennen gelernt hatten, langten wir schliesslich am 19ten bei Salmis, dem etwa zehn Werst südlich von Haparanda belegenen Ankerplatze der Dampfschiffe, an. Hier ward sogleich dem Commissionär der Dampfschiffe der Auftrag ertheilt alle unsere mitgebrachten

Instrumente mit einem sicheren Prahm nach Haparanda befördern zu lassen. Selbst machten wir die Fahrt zu Lande, und befanden uns schon am Abend desselben Tages in unserem für den Sommer bleibenden Hauptquartier in Tornea, von wo aus wir nachher, wenn der Gang unserer Geschäfte uns nach andern Gegenden rief, auf längere oder kürzere Zeiten Ausflüge machten. Lieutenant Skogman verliess uns schon nach ein Paar Tagen, um in einer nördlicheren Gegend seine Obliegenheiten zu erfüllen. Nach der getroffenen Uebereinkunft nahm er den Basisapparat mit.

Für die allgemeine Anordnung der Arbeiten, deren Ausführung uns oblag, liess sich vom Anfange an kein bestimmter Plan festsetzen, da alles auf die Basismessung Bezügliche bis zur Ankunft des Herrn Professor Selander dahingestellt bleiben musste. Auch die Frage, welche in der mir von Ihnen zu Theil gewordenen Instruction angeregt worden ist, in wie fern die Messung einer besonderen Basis in der Gegend von Tornea nöthig wäre, konnte erst bei derselben Gelegenheit entschieden werden. Denn, so wie eine gemeinschaftliche Basismessung bei Öfver-Tornea wirklich zu Stande kam, und, wie beabsichtigt war, die Basis mit der Hauptdreiecksseite *Pullingi-Avasaxa* verbunden wurde, schien es überflüssig zur Verstärkung des nördlichsten Theils des Finnischen Netzes noch eine Basis zu messen, da die Schwedische Dreiecksseite *Pullingi-Avasaxa* auf die Finnische *Tornea-Kivalo* durch nur fünf Dreiecke übertragen wird; vorausgesetzt dass die Verbindung des Schwedischen und des Finnischen Netzes unmittelbar ohne Hinzuziehung eines oder mehrerer Hülfspunkte, sich ausführen liess. Was ferner die für diese letztgenannte Verbindung nöthigen Operationen betrifft, so war keine Aussicht vorhanden, dieselben unter Mitwirkung der Schwedischen Herren Geometer vorgenommen zu sehen, da diese durch die ihnen vorliegenden Arbeiten völlig für den Sommer in Anspruch genommen würden. Wir nahmen es also als eine abgemachte Sache an, dass diese Operationen von uns allein ausgeführt werden müssten, und richteten von diesem Gesichtspunkte aus unsere Geschäfte ein. Unser Plan, so gut er sich machen liess, war nun folgender. Zunächst sollten die astro-

nomischen Beobachtungen angefangen werden. Während des Fortganges derselben sollten, je nachdem die Zeit- und Witterungsverhältnisse sich gestalteten, Ausflüge gemacht werden, um die geeignetste Art und Weise die so eben besprochene Verbindung zu Stande zu bringen zu erforschen und die Verbindung auszuführen. Für die Basismessung machten wir uns fürs Erste keine weitere Sorge.

Das erste Geschäft war nun also den Ort aufzusuchen und zu bestimmen, von wo aus die astronomischen Beobachtungen am zweckmässigsten angestellt werden konnten. Dass dieser Ort in der Nähe von Tornea und nicht etwa bei Kemi zu suchen war, ward uns gleich im Anfange klar. Schon der Umstand, dass Tornea als der Endpunkt des Finnischen Bogens angesehen werden muss, war, da hier keine Schwierigkeiten für die Anstellung der Beobachtungen sich zeigten, entscheidend genug. Tornea gewährte ausserdem zwei wesentliche Vortheile: erstens, dass wir eines weiteren Transports der Instrumente enthoben wurden, und zweitens, dass das Unterkommen der Beobachter hier leichter war als irgend wo anders in diesen nördlichen Gegenden. Die Finnische Stadt Tornea liegt auf einer vom Tornea-Fluss gebildeten Halbinsel, welche durch eine schmale Landzunge gegen Nordwesten mit dem Schwedischen Festlande zusammenhängt. Die Schwedische Stadt Haparanda ist am westlichen Ufer des Flusses belegen, und zwar so, dass der nördliche Theil von Haparanda dem südlichsten Theile von Tornea gegenüber liegt. Etwas unterhalb der Stadt Tornea theilt sich der Fluss in zwei Arme und bildet so bei seinem Ausflusse in den Bottnischen Meerbusen ein Deltaland, auf welchem die so genannte Tornea-Landkirche oder die Kirche des grossen Kirchspiels Neder-Tornea liegt. Es ist die Thurmspitze dieser Kirche, welche als der Svanbergsche Dreieckspunkt desselben Namens und als der südlichste Dreieckspunkt der neuesten Schwedischen Messung, eine Rolle in der Geschichte der Gradmessungen gespielt hat und spielen wird. Es ist eine schöne wohlerhaltene Kirche, aus Ziegelsteinen gebaut, welcher letztgenannte Umstand die Ursache ist, dass sie für diesen wissenschaftlichen Zweck der hölzernen Stadtkirche von Tornea vor-

gezogen worden ist. Die Schwedischen Geodäten haben nicht allein bei ihren Winkelbeobachtungen auf benachbarten Dreieckspunkten die Thurmspitze dieser Kirche einvisirt, sondern auch ihre Winkelbeobachtungen bei Tornea vom Thurme aus angestellt, so dass der Thurm der Landkirche im eigentlichen Sinne des Wortes als ihr Dreieckspunkt anzusehen ist. Finnischerseits ist die Landkirche nicht in demselben Sinne als Dreieckspunkt anzusehen, da von ihr aus keine Winkelbeobachtungen angestellt worden sind; sondern als solcher wäre eigentlich der in SO Richtung und in der Entfernung einer Werst von der Landkirche belegene höchste Punkt desselben Sandrückens, auf welchem die Landkirche liegt, zu betrachten. Dieser Dreieckspunkt, *Kokkomäki*, ist auf dieselbe genaue und dauerhafte Weise im Boden bezeichnet wie die übrigen Finnischen Dreieckspunkte, und war früher mit einem Signal versehen, welches von den benachbarten Dreieckspunkten aus beobachtet wurde. Die Landkirche von Tornea ist aber in Bezug auf ihre Lage zu mehreren Finnischen Dreieckspunkten durch Einschnitte von denselben aus so genau bestimmt, dass sie mit der vollkommensten Sicherheit als der Nordpunkt des Finnischen Gradmessungsbogens angesehen werden kann. Wenn dies nicht gewesen wäre, so hätte es unsere Pflicht sein müssen, eine neue geodätische Verbindung der Landkirche mit den Finnischen Dreiecken zu Stande zu bringen, um die stattfindende Lücke zwischen dem Schwedischen und dem Finnischen Netze zu füllen. Obgleich nun zwar keine Nothwendigkeit vorhanden war, so machten wir es uns dennoch zu einer Aufgabe, die erwähnte Verbindung zu wiederholen, da sie ja ohne umständliche und zeitraubende Operationen ausgeführt werden konnte. Es war dies ein Umstand, den wir bei der Auswahl des Ortes für die astronomischen Beobachtungen berücksichtigten, in der Ueberzeugung, dass eine kleine Erweiterung der für die Verbindung dieses Ortes mit der Landkirche ohnehin erforderlichen Operationen leicht zu einer unabhängigen Verbindung der Landkirche mit Kokkomäki Dreieckspunkt, und dadurch zu einer Controlle der Operation führen würde. — Was wir nun bei der Auswahl unseres Beobachtungsortes zu erwägen hatten, war

die Möglichkeit und verhältnissmässige Leichtigkeit einer sicheren Verbindung unseres Beobachtungsortes mit der Landkirche, nebst der Möglichkeit die für diesen Zweck nöthigen Operationen mit Leichtigkeit so auszudehnen, dass die Kenntniss der gegenseitigen Lage von Kokkomäki und der Landkirche erlangt würde; die erforderliche äussere Ruhe und Abwesenheit von Störungen beim Beobachten, und allenfalls auch die Bequemlichkeit der Beobachter, da die Erfahrung genugsam gelehrt hat, in welchem innigen Zusammenhange der Erfolg mit der Bequemlichkeit stehe. Hätte dieser letztgenannte Gesichtspunkt vorzugsweise berücksichtigt werden sollen, so wäre es unzweifelhaft am geeignetsten gewesen unser Beobachtungszelt in Tornea selbst aufzuschlagen, oder auch in Haparanda, wo die Beobachter leicht hätten Quartier bekommen können, und wo schwedischerseits die für die Gradmessung erforderlichen astronomischen Beobachtungen ausgeführt sind. Wir entschlossen uns aber den übrigen Gesichtspunkten einen unbedingten Vorzug zu geben. Auf dem Sandrücken, welcher zwischen der Landkirche und Kokkomäki läuft, und welcher im Anfange, von der Kirche aus, kahl ist, liess sich voraussichtlich mit Leichtigkeit eine kleine Basis messen, und auf der unterhalb des Sandrückens gegen Osten sich ausbreitenden Ebene konnten ein oder mehrere Hülfspunkte nach Belieben gewählt werden. Durch diese und durch die Basis konnte unser auf dem Sandrücken aufgestelltes Zelt leicht und sicher so wohl mit der Landkirche als mit Kokkomäki verbunden werden. Vom Sandrücken aus hat man ausserdem eine freie Aussicht über die ganze Gegend, was uns in so fern vortheilhaft war, weil dadurch die für die Verbindung des Schwedischen und des Finnischen Netzes bei Tornea anzustellenden Winkelmessungen unter unserm Beobachtungszelt gemacht werden konnten. Hier, in einer Entfernung von der Landkirche von etwa 860 Fuss, SSO von derselben, ward das Zelt aufgeschlagen. Theils wegen der jetzt stattfindenden Feiertage, theils wegen eines anhaltenden Regenwetters gingen die Arbeiten für die Einrichtung des Zelts etwas langsam von Statten, und es verstrich eine Woche ehe die astronomischen Instrumente, von Haparanda hinübergebracht,

auf ihre Pfeiler aufgestellt werden und die Beobachtungen anfangen konnten.

In Bezug auf die Anordnung der Beobachtungen kann ich mich hier kurz fassen, da sie ungefähr nach demselben Plan angestellt werden mussten, welchen ich im vorigen Jahre auf Fuglenaes befolgte, und welchen ich in meinem Bericht über die Norwegische Expedition dargelegt habe. Es waren hier, wie in Fuglenaes, Zeit- und Azimutbestimmungen mittelst des Universalinstruments, und Polhöhebestimmung mittelst des Vertikalkreises und des im ersten Vertikal aufgestellten Passageninstruments zu machen. Die Beobachtungen für die Bestimmung der Zeit und des Azimuts wurden vom Herrn Wagner übernommen, und sind auch grösstentheils von ihm ausgeführt. Nur einige Sätze Polarsternsbeobachtungen zur Azimutbestimmung sind von mir beobachtet. Für diese Beobachtungen ward eine Marke auf Kokkomäki unweit des bezeichneten Dreieckspunkts eingerichtet, so dass jedesmal der horizontale Winkelabstand des beobachteten Sterns von der Marke am Horizontalkreise des Instruments gemessen wurde, sei es nun dass dieser Stern ein Zeitstern oder der Polarstern war, welcher allein für die Azimutbestimmung beobachtet wurde. Das Azimut dieser Marke ward auf den östlich von unserem Beobachtungsorte gelegenen Finnischen Dreieckspunkt, *Kivalo*, und auf den nördlich gelegenen Schwedischen Dreieckspunkt, *Kakamavara*, durch Winkelmessungen übertragen. — Von den zwei Chronometern, welche wir mithatten, Kessels 1297 und Dent 1942, blieb das erstere gleich im Anfange bei einem Transport von Tornea nach der Landkirche, vermuthlich durch eine plötzliche Erschütterung, stehen, in welchem Zustande es nachher verblieb. Das andere Chronometer hatte in diesem Sommer einen nicht besonders regelmässigen Gang. Herr Wagner hat aber dadurch, dass er an jedem Beobachtungstage mehrere Mal Zeitbestimmungen gemacht hat, dafür Sorge getragen, dass für unsere Zwecke die absolute Zeit jedesmal mit mehr als hinlänglicher Sicherheit aus seinen Beobachtungen erkannt werden kann.

Die Beobachtungen am Vertikalkreise sind von mir ge-

macht. Auch diesmal wurden Sterne sowohl nördlich als südlich vom Scheitel beobachtet. Ausser dem Polarstern, welcher in beliebigen Stundenwinkeln, aber mit Rücksicht auf eine schliessliche Elimination eines Fehlers in der angenommenen Position des Sterns, beobachtet wurde, sind die andern beobachteten Sterne folgende:

η *Ursae maj.*	mit der Mer.	Zen. Dist.	15°	46′
α *Coronae*	»	»	38	36
α *Lyrae*	»	»	27	11
γ *Aquilae*	»	»	55	34
α *Cygni*	»	»	21	5
α *Ursae maj. s p.*	»	»	51	37

Bei dieser Auswahl von Sternen war meine Absicht folgende:

1) die Beobachtungen von α *Lyrae* und α *Cygni*, deren mittlere Mer. Zen. Distanz 24°8′ ist, sollten südlich vom Scheitel den Beobachtungen des Polarsterns, dessen mittlere Mer. Zen. Distanz 24°10′ nördlich vom Scheitel ist, entsprechen, um dadurch aus dem mittleren Resultate die Biegung des Fernrohrs und eine mögliche Unsicherheit in der Refraction zu eliminiren;

2) η *Ursae maj.* und α *Coronae*, welche in Fuglenaes beobachtet wurden, sollten auch hier mitgenommen werden, um durch ihre Gemeinschaftlichkeit einen speciellen Beitrag zur Bestimmung der Amplitudo zwischen Fuglenaes und Tornea zu liefern;

3) γ *Aquilae* und α *Ursae maj. s. p.*, welche Sterne in nahezu gleich grossen Zenithdistanzen, der eine südlich, der andere nördlich vom Scheitel, in Tornea culminiren, sollten desshalb beobachtet werden, um über den Gang eines möglichen Unterschiedes zwischen den Polhöhebestimmungen durch nördliche und südliche Sterne nach 1) Auskunft zu geben.

Ich füge hier noch hinzu, dass vom Polarsterne über 30 vollständige Beobachtungssätze, jeder aus zwei Einstellungen in jeder der beiden Lagen des Instruments, und von jedem der übrigen Sterne wenigstens 10 solche Sätze erhalten wurden.

Die Beobachtungen am Passageninstrumente im ersten Vertikal zur Bestimmung der Polhöhe wurden ebenfalls von mir

ausgeführt. Für diese Beobachtungen hatte ich mir vier Sterne ausgewählt, bei welcher Auswahl ich besondere Rücksicht auf die Nähe der culminirenden Sterne zum Scheitel nahm. Diese Sterne waren:

	Grösse	Mer. Zen. Dist.	Zeitunterschied zwischen den östl. und westl. Durchg.
α Draconis	3,4	$0^{\circ}\ 46'$	$1^{h}\ 58^{m}$
Anon. Draconis	5	0 21	1 22
π Draconis	5	0 25	1 30
ι Cephei	3,4	0 25	1 29

Der mit *Anon. Draconis* bezeichnete Stern hat folgende mittlere Position für 1851:

$$\alpha = 18^{h}25^{m}5$$
$$\delta = 65^{\circ}29'$$

Von den vier Sternen wurde indess der erste, *α Draconis*, späterhin ausgelassen, weil seine Culminationszeit im Sommer dem Mittage so nahe fiel, dass es mir nicht möglich war ihn im Fernrohr des Passageninstruments zu sehen. Es sind also nur drei Sterne wirklich beobachtet worden. Von jedem dieser Sterne bekam ich schliesslich 8 bis 10 vollständige Beobachtungen, woraus sich ein mehr als genügendes Resultat ergeben wird, da, aus den vorjährigen Beobachtungen zu schliessen, welche unter nicht günstigeren Umständen angestellt wurden, der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen abgeleiteten Zenithdistanz kaum $0''15$ übersteigt.

In Zusammenhange mit den astronomischen Beobachtungen habe ich noch der Verbindung unseres Beobachtungszelts mit der Landkirche zu erwähnen. Diese Verbindung ward in dem oben angegebenen Sinne ausgeführt, so dass vermittelst einer gemessenen Grundlinie und eines kleinen Dreiecksnetzes, für dessen Bildung, ausser der Endpunkte der Grundlinie, nur ein Hülfspunkt nöthig war, das Zelt nicht nur mit der Landkirche sondern auch mit Kokkomäki verbunden wurde. Auch die Thurmspitze der Stadtkirche ward mit in das Netz gezogen. Für die Messung der Grundlinie wurden zwei starke und gerade gehobelte hölzerne Stangen von etwa 22 Fuss Länge angefertigt. Auf jeder Stange wurden zwei Punkte,

nahe an den beiden Enden derselben, bezeichnet, deren Entfernung von einander durch einen Stangencirkel nach dem dem Basisapparate zugehörigen stählernen Maassstabe mehrfach ermittelt wurde. Bei der Messung wurden die Stangen auf Böcke gelegt und zwar unter einer, durch eine Zimmermanns-Wasserwage erkannten, constanten Neigung, welche zuerst näherungsweise durch Versenkung oder Erhöhung der Böcke und nachher scharf, durch zwischen die Stangen und die Böcke eingeschobene Keile hervorgebracht wurde. Da das Terrain dies Verfahren erlaubte, so ward es einer jedesmaligen Bestimmung der beliebigen Neigungen der Stangen vorgezogen, weil uns hierfür ein recht geeignetes Mittel fehlte. Die constante Neigung der Basis ward nachher durch die beobachtete Zenithdistanz des einen Endpunkts von dem andern aus bestimmt. Die Stangen hatten vor dem Gebrauche bei der Messung ein Paar Tage auf den Böcken gelegen, und hatten dadurch eine kleine regelmässige und bleibende Krümmung angenommen. Bei der Messung wurden nun die Unterstützungspunkte der Stangen so gewählt, dass diese schon vorhandene Krümmung durch die durch die Schwere verursachte Durchbiegung aufgehoben wurde, worüber sich nach Augenmass genau urtheilen liess. Zwischen je zwei ausgelegten Stangen ward immer ein Zwischenraum von wenigstens 10 Zoll gelassen, und der Abstand zwischen den auf den Stangen bezeichneten Punkten durch den Stangencirkel auf den Maassstab übertragen. Die Basis fing vom Mittelpunkte des Universalinstruments, wie es bei den astronomischen Beobachtungen auf seinem Pfeiler stand, an, und erstreckte sich gegen die Kirche in einer Länge von 523 Par. Fuss. Sie ward auf vollkommen ähnliche Weise zwei Mal gemessen. Nach einer vorläufigen Berechnung stimmen die beiden Messungen bis auf 3,5 Linien oder auf $^1/_{21000}$ der Länge. Da wir schliesslich bemüht waren, die Winkel in dem kleinen Verbindungsdreiecksnetze mit der gehörigen Sorgfalt zu messen, so bin ich überzeugt, dass wir die Entfernung unseres Beobachtungsortes von der Landkirche bis auf $^1/_2$ Zoll, und die der Kirche von Kokkomäki bis auf wenig mehr als 1 Zoll genau bestimmt haben. Es wurde diese Operation während des

Fortganges der astronomischen Beobachtungen und ohne dieselben zu unterbrechen, ausgeführt. Ich kehre jetzt zu den Beobachtungen zurück um ihren Fortgang im allgemeinen und die äusseren Umstände, unter welchen sie angestellt wurden, kurz zu erwähnen.

Wie schon oben gesagt, war das Beobachtungszelt auf dem Deltalande, welches der Tornea-Fluss vor seinem Ausflusse in den Bottnischen Meerbusen bildet, aufgestellt. Da wir auf der Insel selbst kein Unterkommen finden konnten, sondern während des Fortganges der Beobachtungen unser Quartier in der Stadt beibehalten mussten, so hatten wir jedesmal, wenn wir unsere Sternwarte besuchen sollten, einen bedeutenden Weg zurückzulegen, indem wir erstens über das ziemlich breite Wasser zwischen der Stadt und der Insel mit einem Boot übersetzen mussten, und nachher auf der Insel selbst von der Landungsstelle bis zum Zelt fast eine Werst zu wandern hatten. In so fern hatten wir es hier nicht bequemer, als im vorigen Jahre auf Fuglenaes. Dasselbe Auskunftsmittel, wie damals, um isolirte klare Stunden nicht unbenutzt vorübergehen zu lassen, ward auch hier in Anwendung gebracht: geduldiges Harren auf unserem Posten, wenn nur irgend Aussicht auf Erhaschen einer Beobachtung vorhanden war. Der Tornea Himmel machte uns aber bei weitem nicht so viele Sorgen, wie der graue Himmel, welcher sich über Fuglenaes wölbt, verursacht hatte. Wir hatten im Anfange ein recht vortheilhaftes Beobachtungswetter, und die Beobachtungen gingen auch rasch von Statten, wenn ich die im ersten Vertikal anzustellenden ausnehme. Diese letzten Beobachtungen waren im Hochsommer ungemein schwierig, weil die zu beobachtenden Sterne zu klein waren um in den hellen Nächten durch das Fernrohr gesehen werden zu können, wenn nicht die Luft vollkommen rein und durchsichtig war. Die Beobachtungen an den andern Instrumenten waren schon beinahe in gewünschter Anzahl gewonnen, von den beabsichtigten Beobachtungen am Passageinstrumente aber nur sehr wenige erhalten, als wir, um die Mitte Juli, uns entschlossen, die astronomischen Beobachtungen für eine Zeit zu unterbrechen und die für die Verknüpfung des Schwedischen

und des Finnischen Netzes uns obliegenden Operationen vorzunehmen. Wir thaten dies jetzt, theils weil eine für die astronomischen Beobachtungen ungünstigere Witterung, welche von anhaltender Natur zu sein schien, eingetreten war, theils weil es uns am geeignetsten schien, für die Beobachtungen am Passageinstrumente die vortheilhafteren längeren Herbstnächte abzuwarten. Die Unterbrechung der astronomischen Beobachtungen dauerte im ganzen fünf Wochen, wenn ich einige wenige Beobachtungen ausnehme, welche in der Zwischenzeit von ein Paar Tagen zwischen zwei auf einander folgenden, für die Verbindungsoperationen vorgenommenen Ausflügen erhalten wurden. Diese Zeit ward nicht allein auf die ebengedachten Operationen sondern auch auf die Basismessung bei Öfver-Tornea, welche, wie ich später berichten werde, sich den Verbindungsarbeiten eingreiffend anschloss, verwandt. Ich werde im Folgenden zunächst über die Verbindungsoperationen, und darnach über die Basismessung Bericht abstatten, und zuletzt der Abschliessung der astronomischen Beobachtungen Erwähnung thun.

Die in jeder Hinsicht vortheilhafteste Art, das Schwedische Dreiecksnetz mit dem Finnischen in Verbindung zu setzen, an welche desswegen allererst gedacht wurde, war unzweifelhaft die, allein durch schon vorhandene Schwedische und Finnische Dreieckspunkte, ohne Anwendung von Hülfspunkten, die Vereinigung zu Stande zu bringen. Die schon früher erwähnten Dreieckspunkte *Kakamavara* und *Kiwalo*, deren Azimute durch unsere Beobachtungen bestimmt worden, eigneten sich ganz besonders dazu, im Vereine mit dem gemeinschaftlich Schwedischen und Finnischen Dreieckspunkte *Tornea* ein Dreieck zu bilden, durch welches die beiden Netze auf eine unmittelbare Weise verknüpft würden. Der Finnische Dreieckspunkt *Kiwalo* liegt in einer Entfernung von etwa 20000 Toisen (36 Werst) fast gerade östlich, und der Schwedische Dreieckspunkt *Kakamavara* in der Entfernung von etwa 18000 Toisen (33 Werst) fast gerade nördlich von *Tornea*. Zwischen diesen drei Punkten bildet sich ein nahezu rechtwinklichtes Dreieck, dessen Katheten beinahe gleich lang sind, also ein für den Zweck vortheilhaft gestaltetes Dreieck. Ein anderes

eben so zweckmässiges Dreieck wird von den drei Punkten *Kiwalo*, *Kakamavara* und *Kokkomäki* gebildet, und es konnte fast gleichgültig sein, welches von den beiden gewählt wurde. Um eine Controlle zu erhalten, und um die Sicherheit der Verbindung zu steigern, beschlossen wir, wie übrigens die Verbindung zu Stande kommen würde, auf jeden Fall nicht nur die Landkirche von *Tornea*, sondern auch *Kokkomäki* mit in die Operationen hineinzuziehen. Es ward zu dem Ende auf Kokkomäki, wo das Signal der früheren Operationen spurlos verschwunden war, ein neues Signal unweit des im Boden bleibend bezeichneten Dreieckspunkts, mit welchem es späterhin scharf verbunden wurde, errichtet.

Die Frage war nun zunächst die, ob zwischen den gedachten Punkten freie Visirlinien vorhanden waren, so dass die Winkel in den beabsichtigten Dreiecken wirklich gemessen werden konnten. Dass von *Tornea* und *Kokkomäki* aus sowohl *Kiwalo* als *Kakamavara* sichtbar waren, war uns schon bekannt. Auf *Kakamavara* war das Schwedische Signal unbeschädigt stehen geblieben, und wir konnten vom Beobachtungszelte durch die Fernröhre unserer Instrumente dasselbe deutlich erkennen. In wie fern auf *Kiwalo* das alte Signal erhalten war, konnten wir von Tornea aus nicht mit derselben Sicherheit entscheiden. Der Berg selbst war nicht zu verfehlen, aber wir vermutheten, welche Vermuthung sich auch später als richtig erwies, dass die Ursache der schwierigen Erkenntniss des dasigen Signals von Tornea aus darin lag; dass dasselbe mit der Zeit ausgeblichen, möglicherweise auch etwas zerfallen und dadurch entstellt worden war. Es blieb demnach nur zu entscheiden übrig, ob zwischen Kakamavara und Kiwalo die Visirlinie frei war, was nur von einem dieser Punkte selbst aus mit Gewissheit zu bewerkstelligen war. Ich machte mich daher, begleitet von einem Dolmetscher, am 19. Juli auf den Weg nach Kakamavara, als dem zugänglicheren der beiden fraglichen Punkte. Nachdem ich, auf den Berg angekommen, mich überzeugt hatte, dass der Berg Kiwalo von hier aus gut zu sehen ist, und nachdem ich, um die Sichtbarkeit des hiesigen Signals zu steigern, die Streben desselben mit Brettern beschlagen und das ganze Signal schwarz hatte

anstreichen lassen, trat ich meine Rückwanderung an, und traf am Abend des folgenden Tages wieder in Tornea ein. Es war also nach diesem Besuche auf Kakamavara kein Zweifel mehr, dass die unmittelbare Verbindung der beiden Dreiecksnetze durch die schon vorhandenen Dreieckspunkte, Tornea, Kokkomäki, Kakamavara und Kiwalo ausführbar war. Eine andere bei demselben Besuche gewonnene Erfahrung machte uns aber anfänglich einige Sorge. Der etwa acht Werst lange Fusssteig, welcher von der Stelle an, wo man die Landstrasse verlässt, oder vom Karungi-Pfarrhofe an, nach Kakamavara führt, ist schon für Wanderer ohne Last sehr beschwerlich, da er zum grossen Theil über Sümpfe geht, die von beiden Seiten der ausgelegten unbehauenen Bäume, welche den Steig bilden, den unsicher Einherschreitenden bei dem geringsten Fehltritt zu verschlingen drohen. Nach den unvollständigen Nachrichten, welche wir in Tornea über den Weg nach Kiwalo uns zu verschaffen im Stande waren, sollte im Vergleich mit demselben der Weg nach Kakamavara als bequem anzusehen sein; und in der That war diese Behauptung nur zu wahr, wie wir später selbst Gelegenheit hatten zu erfahren. Unsere Besorgniss galt nun den Transport unseres etwas schwerfälligen Universalinstruments, das für die Winkelmessung auf beide Punkte gebracht werden musste. Die Schwedischen Geodäten hatten sich mit einem bei solchen schwierigen Fällen ganz besonders geeigneten Instrumente versehen, welches so aus einander zu nehmen war, dass es in zwei kleine Kasten, deren jeder von einem Mann auf dem Rücken mit Leichtigkeit getragen wurde, verpackt werden konnte. Zum Tragen jedes der beiden Kasten, worin das von uns mitgebrachte Instrument sich befindet, sind zwei Personen unerlässlich nöthig, was bei Bergersteigungen und überhaupt beim Transport durch die engen Passagen so wilder Gegenden ungemein hinderlich ist. Indess war die hieraus hervorgehende Schwierigkeit nicht unüberwindlich, und wir gingen frischen Muthes ans Werk. — Der nächste Besuch galt nun *Kiwalo*, wo Winkelmessungen angestellt werden sollten, und wo das Signal wieder hergestellt werden musste, um von Tornea und Kakamavara aus beobachtet werden zu können. Den Un-

terofficier für das Ueberwachen der andern Instrumente und für das Aufziehen der Chronometer zurücklassend, begaben wir, Herr Wagner und ich, das Universalinstrument mitnehmend und von einem Dolmetscher begleitet, uns am 23. Juli auf den Weg nach Kemi, wo wir am selben Abend anlangten. Hier wurden neun Mann zum Tragen der Instrumentkasten und anderer während der Reise nöthigen Sachen gemiethet, und das erforderliche Material für die Herstellung des Signals auf Kiwalo angeschafft. Von Kemi, welchen Ort wir am 24sten verliessen, verfolgten wir in Böten, nachdem wir über den Kemi-Fluss gefahren, den in denselben sich ergiessenden Akkorus etwa 15 Werst weit. Von da an verliessen wir den Fluss und mit demselben alle menschlichen Wohnungen und alle betretenen Wege und Steige. Durch fast lauter Sumpf und Morast, wobei es vorkam bis über die Kniee in Wasser oder Schlamm zu waten, hatten wir noch etwa zehn Werst zurückzulegen. Am 25sten des Nachmittags erreichten wir endlich den ersehnten Berg, das Ziel unserer mühsamen Wanderung. In der sanguinischen Hoffnung an demselben Tage die Winkelmessungen abmachen und am folgenden Tage nach vollendeten übrigen Geschäften die Rückwanderung antreten zu können, stellten wir das Instrument gleich nach unserer Ankunft auf. Die von der Hoffnung belebte Einbildung und das Fernrohr zeigten aber nicht dieselben Bilder. Es ergab sich nämlich, dass die Luft zu undurchsichtig war, um bei den grossen Entfernungen die zu beobachtenden Signale scharf genug sehen zu können. Da wir uns nicht mit einem Zelt versehen hatten, unter dem wir während der Reise die Nächte hätten zubringen können, und da wir nach unserer Ankunft auf Kiwalo uns nicht Zeit gegeben hatten, an sonstige Vorkehrungen für die nächtliche Ruhe zu denken, so musste die erste Nacht unter offenem Himmel zugebracht werden. Auf dem Felsen ward ein Feuer aufgemacht, rings um welches herum wir uns alle lagerten, jeder sich aus den Trümmern des Felsens ein Kopfkissen auswählend. Am folgenden Tage wurden wir von einem in unserer Lage sehr unwillkommenen Gast, von einem den ganzen Tag anhaltenden Regen heimgesucht. Wir nahmen nun unsere Zuflucht zu einer in dem

Felsen befindlichen Höhle; aber was wir von oben vermieden, das ward uns hier von unten reichlich zu Theil. Zuletzt wurde eine Hütte gebaut, in der wir den nöthigen Schutz und eine, wie es uns damals schien, sybaritische Bequemlichkeit fanden. Am 27sten des Nachmittags war die Luft sehr durchsichtig, so wie die Bilder ruhig und scharf, und wir zauderten nicht die kurze Zeit, während welcher dieser günstige Zustand der Luft dauerte, für die Winkelmessungen zu benutzen. An demselben Abend erhielten wir auch von den von hier aus zu beobachtenden Gegenständen, den Signalen auf Kokkomäki und Kakamavara und dem Thurme der Tornea-Landkirche, eine für den Zweck hinlängliche Anzahl Einstellungen. — Die alte Bezeichnung des Dreieckspunktes auf dem Felsen war vollkommen unbeschädigt erhalten, so dass die Richtigkeit der Centrirung unseres Instruments so wie der des Signals keinem Zweifel unterworfen sein konnte. Das frühere Signal existirte noch, war aber etwas baufällig geworden, und musste ausserdem einer für den neuen Zweck nöthigen Abänderung unterworfen werden. Der über die Streben etwa drittehalb Fuss hervorragende Visirbalken hatte nämlich einen Durchmesser von nur vier Zoll, und konnte desshalb in den beträchtlichen Entfernungen unseres Dreiecks (die längste Seite ist etwa 26000 Toisen oder 47 Werst) schwerlich durch das Fernrohr des Universalinstruments sichtbar sein. Das Signal wurde nun wieder in den Stand gesetzt und mit einer schwarzgestrichenen, etwa vier Fuss hohen und drittehalb Fuss breiten Signaltafel versehen, so dass hierdurch die Auffassung des Signals auch bei der grössten vorkommenden Entfernung leicht sein musste. Zuletzt ward die bezügliche Lage der Signaltafel zum Dreieckspunkte genau ausgemittelt. Nach so vollendeten Geschäften traten wir am Morgen des 28sten unsere Rückwanderung an, und trafen in der folgenden Nacht glücklich wieder in Tornea ein. Nach der Rückkunft wurden sogleich Vorkehrungen für die Reise nach *Kakamavara* getroffen, und unsere Abfahrt war schon zum 1sten August angesetzt; als wir am Abend vorher auf das angenehmste vom Herrn Professor Selander überrascht wurden, welcher an demselben Tage angekommen war, und uns jetzt aufforderte, mit hinauf

nach Öfver-Tornea zu gehen, um an der sogleich zu beginnenden Basismessung Theil zu nehmen. Wir nahmen keinen Anstand dem geäusserten Wunsch des Herrn Selander nachzukommen, und machten daher sogleich die schon getroffenen Vorkehrungen für den Besuch auf Kakamavara rückgängig. Es schien uns indess geeignet auf der Reise nach Öfver-Tornea das Universalinstrument mitzunehmen und dasselbe in Karungi zu deponiren, um auf der Rückreise nach vollendeter Basismessung sofort den erforderlichen Abstecher nach Kakamavara machen zu können und die dort zu besorgenden Geschäfte auszuführen. Um alles auf die hier verhandelten Verbindungsoperationen Bezügliche in einem Zusammenhange darzustellen, muss ich in der Zeitfolge einen Sprung machen, und hier erwähnen, dass der beabsichtigte Besuch auf Kakamavara wirklich zu Stande kam, dass die Winkelmessungen daselbst am 24sten August bei vortheilhafter Luft ausgeführt wurden, und dass später durch Winkelmessungen sowohl vom Beobachtungszelt in Tornea als von Kokkomäki aus die Verbindungsoperationen vollendet wurden. Auf Kakamavara war, wie schon oben erwähnt, das von den Schwedischen Geodäten für ihre Operationen errichtete Signal stehen geblieben. Der Dreieckspunkt ist sonst nicht auf bleibende Weise bezeichnet; aber es war kein Grund vorhanden zu befürchten, dass das Signal seit den früheren Winkelmessungen irgend eine Verrückung erlitten hatte, und dass dadurch eine Unsicherheit in Bezug auf die Identität des von uns angenommenen und des ursprünglich fixirten Dreieckspunkts obwalte. Das Signal ist sehr einfach construirt, und besteht aus einem durch Streben gestützten starken Baum, welcher oben auf der Spitze einen wohlbefestigten Zober (Halbtonne) trägt. Die Projection der senkrechten Axe des Zobers auf dem Felsen ist, nach Herrn Selander's Angabe, ursprünglich als Stations-Centrum angesehen, und ward auch von uns als solcher angenommen. Von Kakamavara aus ward das Signal auf Kiwalo und die Thurmspitze der Landkirche von Tornea beobachtet. Es war ursprünglich unsere Absicht von hier aus auch das Signal auf Kokkomäki einzuvisiren; aber gegen unsere Erwartung war dasselbe nicht zu sehen,

weil es sich gegen die Baumspitzen eines hinterliegenden Waldes projicirte. In dem supplementären Dreiecke *Kakamavara-Kiwalo-Kokkomäki* sind also nur zwei Winkel beobachtet worden, nämlich die Winkel auf Kiwalo und Kokkomäki. Auf dem letztgenannten Punkte, Kokkomäki ward der fragliche Winkel am 11ten September gemessen. Vom Zelte aus wurden die Winkelbeobachtungen gelegentlich, wenn der Zustand der Luft günstig war, zu verschiedenen Tagen angestellt. Ich halte die oben beschriebene Verbindung des Zelts mit der Landkirche für scharf genug, um daraus die Reduction des im Zelte gemessenen Winkels auf die Kirche mit völliger Sicherheit ableiten zu können. Ich sehe mich also schliesslich befugt als hauptsächliches Resultat der hier in Frage stehenden Operationen angeben zu können, dass in dem Dreiecke *Kiwalo-Kakamavara-Tornea*, durch welches die Verknüpfung des Schwedischen und des Finnischen Netzes unmittelbar geschieht, die drei Winkel mit einer, wie es mir scheint, hinreichenden Genauigkeit gemessen worden sind. Nach diesen anticipirten Erwähnungen nehme ich jetzt den verlassenen Faden der Zeitfolge nach wieder auf.

Um uns nach dem Orte zu begeben, wo die Schwedische Grundlinie gemessen werden sollte, verliessen Herr Wagner und ich am 1sten August Tornea. Voraussichtlich musste unsere Abwesenheit von Tornea wenigstens drei Wochen dauern. Nichts desto weniger wurden die Instrumente, mit Ausnahme des Universalinstruments, auf ihren Pfeilern unter dem Zelte gelassen, theils weil es in der Nachbarschaft an einer geeigneten Stelle sie aufzubewahren fehlte, theils weil doch das Zelt allein für sich eine Ueberwachung erheischte, wollten wir es gegen leicht mögliche Angriffe sicher stellen. Das Zelt gänzlich abzunehmen schien uns nicht rathsam, weil sein Wiederaufstellen nach der Rückkehr uns zu viel Zeit gekostet hätte. Der Unterofficier ward desshalb beauftragt, während unserer Abwesenheit seine Wohnung im Zelt zu nehmen, und dasselbe keinen Augenblick zu verlassen ohne eine andre zuverlässige Wache aufzustellen. Das Universalinstrument nahmen wir mit. Wir verfolgten die längs dem östlichen Ufer des Tornea-Flusses gehende Landstrasse bis Karungi, wo

das Instrument deponirt wurde. Hier setzten wir über den Fluss, und trafen am selben Abend bei der Schwedischen Poststation Frankila ein, wo Herr Professor Selander, welcher der westlichen Strasse gefolgt war, uns erwartete. Von Frankila setzten wir die Reise gemeinschaftlich fort, und langten am folgenden Nachmittage in der Poststation Matarengi bei Öfver-Tornea an. Hier fanden wir Lieutenant Skogman vor, ebenso wie den Basisapparat, welchen Herr Skogman glücklich hieher gebracht hatte.

Das von den Schwedischen Herren Geodäten ausgewählte und durch Lieutenant Skogman's Fürsorge bei unserer Ankunft schon vorbereitete Terrain für die Basismessung ist auf Finnischem Gebiete, der Schwedischen Kirche von Öfver-Tornea gegenüber belegen. Es ist von dem seit Maupertuis Zeit oft genannten Berge Avasaxa in kürzester Linie nur etwa eine Werst entfernt, folgt dem östlichen Ufer des Tornea-Flusses, und erstreckt sich, in der Richtung von NNW nach SSO, zwischen den Bauerhöfen *Iwari* und *Keskirahta*. Die Endpunkte der Grundlinie waren ungefähr auf dieselbe Weise bezeichnet, wie im vorigen Jahre in Norwegen und wie ich in meinem vorjährigen Berichte beschrieben habe. Der einzige Unterschied war der, dass die in die Erde versenkten Steinblöcke sowohl als die in diese eingegossenen Bolzen hier nicht über dem Boden hervorragten. Unsere Arbeiten fingen unmittelbar nach der Ankunft an. Am 3ten und 4ten August wurden die Messstangen mit der Normalstange verglichen, und die Nivellirungstische der Messstangen in Bezug auf ihren Parallelismus mit den Hauptaxen der Stangen untersucht. Diese vorbereitenden Arbeiten wurden in einer grossen Stube auf der Schwedischen Poststation Matarengi ausgeführt. Nach Vollendung derselben wurden die Messstangen über den Fluss und nach dem nördlichen Endpunkte der Basis gebracht, von wo die Messung ausgehen sollte. Ausser der Mannschaft, welche zum Transportiren der Stangen und der Böcke verwandt wurden, waren im Anfange die Herren Selander, Skogman, Wagner und ich bei der Messung beschäftigt. Die Geschäfte vertheilten wir unter uns so, dass Herr Wagner mit einem Theodoliten die Stangen in die Richtung

der Basis einvisirte, Professor Selander und Lieutenant Skogman das Richten der Stangen ausführte, während es meine Obliegenheit war, die Wasserwage jedesmal umzusetzen und dieselbe zum Einspielen zu bringen. Endlich wurden von Professor Selander und mir alle Ablesungen besorgt und in doppelte Journäle, welche für jede Stange verglichen wurden, eingetragen. Lieutenant Skogman, von der Königl. Schwedischen Regierung beordert an einer, zum Theil für wissenschaftliche Zwecke angeordneten Weltumsegelung Theil zu nehmen, sah sich genöthigt, seine Rückreise nach Stockholm anzutreten, ehe die erste Messung der Basis noch viel weiter als bis zur Hälfte vorgerückt war. Nach seiner Abreise besorgten Professor Selander und ich allein das Einrichten der Stangen und die Ablesungen. Die Natur des Terrains machte bei der Messung hier und da einige Schwierigkeiten. Der Boden war im Allgemeinen sehr fest; aber hin und wieder kamen sumpfige Stellen vor, an welchen es nur dadurch möglich war die ausgelegten Stangen vor Schwankungen zu sichern, dass unter den Füssen der Böcke, auf welchen die Stangen ruhten, starke hölzerne Pfähle in den Grund eingerammt wurden. Durch dieses Mittel, was wohl etwas zeitraubend war, erhielten indess die Stangen eine hinlänglich feste Grundlage, um über die Sicherheit der Messung keinen Zweifel zuzulassen. Am 5ten August um 6 Uhr des Nachmittags wurde die erste Stange von dem nördlichen Endpunkte der Basis ausgelegt, und am 12ten wurde mit der 760sten Stange der südliche Endpunkt so nahe erreicht, dass nur ein kleines Stück von etwa 6 Zoll abzumessen übrig war. Die Stangen wurden an demselben Abend nach dem nördlichen Endpunkte zurückgebracht. Am folgenden Tage fing die zweite Messung der Grundlinie an, und wurde in 7 Tagen vollendet, so dass wir am Abend des 19ten August den südlichen Endpunkt wieder erreichten, und an demselben Abend mit dem ganzen Messapparate nach Matarengi hinüberziehen konnten. Hier wurden in den folgenden zwei Tagen die Messstangen mit der Normalstange wieder verglichen und ihre Nivellirungstische von neuem untersucht. Die mittlere Temperatur der Vergleichungen war vor der Messung

18°,45 C., nach der Messung + 14°,09 C., im Mittel also + 16°,27 C., oder der Normaltemperatur des Pulkowaer Normalmaasses, + 13° R., fast genau gleich. Die mittlere Temperatur der ersten Messung der Basis war + 14°,65 C., die der zweiten + 14°,30 C., also für das Mittel der beiden Messungen + 14°,47 C., oder 1°,78 C. niedriger als die Normaltemperatur des so eben erwähnten Normalmaasses Da jede Messstange 2 Toisen lang ist, so wird die Länge der gemessenen Grundlinie nahezu 1520 Toisen sein. Die Berechnungen der beiden Messungen nach dem von mir geführten Journal liegen schon ausgeführt vor, und ich bin also im Stande angeben zu können, dass die beiden Messungen bis auf 2,34 Pariser Linien, oder bis auf $^1/_{561000}$ der ganzen Länge übereinstimmen. Diese Angabe ist indess nicht als definitiv anzusehen, und wird leicht eine kleine Modification erleiden können, theils durch das, möglicherweise um eine Kleinigkeit abweichende Resultat der Berechnung nach dem von Herrn Professor Selander geführten Tagebuche, theils durch eine genauere Bestimmung der absoluten Ausdehnung der Messstangen, für welche der Baily'sche Ausdehnungscoefficient des Eisens, 0,0000126 für 1° C., bei der Berechnung angewandt worden ist. Nachdem alle auf die Basismessung bezüglichen Geschäfte vollbracht waren, brachen Herr Wagner und ich von Öfver-Tornea auf. Herr Professor Selander blieb in dieser Gegend zurück um die von Lieutenant Skogman angefangenen Operationen für die Verbindung der Grundlinie mit einer der Schwedischen Hauptdreiecksseiten zu vollenden. Der Basisapparat verblieb unter Professor Selander's Obhut und wurde mir erst nach meiner Rückkunft nach Stockholm wieder abgegeben.

Unsere Rückreise von Matarengi antretend, setzten Herr Wagner und ich am Nachmittage des 21sten August über den Tornea-Fluss zu der Finnischen Poststation Jurva, und langten, der östlichen Landstrasse folgend, am 22sten in Karungi an. Von hier aus wurde der schon oben erwähnte Abstecher nach Kakamavara, welcher drei Tage dauerte, gemacht. Am 26sten trafen wir wieder in Tornea ein.

Während unseres ferneren Aufenthalts in Tornea wurden

werden sollte als auf Packgut jeglicher Art. Nach mehrfachen Berathungen mit den in Stockholm befindlichen Russischen Auctoritäten entschlossen wir uns also, selbst die Instrumente auf einem Segelschiffe zu begleiten. Es war aber in der späten Jahreszeit nicht ganz leicht unter mässigen Bedingungen ein passendes Schiff zu finden. Ein solches bot sich indess endlich dar, und nun liess ich die Instrumente alle, sowohl die astronomischen Instrumente als den Basisapparat, verassecuriren. Nachdem alle Apparate auf dem Schiffe sorgfältig untergebracht waren, ward am 16ten October das Anker gelichtet. Der Wind verblieb uns in den folgenden Tagen günstig, wenn auch etwas gewaltsam, und nach einem frischen Segeln gingen wir schon am 19ten October vor Anker auf der Rhede von Kronstadt. Durch das stürmische Wetter, welches das Expediren des Schiffs von Seiten der Zollbehörden verhinderte, wurden wir hier zwei Tage aufgehalten, und kamen erst am 21sten ans Land in Kronstadt. Am folgenden Tage trafen wir, nach einer Abwesenheit von beinahe 5 Monaten, wieder in Pulkowa ein. Einige Tage später langten auch die Instrumente wohlbehalten auf der Hauptsternwarte an.

Pulkowa, den $\frac{31}{19}$ December 1851.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. X. No.* 16. 17.)

$\frac{28\text{ Mai}}{9\text{ Juin}}$ 1852.

Mémoire sur la détermination de l'orbite d'un satellite autour de sa planète; par le Prof. SAWITSCH. (Extrait.)

§. 1. Si la masse de la planète est inconnue, en admettant que le satellite décrit une ellipse, on aura sept éléments à trouver pour déterminer l'orbite; il n'y aura que cinq en la supposant circulaire. Dans ce dernier cas trois observations, dont une pourrait être incomplète, suffisent, en général, pour la recherche des éléments.

Quand il y a beaucoup d'observations, on peut faire plusieurs combinaisons particulières pour obtenir facilement et avec sûreté les éléments, comme on l'a toujours et avec raison pratiqué. Mais il peut aussi se présenter des cas où l'on demande l'orbite par trois observations seulement: alors la méthode générale est indispensable. Nous nous proposons d'exposer ici les règles simples et commodes pour résoudre la question ainsi posée. Soient:

t, t', t'' les époques de la 1re, de la 2de et de la 3me observations, exprimées en temps moyen; $t''-t$ n'étant seulement que de quelques jours.

Δ, Δ', Δ'' les distances angulaires géocentriques ou apparentes du satellite à sa planète.

Q, Q', Q'' les angles de position, comptés du nord à l'orient, à partir du cercle de latitude passant par la planète.

1847. Sept.

Date.	Temps moyen de Poulkova.	Dist. ang.	Angles de Pos. comptés du cerc. de lat.	j.
25 à	$10^h21'=t$	$15''{,}92=\Delta$	$228°45'=Q$	$t'-t=3{,}075$
28 à	$12^h\ 9'=t'$	$17''{,}30=\Delta'$	$57°43'=Q'$	$t''-t'=1{,}894$
30 à	$9^h36'=t''$	$5''{,}07=\Delta''$	$164°51'=Q''$	$t''-t=4{,}969$

Date.	Longitudes géocentriques de Neptune	Latitudes	Log. (Dist. lin. δ ♆)
t ...	$328°7'{,}9=l$ ...	$-0°36'3''=b$	log. $R=1{,}46450$
t' ...	$328°4'{,}0=l'$ ...	$-0°36'2''\frac{1}{2}=b'$	log. $R'=1{,}46505$
t'' ...	$328°1'{,}6=l''$ ...	$-0°36'1''\frac{5}{4}=b''$	log. $R''=1{,}46540$

On voit du premier abord que la période τ de la révolution doit être plus grande que 5 jours, car dans l'intervalle de 4,969 jours, l'angle de position, Q'', ne reprend pas encore de beaucoup sa première valeur Q. Ainsi l'on pourra commencer les essais en prenant $\tau=5{,}5$ et $\tau=6$ jours. Dans la première hypothèse, on trouve pour $\frac{\sin(u''-u)}{\sin(u''-u')}$ une valeur qui est numériquement beaucoup trop petite en comparaison de N calculé sur la formule (α); la seconde hypothèse donne déjà une valeur numérique trop grande. Essayons à présent $\tau=5{,}7$ et $\tau=5{,}8$ jours.

1) ... $\tau=5{,}7$

$u'-u=194°13'$, $u''-u'=119°37'$,

$u''-u=313°50'$.

$$\log\frac{\sin(u'-u)}{\sin(u''-u')}=\log N'=9{,}45101\ n$$

$$\frac{R\,.\,\Delta\,.\sin Q}{R'\Delta'\sin Q'}\ \ldots\ldots\ldots\ldots=-0{,}8174\ \ldots\ldots$$

$$N'\,.\,\frac{R''\Delta''\sin Q''}{R'\Delta'\sin Q'}\ \ldots\ldots\ldots\ldots=-0{,}0256\ \ldots\ldots$$

Somme ... $N=-0{,}8430$

$\log N=9{,}92538\ n.$

$$\log\frac{\sin(u''-u)}{\sin(u''-u')}=9{,}91895\ n.$$

Différence ... $+0{,}00643$

2) . . . $\tau = 5{,}8$

$u' - u = 190^0 51'$, $u'' - u' = 117^0 33'$,
$u'' - u = 308^0 51'$
$\log N' = 9{,}32698\ n.$

$$\frac{R \cdot \Delta \cdot \sin Q}{R'\Delta' \sin Q'} \ldots\ldots = -0{,}8174$$

$$N' \cdot \frac{R''\Delta'' \sin Q''}{R'\Delta' \sin Q'} \ldots\ldots = -0{,}0192$$

$$N = -0{,}8366$$

$$\log N = 9{,}92252\ n.$$

$$\log \frac{\sin(u'' - u)}{\sin(u'' - u')} \ldots\ldots = 9{,}94642\ n.$$

Différence ..... $= -0{,}02390$

Ainsi la première hypothèse ($\tau = 5{,}7$) est en défaut de $+0{,}00643$ et la seconde ($\tau = 5{,}8$) de $-0{,}02390$; par les parties proportionnelles on trouve $\tau = 5{,}72$. Répétant les calculs dans cette dernière hypothèse ($\tau = 5{,}72$), on obtient qu'elle n'est en défaut que de $+0{,}00113$; donc la valeur de τ doit être à peu-près égale à 5,724 jours. Ce nombre s'accorde assez bien avec le résultat définitif ($= 5{,}876$ j.) tiré de la totalité de 18 observations, faites par M. O. Struve dans les années 1847, 1848 et 1849.

§ 3. Calcul de l'angle ϱ sous lequel apparaît le rayon linéaire de l'orbite à la distance moyenne A de la planète au soleil.

Dès que l'on a trouvé τ, on obtiendra ϱ de la manière suivante: soit $u' - u = W$; avec la valeur connue de $W = \frac{360^0}{\tau}(t' - t)$, on déterminera les valeur M^2 et K^2 par les formules

$$M^2 = \frac{R^2 \cdot R'^2}{A^4} \cdot \frac{\Delta^2 \Delta'^2 \cdot \sin^2(Q' - Q)}{\sin^2 W},$$

$$K^2 = \left(\frac{R}{A} \cdot \frac{\Delta}{\sin W}\right)^2 + \left(\frac{R'\Delta'}{A \sin W}\right)^2$$

$$-2\left(\frac{R.R'.\Delta.\Delta'}{A^2\sin^2 W}\right)\cos(Q'-Q)\cos W;$$

alors on aura

$$\varrho = \sqrt{\left(\frac{K^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K^4}{4} - M^2\right)}\right)}.$$

Pour choisir le signe (+ ou —) sous le radical, on remarquera que ϱ doit être plus grand que ne le sont

$$\frac{R}{A}.\Delta,\ \frac{R'}{A}.\Delta \text{ et } \frac{R''}{A}\Delta''.$$

De la même manière on obtiendrait ϱ par la combinaison de la 1re et la 3me, ou de la 2me et la 3me observations.

Dans notre exemple

$$\log A = 1{,}47765;\ u'-u = W = 193°22';\ Q'-Q' = 188°58'$$

$$\frac{K^2}{2} \ldots\ldots = 206{,}3 \qquad \frac{K^4}{4} \ldots\ldots = 42560$$

$$\sqrt{\left(\frac{K^4}{4} - M^2\right)} = 109{,}2 \qquad M^2 = 30624$$

$$\text{Somme} = 315{,}5 \qquad \frac{K^4}{4} - M^2 = 11936$$

$$\varrho = \sqrt{(315{,}5)} = 17'',762.$$

M. A. Struve a trouvé $\varrho = 17{,}969$ par la totalité de 18 observations.

§ 4. Calcul des longitudes λ, λ', λ'' et des latitudes θ, θ', θ'' planétocentriques du satellite, ainsi que de l'inclinaison i et de la longitude Ω du noeud ascendant de son orbite.

Soient:

$$\frac{R\delta}{A\sin 1''} \| \xi,\ \frac{R'\delta'}{A\sin 1''} = \xi',\ \frac{R''\delta''}{A\sin 1''} = \xi'';$$

on a

$$\xi = \pm\sqrt{\left[\varrho^2 - \left(\frac{R}{A}\Delta\right)^2\right]};\ \xi' = \pm\sqrt{\left[\varrho^2 - \left(\frac{R'\Delta'}{A}\right)^2\right]};$$

$$\xi'' = \pm\sqrt{\left[\varrho^2 - \left(\frac{R''\Delta''}{A}\right)^2\right]}.$$

Ayant obtenu ξ, ξ', ξ'', on trouvera λ et θ par les équations:

$$\operatorname{tang}(\lambda - l) = \frac{\frac{R\Delta}{A} \cdot \sin Q}{\xi \cos b - \frac{R}{A} \Delta \,.\, \cos Q \,.\, \cos b},$$

$$\sin \theta = \frac{\xi}{\rho} \sin b + \frac{R}{A} \cdot \frac{\Delta}{\rho} \cos Q \,.\, \cos b,$$

λ' et θ', λ'' et θ'' se détermineront de la même manière au moyen de l', b', Δ', Q', ξ' et l'', b'', Δ'', Q'', ξ''. Après cela, on aura i et Ω par les formules:

$$\sin\left(\frac{\lambda' + \lambda}{2} - \Omega\right) \cdot \operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2} (\operatorname{tg} \theta' + \operatorname{tg} \theta) \sec \tfrac{1}{2} (\lambda' - \lambda)$$

$$\cos\left(\frac{\lambda' + \lambda}{2} - \Omega\right) \cdot \operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2} (\operatorname{tg} \theta' - \operatorname{tg} \theta) \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} (\lambda' - \lambda);$$

on peut aussi trouver Ω et i par la combinaison de λ'' et θ'' avec λ et θ, ou avec λ' et θ'.

En supposant que le mouvement vrai du satellite autour de la planète est direct, c.-à-d. s'effectuant de l'Ouest à l'Est, ξ sera positif dans la partie de l'orbite où le mouvement géocentrique apparent du satellite par rapport à sa planète est direct, et ξ sera négatif quand le satellite se dirige de l'orient en occident. Si l'on prend faussement les signes des ξ, ξ', ξ'' on trouvera $\lambda' - \lambda$, ou $\lambda'' - \lambda'$, plus grand pour un intervalle du temps plus petit, et aussi la détermination de Ω par λ, λ', θ et θ' sera en désaccord avec la détermination de Ω par λ' λ'' θ' et θ''.

Dans notre exemple:

$$\xi = -8''{,}771, \quad \xi' = +5''{,}748, \quad \xi'' = -17''{,}065;$$
$$\lambda = 200^\circ 39', \quad \lambda' = 35^\circ 37', \quad \lambda'' = 143^\circ 38';$$
$$\theta = -34^\circ 37', \quad \theta' = +30^\circ 8', \quad \theta'' = -14^\circ 56'.$$

La combinaison de λ et θ avec λ' et θ' donne

$$\Omega = 264^\circ 46' \quad i = 37^\circ 35',$$

» » de λ' et θ' » λ'' et θ'' donne

$$\Omega = 296^\circ 36' \quad i = 30^\circ 28'.$$

La différence de ces deux déterminations de Ω et de i, quoique assez grande, ne dépend pas du calcul, mais provient de petites erreurs auxquelles sont sujettes les meilleures observations et qui peuvent avoir une influence notable sur Ω et i selon les lieux qu'occupait le satellite pendant les observations. Les signes de ξ, ξ', ξ'' ont été convenablement choisis, car si on les prenait contrairement, on obtiendrait une discordance encore plus grande et l'on aurait $\lambda' - \lambda = 164°57'$ pour l'intervalle de 3,075 jours et $\lambda'' - \lambda' = 288°0'$ pour l'intervalle de 1,894 j. seulement.

Au reste, la combinaison de λ,θ avec λ',θ' est peu favorable pour bien déterminer Ω, car le satellite était, dans ces deux positions, à peu près à $-90°$ et $+90°$ du noeud. Pour la recherche de i, nos deux combinaisons sont à peu-près également bonnes; mais comme lors de la 3me observation, le satellite n'était qu'à 20° ou 30° du noeud, la combinaison de la 2de observation avec la 3me sera la plus avantageuse pour trouver Ω. On peut donc admettre

$$\Omega = 296° \text{ et } i = 34°$$

comme le résultat des trois observations du 25, 28 et 30 septembre 1847. L'inclinaison de l'orbite de Neptune sur le plan de l'écliptique étant $1°47'$ et la longitude de son noeud ascendant $130°7'$; nous trouvons que

l'inclinaison de l'orbite du satellite sur l'orbite de Neptune est ..... $35°44'$
la longitude de son noeud ascendant ..... $296°37'$.

§ 5. Calcul de u_0 ou de l'argument de latitude pour un temps déterminé T.

Nous avons

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} (\lambda \quad \Omega) \sec i,$$

au moyen de cette formule et admettant

$$\Omega = 296° \text{ et } i = 34°,$$

nous trouvons pour

25 sept. à $10^h21'$ t. m. l'arg. de lat. $u = 265°34'$
28 » » $12^h\ 9'$ » » » » » $u' = 98°\ 0'$
30 » » $9^h36'$ » » » » » $u'' = 212°16'$

Faisans $\tau = 5{,}724$ j. et $T = t' = 28$ sept. 1847, à $12^h9'$ t m. de Poulkova, on trouve, en terme moyen, $u_0 = u' = 96°17'$.

§ 6. Vérification.

La sûreté de tous les éléments ainsi trouvés, abstraction faite de la bonté des observations, dépend de la précision de la valeur τ admise pour base des calculs; or, ayant obtenu les arguments de latitude u, u', u'', l'on verra facilement si les différences $u' - u$, $u'' - u'$, $u'' - u$ et les intervalles du temps $t' - t$, $t'' - t'$, $t'' - t$ s'accordent bien avec la valeur τ préalablement déterminée § 2; car nommant μ le mouvement diurne moyen en longitude, on doit avoir

$$\mu = \frac{u' - u}{t' - t}, \text{ ou } = \frac{u'' - u'}{t'' - t'}, \text{ ou } = \frac{u'' - u}{t'' - t} \text{ et } \tau = \frac{360°}{\mu};$$

cette détermination de τ sera toujours plus exacte que la valeur de τ obtenue par le § 2. Si l'accord n'est pas satisfaisant. on répétera les calculs, après quoi on pourra presque toujours parvenir aux résultats définitifs par les parties proportionelles. Dans notre exemple, nous avons par le § 2, $\tau = 5{,}724$ jours, et par le § 5

$u' - u = 192°26'$ pour l'interval de 3,075 j. ..... $\mu = 62°64$
$u'' = u = 306°42'$ » » » 4,969 » ..... $\mu = 61,72$
$u'' = u' = 114°16'$ » » » 1,894 » ..... $\mu = 60,35$

Valeur probable de $\mu = 61°72$; $\tau = 5{,}83$ jours.

Avec cette valeur de μ on trouve par la combinaison

de la 1ère et la 2de obs. ..... $\varrho = 20''40$
» » 2 » » 3 » ..... $\varrho = 18{,}27$
» » 1 » » 3 » ..... $\varrho = 18{,}03$.

Comme l'incertitude de la détermination de ϱ est d'autant plus grande, que $\sin(u' - u)$ est plus petit, on aura la valeur probable de ϱ

$$= \frac{20{,}40 \sin (u' - u) + 18''{,}27 \sin (u'' - u') + 18{,}03 \sin (u'' - u)}{\sin (u' - u) + \sin (u'' - u) + \sin (u'' - u')}.$$

$$= 18''{,}35.$$

Il serait inutile de calculer i et Ω de nouveau; l'incertitude restera à peu-près la même.

§ 7. Détermination des éléments elliptiques, quand il y a un grand nombre d'observations.

Les éléments circulaires déterminés par trois observations seulement seront rarement assez exacts pour qu'on puisse procéder à la recherche des éléments elliptiques. Il sera toujours avantageux de les corriger préalablement par des combinaisons convenables de plusieurs observations. Avec ces éléments corrigés on calculera les distances angulaires ou apparentes Δ_1 et les angles de position Q_1 pour l'époque t de chaque observation; voici les équations qui servent à calculer Δ_1 et Q_1:

$$u = u_0 + \mu (t - T)$$

$$\text{tang} (\lambda - \Omega) = \text{tang}\, u \,.\, \cos i, \quad \sin \theta = \sin u \sin i$$

$$\varrho \,[\sin \theta \cos b - \cos \theta \sin b \,.\, \cos (\lambda - l)] = \frac{R}{\Delta} \,.\, \Delta_1 \,.\, \cos Q_1$$

$$\varrho \,.\, \cos \theta \,.\, \sin (\lambda - l) = \frac{R}{\Delta} \,.\, \Delta_1 \,.\, \sin Q_1.$$

Les différences entre les Δ_1, Q_1 calculés et leurs valeurs Δ, Q observées serviront à corriger les éléments admis et à déterminer l'excentricité e de l'orbite et la longitude π du péri-planète. En formant les équations de condition nous négligerons les puissances de e supérieures à la première.

Soient:

$\varepsilon = u_0 + \Omega$ la long. moyenne du satellite sur son orbite qui correspond à un temps déterminé T;

$$\frac{e \sin \pi}{\sin 1^0} = \eta; \quad \frac{e \cos \pi}{\sin 1^0} = \psi;$$

a l'angle sous lequel apparaît le demi-grand axe de l'orbite du satellite à la distance moyenne A de la planète au soleil.

$\alpha = \varepsilon + \mu \,.\, (t - T)$ la long. moyenne du satellite à une époque donnée t.

$da = a - \varrho$ la correction de l'angle ϱ, considéré comme appartenant au demi-grand axe.

$d\mu$, $d\varepsilon$, di, $d\Omega$ les corrections (additives) des valeurs admises de μ, ε, i et Ω.

$dQ = Q - Q_1$; $d\Delta = \Delta - \Delta_1$ les différences entre l'observation et le calcul.

On cherchera premièrement les quantités et les angles auxiliaires suivants:

$$\cos\theta \cos b + \sin\theta \sin b \,.\, \cos(\lambda - l) = \beta \cos k$$
$$\sin\theta \sin(\lambda - l) = \beta \sin k$$
$$\cos(\lambda - l) = \gamma \cos m$$
$$\sin b \,.\, \sin(\lambda - l) = \gamma \sin m;$$

$$\varrho \,.\, \frac{A}{R} \,.\, \beta \,.\, \cos(Q_1 + k) \,.\, \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} u} = \mathfrak{A};$$

$$\varrho \,.\, \frac{A}{R} \,.\, \gamma \,.\, \cos\theta \sin(Q_1 + m) \frac{\sin 2(\lambda - \Omega)}{\sin 2u} = \mathfrak{B};$$

$$\varrho \,.\, \frac{A}{R}\, \gamma \,.\, \cos\theta \sin(Q_1 + m) = \mathfrak{C};$$

$$\frac{\varrho}{\Delta} \,.\, \frac{A}{R} \,.\, \beta \,.\, \sin(Q_1 + k) \,.\, \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} u} = \mathfrak{A}';$$

$$\frac{\varrho}{\Delta} \,.\, \frac{A}{R} \,.\, \gamma \,.\, \cos\theta \cos(Q_1 + m) = F;$$

$$\frac{F}{\Delta} \,.\, \frac{\sin 2(\lambda - \Omega)}{\sin 2u} = \mathfrak{B}'.$$

Nous aurons alors:

$$\frac{\Delta}{\varrho} \,.\, da + [-\Delta \cos\alpha + 2(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \sin\alpha] \sin 1^0 \,.\, \psi$$
$$- [\Delta \sin\alpha + 2(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cos\alpha] \sin 1^0 \,.\, \eta$$
$$+ (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \sin 1^0 \,.\, d\varepsilon + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(t - T) \sin 1^0 \,.\, d\mu$$

$$+ (\mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \sin 1^0 \,.\, d\Omega$$

$$+ [\mathfrak{A} \,.\, \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} i} - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{C} \sin 2(\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i] \sin 1^0 \, di$$

$$= d\Delta;$$

$$- 2 \sin \alpha \,(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}') \,.\, \psi - 2 \cos \alpha \,(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}') \,.\, \eta$$

$$- (\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}') \, d\varepsilon$$

$$- (\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}') \,.\, (t - T) \,.\, d\mu + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}' + F) \, d\Omega$$

$$- [\mathfrak{A}' \,.\, \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} i} + \tfrac{1}{2}\, F \,.\, \sin 2(\lambda - \Omega) \operatorname{tg} i] \,.\, di$$

$$= dQ.$$

da et $d\Delta$ sont ici exprimés en secondes; $d\mu$, $d\varepsilon$, di, $d\Omega$, ψ et η en degrés.

Chaque observation complète conduit à deux équations semblables; pour diminuer autant que possible l'influence des erreurs d'observation, on déterminera les inconnues en appliquant la méthode des moindres carrés; ayant obtenu ψ et η, on aura:

$$\text{l'excentricité } e = \sin 1^0 \, V(\psi^2 + \eta^2);$$

$$\frac{\eta}{\psi} = \operatorname{tg} \pi,$$

π étant la longitude du péri-planète.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém.* T. X. No. 23.)

$\frac{15}{27}$ Octobre 1852.

NOTE SUR L'EMPLOI DES PROCÉDÉS ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL INTÉGRAL DANS DES QUESTIONS RELATIVES À L'ANALYSE DE DIOPHANTE.

PAR M. V. BOUNIAKOWSKY.

Nous nous proposons de montrer dans cette Note l'usage que l'on peut faire des diverses méthodes d'intégration, et particulièrement de celle de l'intégration par parties, dans la résolution de différents problèmes concernant l'Analyse indéterminée.

Supposons que l'on veuille appliquer le procédé de l'*intégration par parties* à la fonction $\varphi(x).\psi(x)\,dx$, et admettons, dans ce qui va suivre, que l'intégrale indéfinie

$$\int \varphi(x).\psi(x)\,dx$$

puisse s'obtenir en termes finis. Pour trouver cette intégrale, on pourra procéder de deux manières différentes en observant qu'on peut faire porter l'intégration soit sur la fonction $\varphi(x)$, soit sur $\psi(x)$. Ainsi, si l'on pose

$$\int \varphi(x)dx = P_1, \quad \int P_1 dx = P_2, \quad \int P_2 dx = P_3 \ldots.$$

et

$$\int \psi(x)dx = Q_1, \quad \int Q_1 dx = Q_2, \quad \int Q_2 dx = Q_3 \ldots.$$

on aura les deux formules

$$\int \varphi(x) . \psi(x) dx = P_1\psi(x) - P_2\psi'(x) + P_3\psi''(x) - \ldots + Const.$$
$$\int \varphi(x) . \psi(x) dx = Q_1\varphi(x) - Q_2\varphi'(x) + Q_3\varphi''(x) - \ldots + Const.$$

qui conduisent immédiatement à l'identité

$$[P_1\psi(x) - P_2\psi'(x) + P_3\psi''(x) - \ldots] - [Q_1\varphi(x) - Q_2\varphi'(x) + Q_3\varphi''(x) - \ldots] = C, \qquad (1)$$

C désignant une quantité constante que l'on détermine facilement dans chaque cas particulier. Or, il pourra arriver que le premier membre de cette équation, quoiqu'identiquement égal à la constante C, affectera des formes, plus ou moins remarquables, suivant le choix que l'on aura fait des deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. De cette manière l'identité (1) fournira, dans beaucoup de cas, la solution de questions relatives à l'Analyse indéterminée, comme nous le ferons voir plus bas. Pour le moment, nous nous bornerons à considérer quelques cas dans l'hypothèse particulière que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont toutes deux entières.

Si, dans l'intégrale

$$\int (ax + b)(a'x + b')\, dx,$$

on fait porter l'intégration par parties d'abord sur le facteur $ax + b$, on trouve

$$\int (ax + b)(a'x + b')\, dx = \frac{(ax+b)^2 (a'x+b')}{2a} - \frac{a'(ax+b)^3}{2 . 3a^2}.$$

Faisant ensuite porter l'intégration sur l'autre facteur $a'x + b'$, l'on obtient

$$\int (ax + b)(a'x + b')\, dx = \frac{(a'x+b')^2 (ax+b)}{2a'} - \frac{a(a'x+b')^3}{2 . 3a'^2}.$$

Les deux résultats que nous venons d'obtenir ne peuvent différer entr'eux que d'une quantité constante. En formant donc leur différence, que l'on multipliera par $2 . 3a^2a'^2$ pour se débarasser des dénominateurs, on trouvera

$$[3a^2a' (ax + b) - a^3 (a'x + b')] (a'x + b')^2 - [3aa'^2 (a'x + b') - a'^3 (ax + b)] (ax + b)^2 = C, \qquad (2)$$

C étant la constante. Pour la déterminer observons que, puisque x est arbitraire, on peut poser

$$a'x + b' = o, \text{ d'où } x = -\frac{b'}{a'},$$

et par suite

$$ax + b = \frac{a'b - ab'}{a'};$$

donc

$$C = (a'b - ab')^2.$$

Supposons enfin $x = o$ dans l'équation (2); en y mettant pour C la valeur que l'on vient de trouver, on obtient

$$(3a^2a'b - a^3b')\,b'^2 - (3aa'^2b' - a'^3b)\,b^2 = (a'b - ab')^3. \quad (3)$$

Il est facile de voir que cette identité résout la question suivante : *la solution de l'équation indéterminée du premier degré*

$$bx - b'y = 1 \quad (4)$$

étant donnée, trouver celle de l'équation

$$b^2X - b'^2Y = 1. \quad (5)$$

En effet, si l'on pose

$$x = a', \quad y = a,$$

l'équation (3) se réduira à

$$(3a^2a'b - a^3b')\,b'^2 - (3aa'^2b' - a'^3b)\,b^2 = 1,$$

ou bien encore à

$$b^2(b'^2 - 3aa'^2b' + a'^3b) - b'^2(b^2 - 3a^2a'b + a^3b') = 1;$$

l'on aura par conséquent

$$X = b'^2 - 3aa'^2b' + a'^3b, \quad Y = b^2 - 3a^2a'b + a^3b'. \quad (6)$$

Soit X_0 le résidu minimum de X par rapport au module b'^2, et Y_0 le résidu minimum de Y suivant le module b^2; X_0 et Y_0 désigneront les plus petites solutions de l'équation (5).

Exemple. La solution la plus simple de l'équation

$$7x - 5y = 1$$

étant

$$x = 3, \quad y = 4,$$

trouver celle de l'équation

$$7^2 . X - 5^2 . Y = 1.$$

On a par hypothèse

$$b = 7, \quad b' = 5, \quad a' = 3, \quad a = 4.$$

Les formules (6) donneront

$$X = -326 \text{ et } Y = -639,$$

et par suite

$$X_0 \equiv -326 \equiv -1 \equiv 24 \text{ (mod. } 5^2)$$
$$Y_0 \equiv -639 \equiv -2 \equiv 47 \text{ (mod. } 7^2).$$

En effet, on aura

$$49 . 24 - 25 . 47 = 1.$$

Ce que nous venons de faire pour les *carrés* des coefficients de l'équation indéterminée (4) pourra être étendu à des *puissances quelconques* de ces mêmes coefficients. Ainsi, pour résoudre l'équation

$$b^3 X - b'^3 Y = 1, \tag{7}$$

nous appliquerons le procédé de l'intégration par parties à la différentielle

$$(ax + b)^2 (a'x + b')^2 dx$$

en faisant porter l'intégration d'abord sur l'un des deux facteurs $(ax + b)^2$, $(a'x + b')^2$, et ensuite sur l'autre. De cette manière on trouvera, en omettant les constantes,

$$\int (ax + b)^2 (a'x + b')^2 dx =$$
$$\frac{(ax+b)^3 (a'x+b')^2}{3a} - \frac{2a'(ax+b)^4 (a'x+b')}{3 . 4a^2} + \frac{2a'^2 (ax+b)^5}{3 . 4 . 5a^3},$$

$$\int (ax + b)^2 (a'x + b')^2 dx =$$
$$\frac{(a'x+b')^3 (ax+b)^2}{3a'} - \frac{2a(a'x+b')^4 (ax+b)}{3 . 4a'^2} + \frac{2a^2 (a'x+b')^5}{3 . 4 . 5a'^3}.$$

Comme ces deux expressions ne peuvent différer entr'elles que d'une constante, on aura, en multipliant leur différence par le produit $3 . 4 . 5a^3a'^3$, l'équation suivante:

$$a^3[2.5a'^2(ax+b)^2-5aa'(ax+b)(a'x+b')+a^2(a'x+b')^2](a'x+b')^3$$
$$-a'^3[2.5a^2(a'x+b')^2-5aa'(ax+b)(a'x+b')+a'^2(ax+b)^2](ax+b)^3$$
$$=C. \quad (8)$$

Or, x étant arbitraire, on pourra faire $a'x+b'=o$, ce qui donnera

$$ax+b=\frac{ba'-b'a}{a'}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente on trouvera

$$C=-(ba'-b'a)^5.$$

Faisant actuellement $x=o$ dans (8), on a

$$a^3[2.5a'^2b^2-5aa'bb'+a^2b'^2]b'^3-a'^3[2.5a^2b'^2-5aa'bb'+a'^2b^2]b^3$$
$$=-(ba'-b'a)^5.$$

Si l'on suppose, comme dans le cas précédent, $ba'-b'a=1$, on obtient définitivement

$$a'^3(2.5a^2b'^2-5aa'bb'+a'^2b^2)b^3-a^3(2.5a'^2b^2-5aa'bb'+a^2b'^2)b'^3=1.$$

Cette dernière formule fournit évidemment la solution suivante de l'équation (7):

$$X=a'^3(2.5a^2b'^2-5aa'bb'+a'^2b^2)$$
$$Y=a^3(2.5a'^2b^2-5aa'bb'+a^2b'^2).$$

Les plus petites valeurs de X et Y que nous désignerons par X_0 et Y_0 s'obtiendront en prenant le résidu minimum de X par rapport au module b'^3, et celui de Y relativement au module b^3.

Appliquons ces formules à la résolution de l'équation

$$7^3.X-5^3.Y=1.$$

On aura, comme plus haut,

$$b=7, \quad b'=5, \quad a'=3, \quad a=4.$$

Donc

$$X=63207, \qquad Y=173440,$$

et par suite

$$X_0 \equiv 63207 \equiv 82 \pmod{5^3}$$
$$Y_0 \equiv 173440 \equiv 225 \pmod{7^3}.$$

En effet, l'on a

$$7^3 . 82 - 5^3 . 225 = 1.$$

Proposons nous encore de résoudre l'équation

$$b^2X - b'^2Y = 1. \qquad (9)$$

A cet effet nous déterminerons l'intégrale

$$\int (ax + b)(a'x + b')^2 dx$$

en faisant porter l'intégration d'abord sur le facteur $ax + b$, et puis sur $(a'x + b')^2$; de cette manière nous arriverons aux deux résultats suivants:

$$\int (ax + b)(a'x + b')^2 dx =$$
$$(ax + b)^2 \left[\frac{(a'x + b')^2}{2a} - \frac{a'(ax + b)(a'x + b')}{3a^2} + \frac{a'^2(ax + b)^2}{3.4a^3} \right]$$
$$\int (ax + b)(a'x + b')^2 dx = (a'x + b')^3 \left[\frac{ax + b}{3a'} - \frac{a(a'x + b')}{3.4a'^2} \right].$$

La différence de ces deux expressions, multipliée par $3 . 4a^3a'^2$, sera une constante, que l'on trouvera égale à $(ba' - b'a)^4$. Posant de plus $ba' - b'a = 1$, et $x = o$, on obtiendra définitivement

$$(2 . 3a^2a'^2b'^2 - 4aa'^3bb' + a'^4b^2) b^2 - (4a^3a'b - a^4b') b'^2 = 1;$$

par conséquent, la solution de l'équation (9) sera donnée par les formules

$$X = 2 . 3a^2a'^2b'^2 - 4aa'^3bb' + a'^4b^2$$
$$Y = 4a^3a'b - a^4b'.$$

Ainsi, s'il s'agissait de résoudre l'équation

$$7^2 . X - 5^2 . Y = 1,$$

on aurait, comme plus haut,

$$b = 7, \quad b' = 5, \quad a' = 3, \quad a = 4,$$

et l'on trouverait

$$X = 10449, \quad Y = 4096.$$

Quant à la solution la plus simple de l'équation proposée, elle sera

$$X_0 \equiv 10449 \equiv 74 \pmod{5^3}$$
$$Y_0 \equiv 4096 \equiv 29 \pmod{7^2};$$

et en effet, il est facile de vérifier que l'on a

$$7^2 . 74 - 5^3 . 29 = 1.$$

L'analyse dont nous venons de faire usage pour la résolution des trois équations indéterminées

$$b^2X - b'^2Y = 1$$
$$b^3X - b'^3Y = 1$$
$$b^2X - b'^3Y = 1,$$

peut évidemment être étendue à l'équation générale

$$b^mX - b'^nY = 1,$$

lorsque la solution de l'équation

$$bx - b'y = 1$$

sera connue. A cet effet, en supposant $x = a'$, $y = a$, on devra chercher l'intégrale

$$\int (ax + b)^{m-1} (a'x + b')^{n-1} dx$$

en faisant porter l'intégration d'abord sur l'un des deux facteurs $(ax + b)^{m-1}$, $(a'x + b')^{n-1}$, et ensuite sur l'autre. Ainsi, pour passer de la solution de l'équation indéterminée du premier degré

$$bx - b'y = 1$$

à celle de l'équation

$$b^mX - b'^nY = 1,$$

on n'aura pas besoin de réduire en fraction continue le rapport $\frac{b^m}{b'^n}$.

Passons actuellement à quelques autres applications des méthodes d'intégration à l'Analyse de Diophante.

Considérons la formule très simple

$$\int (ax+b)\,dx+\int (a'x+b')\,dx=\int [(a+a')x+b+b']\,dx;$$

elle donnera évidemment

$$\frac{(ax+b)^2}{2a}+\frac{(a'x+b')^2}{2a'}=\frac{[(a+a')x+b+b']^2}{2(a+a')}+\text{Const.},$$

ou bien

$$a'(a+a')(ax+b)^2+a(a+a')(a'x+b')^2=aa'[(a+a')x+b+b']^2+C.$$

Si l'on pose $x=o$, on obtient

$$C=(ba'-b'a)^2,$$

et par conséquent

$$a'(a+a')(ax+b)^2+a(a+a')(a'x+b')^2=aa'[(a+a')x+b+b']^2+(ba'-b'a)^2.$$

En partant de cette identité on arrive à quelques conséquences que nous allons indiquer. Ainsi, si l'on pose $x=1$, on obtient la formule

$$a'(a+a')(a+b)^2+a(a+a')(a'+b')^2=aa'(a+a'+b+b')^2+(ba'-ab')^2,$$

qui, pour

$$a=b' \text{ et } a'=b,$$

se réduit à

$$(b+b')^4=bb'(2b+2b')^2+(b^2-b'^2)^2.$$

Soit encore

$$b=u^2,\quad b'=v^2;$$

on aura

$$(u^2+v^2)^4=[2uv(u^2+v^2)]^2+(u^4-v^4)^2,$$

ou bien, en divisant toute l'équation par u^2+v^2, on trouve l'identité

$$(u^2+v^2)^2=(2uv)^2+(u^2-v^2)^2,$$

qui représente la solution générale bien connue de l'équation indéterminée du second degré

$$Z^2 = X^2 + Y^2.$$

Intégrons par parties la différentielle

$$(x + a)(x - a)\,dx$$

d'abord par rapport au facteur $x + a$, et ensuite relativement à $x - a$; nous trouverons

$$\int (x + a)(x - a)\,dx = (x + a)^2 \cdot \frac{2x - 4a}{2 \cdot 3},$$

$$\int (x + a)(x - a)\,dx = (x - a)^2 \cdot \frac{2x + 4a}{2 \cdot 3}.$$

Comme de plus, la différence de ces deux expressions est constante, on aura

$$(x + a)^2 (2a - x) + (x - a)^2 (2a + x) = C.$$

Faisant $x = a$, on obtient $C = 4a^3$, et par conséquent

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^2 (2a - x) + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 (2a + x) = a^3.$$

Posant ensuite

$$2a + x = p^2, \quad 2a - x = q^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{p^2 - q^2}{2}, \quad a = \frac{p^2 + q^2}{4},$$

on aura définitivement l'identité

$$(p^3 - 3q^2p)^2 + (q^3 - 3p^2q)^2 = (p^2 + q^2)^3,$$

qui donne la solution connue de l'équation indéterminée

$$X^2 + Y^2 = Z^3.$$

Considérons encore quelques cas particuliers. L'intégrale

$$\int x\,(x + b)\,dx$$

pouvant être représentée des deux manières suivantes:

$$\frac{x^3}{2}(x+b)-\frac{x^3}{2.3}=x^2\cdot\frac{2x+3b}{2.3}$$

et

$$\frac{(x+b)^2}{2}\cdot x-\frac{(x+b)^2}{2.3}=(x+b)^2\cdot\frac{2x-b}{2.3},$$

l'on aura

$$(x+b)^2(2x-b)=x^2(2x+3b)+C.$$

Faisant $x=o$, on trouve $C=-b^3$, et la formule précédente devient

$$(x+b)^2(2x-b)+b^3=x^2(2x+3b).$$

Si l'on pose

$$2x-b=(x+b)\lambda^3$$

et

$$2x+3b=\mu^3,$$

l'on arrive à l'équation

$$\left(\frac{3\lambda}{8-\lambda^3}\right)^3+\left(\frac{2-\lambda^3}{8-\lambda^3}\right)^3=\left(\frac{\lambda^3+1}{8-\lambda^3}\right)^3,$$

qui donne une infinité de solutions particulières, en nombres rationnels, de l'équation

$$X^3+Y^3=Z^3.$$

Si l'on multiplie l'équation en λ par $(8-\lambda^3)^2$, on aura

$$(3\lambda)^3+(2-\lambda^3)^3=(8-\lambda^3)(\lambda^3+1)^2=9(\lambda^3+1)^2-(\lambda^3+1)^3,$$

ou bien

$$(3\lambda)^3+(2-\lambda^3)^3+(\lambda^3+1)^3=[3(\lambda^3+1)]^2,$$

λ étant rationnel, ou même entier. Cette dernière identité donnera une intinité de solutions en nombres rationnels de l'équation indéterminée

$$X^3+Y^3+Z^3=T^2.$$

Ainsi, en posant $\lambda=1$, on trouvera

$$3^3+1^3+2^3=6^2;$$

pour $\lambda = 3$, l'on a

$$9^3 + 28^3 - 25^3 = 84^2,$$

etc. etc.

En traitant de la même manière l'intégrale

$$\int x^2 (x - a)\, dx$$

on trouvera pour sa valeur les deux expressions suivantes

$$x^3 \cdot \frac{3x - 4a}{3 \cdot 4} \text{ et } (x - a)^2 \cdot \frac{3x^2 + 2ax + a^2}{3 \cdot 4};$$

donc

$$x^3 (3x - 4a) = (x - a)^2 (3x^2 + 2ax + a^2) + C.$$

Faisant $x = o$, on a $C = -a^4$, et par conséquent

$$x^3 (3x - 4a) + a^4 = (x - a)^2 [2x^2 + (x + a)^2],$$

ou bien

$$(x - a)^3 (3x - 4a) + a^4 = (x^2 - a^2)^2 + 2 (x^2 - ax)^2.$$

Si l'on pose

$$3x - 4a = x \cdot \lambda^4, \text{ d'où } x = \frac{4a}{3 - \lambda^4},$$

et que l'on substitue cette valeur dans la formule précédente, on aura

$$(4\lambda)^4 + (\lambda^4 - 3)^4 = (\lambda^8 - 6\lambda^4 - 7)^2 + 2 (4\lambda^4 + 4)^2.$$

Cette identité fournira une infinité de solutions particulières de l'équation indéterminée du 4me degré

$$X^4 + Y^4 = U^2 + 2V^2.$$

Ainsi, posant $\lambda = 1$, on aura

$$4^4 + 2^4 = 12^2 + 2 \cdot 8^2,$$

ou bien, en divisant par 2^4,

$$2^4 + 1^4 = 3^2 + 2 \cdot 2^2.$$

Posant $\lambda = 2$, on trouvera

$$8^4 + 13^4 = 153^2 + 2 \cdot 68^2,$$

etc. etc.

L'intégrale

$$\int [(x+a)^4 - (x-a)^4]\, dx,$$

déterminée d'abord directement, et ensuite en ayant égard à la réduction très simple, fournie par l'identité

$$(x+a)^4 - (x-a)^4 = 8(ax^3 + a^3x),$$

conduira à la formule suivante:

$$(a+x)^5 + (a-x)^5 + 8a^5 = 10a(a^2 + x^2)^2,$$

qui devient, en posant $a = 10\lambda^2$

$$(10\lambda^2 + x)^5 + (10\lambda^2 - x)^5 + 8(10\lambda^2)^5 = (10^3\lambda^5 + 10\lambda x^2)^2.$$

Nous citerons encore la formule

$$\int \ldots f(x)\, dx^{m+1} =$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\left[x^m \int f(x)dx - mx^{m-1}\int f(x)x dx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\int f(x)x^2 dx - \ldots\right]$$

comme pouvant conduire, en certains cas, à des relations plus ou moins remarquables entre des nombres rationnels. Ainsi, en posant $f(x) = x^n$, et en intégrant directement la fonction $x^n dx^{m+1}$ $m+1$ fois de suite, on obtiendra le résultat

$$\frac{x^{n+m+1}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)}.$$

En faisant usage de la formule, on trouve pour la valeur de la même intégrale multiple

$$\frac{x^{n+m+1}}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{1}{n+1} - m\cdot\frac{1}{n+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n+3} - \ldots\right].$$

Enfin, si l'on observe qu'il n'y a pas lieu d'ajouter de fonction complémentaire à ce résultat, on aura, en égalant les deux expressions entr'elles

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)} = \frac{1}{n+1} - m\cdot\frac{1}{n+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n+3} - \ldots$$

formule qui servira à décomposer en fractions partielles la fraction rationnelle numérique

$$\frac{1.2.3....m}{(n+1)(n+2)....(n+m+1)}.$$

Les exemples que nous venons de donner, et qu'on pourrait varier d'une infinité de manières, suffisent pour montrer le parti que l'on peut tirer, pour l'Analyse indéterminée, de l'emploi de divers procédés d'intégration, appliqués à la même différentielle. Les différentes formules du Calcul inverse des différences finies peuvent aussi servir, dans beaucoup de cas, pour le même usage.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XI. No.* 5.)

27 Août / 8 Septembre 1852.

Sur la jonction des opérations astronomico-géodésiques exécutées par ordre des gouvernements russe et autrichien. Par M. W. STRUVE.

I.

Une convention faite à Tarnogrod en Gallicie, le 12 (24) août 1847, m'avait désigné, conjointement avec le directeur de l'Observatoire de Vienne, M. de Littrow, commissaire-juge sur l'accord des opérations de jonction à exécuter, du côté autrichien, sous la direction du colonel M. de Mariéni, du côté russe, sous celle du lieutenant-général M. de Tenner. En outre, je fus chargé de la comparaison de l'étalon du klafter de Vienne dont une copie soignée et certifiée avait été envoyée à Poulkova en 1848, avec l'unité linéaire de la mesure du grand arc du méridien de Russie.

Le rapport de cette unité, de l'étalon de Poulkova, étalon en fer, à bouts d'acier poli, de deux toises de long, à la toise de Fortin et au sajène à traits, de 7 pieds anglais, sur lequel M. de Tenner avait ajusté les règles dont il se servait dans la mesure de ses bases, étant connu par des comparaisons antérieures, très soignées, il ne s'agissait que de la dite comparaison du klafter de Vienne, pour rendre les résultats des deux opérations comparables entre

eux, quant aux distances linéaires qu'elles devaient fournir. Aussi ai-je cru devoir regarder cette seconde commission comme la plus importante pour moi. La comparaison de six différentes échelles:

1) de l'étalon de Poulkova de deux toises;
2) de l'échelle de la mesure des Indes de 10 pieds anglais à points, en fer;
3) du scientific tubular standard de la Société astronomique royale de Londres, 5 pieds, en laiton;
4) du klafter de Vienne;
5) de la toise de Liesganig copiée sur ce klafter;
6) du double sajène à points, de 14 pieds, en fer, construit par Kater pour l'État major Impérial;

vu la construction tout-à-fait différente et l'incommensurabilité des longueurs, cette comparaison, dis-je, exigeait, pour devenir satisfaisante, l'invention d'un nouvel appareil de comparaison, d'appareils auxiliaires et même de nouvelles méthodes. En 1850, je me vis en état de procéder enfin à l'exécution des mesures de comparaison; elle réclama une saison entière de travail non interrompu, depuis le printemps jusqu'à l'automne. Ce ne fut qu'en 1851 que j'obtins le loisir d'entreprendre le calcul au moins de la branche la plus importante de ces comparaisons, calcul qui conduisit aux rapports entre l'étalon de Poulkova et les deux échelles, des Indes et du klafter de Vienne. Le résultat de ces calculs fut transmis, en avril 1851, à M. de Tenner qui se chargea d'en faire la communication au chef des opérations trigonométriques d'Autriche, M. le général de Skribaneck.

Apparemment, les deux dirigeants des opérations de jonction, M. de Tenner et M. de Mariéni, n'avaient attendu que cette communication sur le rapport des unités linéaires, employées à la mesure des bases, pour porter les résultats des opérations de jonction à la connaissance des deux juges choisis. En effet, dans le courant de juin 1851, deux paquets cachetés, envoyés de part et d'autre, me parvinrent presque simultanément. A l'ouverture et à la première inspection des envois, je fus vraiment frappé

de l'accord admirable des deux résultats, dans toutes les données qu'ils contenaient. J'en témoignai ma félicitation sincère immédiatement à M. de Tenner, en le priant de la présenter en mon nom également à M. de Mariéni.

Mais les deux dirigeants m'ayant demandé un sentiment raisonné sur les opérations en question, je me vis forcé d'en remettre la rédaction pour le moment, me trouvant à cette époque entièrement absorbé par un travail astronomique important qu'il fallait achever. Ce n'est qu'à présent que j'ai trouvé le loisir pour me livrer à une étude soignée des deux mémoires envoyés.

2.

L'histoire de la géodésie, depuis 65 ans, indique, d'une part, des progrès éminents de la théorie comme des moyens et des méthodes d'observation, de l'autre, une vaste extension des opérations géodésiques. Des réseaux trigonométriques s'étendent aujourd'hui sur presque toutes les parties de l'Europe, à l'exception de l'Empire Ottoman et de la majeure partie de la péninsule Ibérique. Des opérations géodésiques s'exécutent même sur différentes portions de l'Asie, aux Indes par les Anglais, au delà du Caucase et de l'Oural par des géomètres russes; enfin les côtes de l'Amérique septentrionale se couvrent de triangles dans toute l'étendue des États-unis. A côté du développement de la théorie, dû à trois profonds savants, Legendre, Gauss et Bessel, c'est surtout la construction d'instruments plus parfaits et plus transportables qui a effectué ces progrès rapides. Ce perfectionnement est dû au génie de Reichenbach qui remit enfin entre les mains des géomètres, des instruments construits d'après des principes simples et géométriquement exacts, pourvus de lunettes d'une perfection antérieurement inconnue pour ces dimensions, mais surtout de divisions presque mathématiquement justes, et qui rivalisaient avec les divisions données aux grands instruments du méridien, établis dans les observatoires. C'est cette dernière circonstance, qui conduisit à une perfection importante

dans la méthode d'observation. Les géomètres français avaient introduit, vers la fin du siècle passé, le principe de la mesure des angles par répétition, avec un succès distingué en apparence. Mais il est évident que ce principe, quelque admirable qu'il soit en théorie, ne peut jamais conduire à des mesures parfaitement exactes, parce qu'il suppose une rigidité absolue des métaux et un arrêt parfait des différentes parties d'un instrument, pendant qu'on le tourne sur l'un ou l'autre des axes. Néanmoins, l'introduction de la répétition, pour la mesure des angles géodésiques, doit être regardée comme un progrès important à l'époque, où les instruments géodésiques, cercles répétiteurs, étaient dans l'enfance et surtout dépourvus d'une division exacte. Mais la répétition a dû être abandonnée, dèsque l'imperfection des divisions tracées sur les instruments cessait, et que la répétition était devenue inutile, ou même nuisible. A ce qui parait, c'est à la méthode de la répétition qu'il faut attribuer les erreurs un peu énigmatiques, qui se trouvent dans plusieurs opérations du commencement de ce siècle. M. Gauss a dirigé l'attention des géomètres sur ce que certaines opérations offraient bien un accord admirable dans la somme des trois angles des différents triangles avec $180^0 + l'excès$, sans cependant garantir l'exactitude correspondante dans les angles isolés, vu que les angles mesurés avec certaines lignes diagonales, mais qui n'avaient pas concouru pour la formation du réseau, manifestaient souvent des différences très considérables, entre ces directions diagonales observées et les directions calculées à l'aide des triangles adoptés. A ce qui paraît, ces discordances énormes ont cessé depuis l'usage presque général des instruments de construction plus parfaite, et surtout depuis que la méthode de la répétition enchaînée a été remplacée par la mesure simple des angles, mais réitérée sur plusieurs arcs du limbe de l'instrument.

Il s'agissait en tout cas de trouver des moyens de contrôle ou plutôt de vérification pour les opérations géodésiques.

Le moyen introduit par M. Gauss et par Bessel consiste en ce que le géomètre mesure, en sus des angles dans les différents triangles successifs d'un réseau, encore un nombre aussi grand que possible d'angles, formés entre les côtés et les diagonales des triangles (en désignant par diagonale chaque ligne qui, à partir d'un point quelconque, s'étend, au-delà des points des triangles immédiatement formés avec ce point, jusqu'à un point appartenant à d'autres triangles). Par cette voie, un réseau de triangles est plus que déterminé et doit être résolu d'après la méthode des moindres carrés, qui indique finalement l'exactitude de l'opération, par les erreurs restantes des angles ou des directions. Il y a cependant plusieurs objections à faire contre l'usage général de cette méthode.

1) Il y a des terrains où l'observation des diagonales devient impossible; chaque fois que le géomètre rencontre des difficultés, même pour effectuer la continuation des opérations par de simples triangles contigus.

2) Si les diagonales ne sont point régulièrement distribuées, si elles manquent sur certaines portions d'une opération, tandis qu'elles ont été observées sur d'autres: une inégalité inévitable existe dans l'exactitude des différentes portions.

3) Le calcul des opérations devient trop prolixe; car, dèsque le nombre des points réunis par une telle opération compliquée est très grand, ce calcul devient à-peu-près une impossibilité.

Sans prétendre que ces objections soient réelles pour toutes les opérations géodésiques, elles l'ont été au moins pour la plupart des opérations en Russie. Je n'ai qu'à citer que, depuis Tornea jusqu'au Danube, sur une étendue d'au-delà de 2000 verstes, il n'a été possible de trouver des diagonales de contrôle qu'exceptionnellement en quelques endroits, et plutôt de doubles jonctions par polygones formés que des diagonales. Ainsi la méthode des diagonales de contrôle ne pouvait ici nullement répondre à son but,

et il a paru indispensable de remplacer cette méthode par d'autres moyens de contrôle et de vérification.

8.

La mesure d'un nombre comparativement plus grand de bases se présente comme le moyen le plus efficace de contrôle. Tous les triangles situés entre deux bases sont complètement contrôlés; et il se présente une compensation très facile pour déterminer les corrections les plus probables à porter sur les différents angles observés, pour qu'ils répondent au principe simple à établir: que toutes les bases mesurées doivent être exactement représentées par le calcul des triangles définitifs. Dèsque l'azimut d'un côté de triangle est observé et que la latitude est astronomiquement déterminée, au moins autant de fois qu'il existe des bases mesurées, il est clair que les opérations géodésiques, même aussi étendues que celles de Russie, offrent tout ce qui peut être désiré pour la vérification. Depuis 1816 jusqu'à la fin de 1851, il y a, dans les opérations russes du premier rang, 26 bases mesurées. L'azimut d'un côté et la latitude ont été déterminés sur 68 stations principales, en employant, pour les latitudes, soit l'observation des étoiles circompolaires et fondamentales des deux côtés du zénith, soit l'instrument des passages établi dans le premier vertical. A ces contrôles il faut ajouter les différentes expéditions chronométriques qui ont relié plusieurs des points principaux des opérations géodésiques à l'Observatoire central, et ont contribué, conjointement avec les latitudes observées, à rendre les positions géographiques des différents points, en partie au moins, indépendantes des données que possède la science jusqu'à présent sur la figure et les dimensions du globe terrestre, données qui bientôt gagneront considérablement en certitude, dèsque la grande mesure de l'arc du méridien entre le Danube et l'Océan Glacial, exécutée en Russie par au delà de 20 degrés sous la direction de M. de Tenner et la mienne, puis prolongée à plus de 25 degrés jusqu'aux environs du Cap Nord, par le concours des gouvernements

et des savants suédois et norvégiens, sera définitivement discutée au profit de la science.

Les 26 bases mentionnées ont été mesurées avec six différents appareils, mais qui, ayant été étalonnés à Dorpat ou à Poulkova, sont devenus tous comparables entre eux, quoiqu'ils fussent de construction différente. En effet, deux de ces appareils ont des règles à bouts de deux toises de long, pourvues d'un côté de leviers de touche; et les 4 autres appareils, composés de règles de deux sajènes ou 14 pieds anglais de long, sont d'après la construction de Delambre, avec des languettes à l'une des extrémités. L'unité linéaire primitive pour toutes les comparaisons a été la toise de Fortin, certifiée comme parfaitement égale avec la toise du Pérou par la bienveillance de M. Arago. Le rapport de cette toise de Fortin avec l'étalon de Poulkova *N* ayant été définitivement évalué en 1827 et 1828, $N = 1728,01249 \mp 0,00071$ lignes de la toise de Fortin, cette dernière toise disparaît depuis entièrement dans les comparaisons, étant remplacée par l'étalon de Poulkova *N* qui, par ses bouts polis en acier trempé, a l'avantage important d'être moins sujet à des changements que les bouts en fer mou de la toise de Fortin. Le calcul des longueurs des règles de 2 sajènes, qui devaient être exprimées en pieds anglais, a été deduit en employant le rapport donné par le capitaine Kater, un pied anglais = 135,114 lignes du pied de France, rapport qui a obtenu une confirmation dans la comparaison de l'étalon de Poulkova avec l'échelle de 10 pieds anglais, employée aux Indes orientales.

4.

Il fallait cependant convenir, que la comparaison entre des règles de différente construction, gagnée sur la voie indiquée, reposait toujours sur un procédé compliqué. Voilà pourquoi en 1828, lorsqu'il s'agissait de la réunion des deux arcs partiels du méridien, l'un de $4^1/_2$ degrés, mesuré en Lithuanie par M. de Tenner, et l'autre de $3^1/_2$ degrés, mesuré dans les provinces baltiques par W. Struve, en

un seul arc de 8 degrés de long, entre Belin et Hochland, il parut propre de se procurer une vérification indépendante et rigoureuse de l'exactitude du rapport entre l'étalon de Poulkova (alors encore à Dorpat) et les règles de M. de Tenner. Par suite d'une convention signée par M. de Tenner et Struve à Dorpat le 11 (23) Février 1828, M. de Tenner se chargea de conduire ses triangles jusqu'à la détermination indépendante du dernier côté des triangles de Livonie, Kreutzburg-Daborskalns, en partant de sa base de Ponedeli, afin que cette détermination fût comparée avec la valeur déduite de mes opérations plus septentrionales et qui partaient de la base de St.-Simonis en Ehstonie. En même temps, deux triangles de Livonie devaient être remesurés de la part de M. de Tenner, pour voir l'accord des angles identiques, et pour mieux évaluer la différence linéaire des deux systèmes par 5 côtés communs, que par un seul. M. le lieutenant-général de Schubert, alors chef du dépôt topographique de l'État-major Impérial, et le célèbre astronome de Koenigsberg, feu M. Bessel, consentirent à se charger de la fonction de commissaires-juges sur l'accord des résultats qui leur devaient être communiqués indépendamment des deux côtés. La distance entre les deux bases de St.-Simonis et de Ponedeli est de 320 verstes, et le côté commun Kreutzburg-Daborskalns se trouve à 70 verstes de distance en ligne droite du milieu de la base de Ponedeli, mais à 250 verstes de celle de St.-Simonis. Entre les deux bases il y avait 34 triangles, dont 9 entre la base méridionale et le côté commun, et 25 depuis ce côté jusqu'à la base septentrionale.

Le résultat de la comparaison faite de la part des commissaires-juges peut s'exprimer dans les termes suivants:

1) Les six angles identiques, en adoptant la même exactitude de mesure dans les deux systèmes, indiquent une erreur probable de $0''{,}63$ dans chaque angle observé, de part et d'autre, et une erreur probable de $0''{,}50$ dans chaque angle compensé à 180^0 + l'excès. Cet accord ne laisse rien à désirer et répond à l'exactitude des an-

gles, qui se déduit de la comparaison des sommes respectives des trois angles avec 180°+l'excès, pour tous les triangles des deux opérations.

2) La somme des 5 côtés identiques se trouve: dans les triangles qui partent de la base de Ponedeli = 70783,209 toises; dans les triangles déduits de la base de St.-Simonis, = 70781,358 toises. La différence est 1,851 toises = $^1/_{38240}$ du total. Or il fallait s'attendre à une certaine différence, par suite des erreurs restantes dans les angles adoptés des 34 triangles. Cet effet s'élève à environ $^1/_{50000}$, et la différence réelle n'est plus forte que d'à-peu-près un tiers. Il faut ajouter qu'une comparaison de deux opérations non simultanées, la mesure des angles de la part de M. de Tenner étant de 6 ans postérieure à la mienne, est toujours en désavantage, par les petites incertitudes qui se présentent sur l'identité absolue des points d'observation. Aussi M. de Tenner a-t-il cru devoir élever quelques doutes sur l'identité absolue des deux stations Gaisakalns et Sestukalns, mais qui était incontestable pour les deux points Daborskalns et Kreutzburg. C'est pourquoi il regarde le côté commun entre ces deux points comme le vrai résultat de la comparaison linéaire des deux opérations, résultat qui présente dans les deux chiffres 6705,321 et 6705,231 toises un accord à 0,090 toise près, c.-à-d. une différence de $^1/_{74500}$, même plus petite qu'elle n'était à attendre

3) L'élévation des quatre points au dessus du niveau de la Mer Baltique est

	Tenner	*Struve*	$S - T =$
	t.	t.	t.
Gaisakalns	159,29	161,32	+ 2,03
Sestukalns	110,67	112,38	+ 1,71
Daborskalns	80,39	82,25	+ 1,86
Kreutzburg	44,84	46,21	+ 1,37

Moyenne + 1,74 toises.

Les élévations données par M. de Tenner ont pour point de départ le niveau de la Mer Baltique près de Polangen, sur la frontière de la Prusse, d'où il y a une distance de 300 verstes en ligne droite jusqu'aux stations de jonction. Le nivellement trigonométrique de Struve commence au Golfe de Finlande à une distance de 350 verstes.

5.

M. de Tenner, également porté à donner à ses grandes opérations géodésiques le plus haut degré de perfection intrinsèque, que zélé pour les faire concourir dans les intérêts de la science, conçut le projet d'effectuer une jonction entre les opérations géodésiques de Russie et de l'Europe plus occidentale, en profitant des opérations du nord de la Prusse, dont étaient chargés feu M. Bessel et M. de Baeyer. Une entrevue personnelle à Memel, en automne 1832, conduisit aux stipulations essentielles pour ce but, et qui, ayant obtenu la confirmation des deux gouvernements, furent mises à exécution. Je me borne ici à citer l'accord trouvé pour les côtés identiques des deux opérations, vu que c'est précisément le point le plus important, en considérant que les distances linéaires de Prusse reposaient sur une autre copie de la toise du Pérou, copie envoyée de Paris à Koenigsberg, sans qu'il existât une comparaison directe avec la toise de Fortin qui avait servi d'unité primitive dans les mesures de Russie. Il y a, dans les deux opérations qui se rencontrent aux environs de Memel, deux côtés identiques, savoir

	Bessel	*Tenner*	$T - B =$
Lopaszi-Memel phare:			
	18391^t,085	18391^t,163	+ 0^t,078
Jakubovo-Memel phare:			
	9288,355	9288,370	+ 0,015
Somme	27679,440	27679,533	+ 0,093 = $\frac{1}{297500}$.

La distance des deux bases, celle de Trenk en Prusse et celle de Polangen en Courlande, est de 130 verstes à-peu-près, et il y a 15 triangles prussiens et 6 triangles russes qui pro-

duisent la jonction de ces bases. L'accord presque parfait des valeurs linéaires prouve, 1° que le rapport entre les règles de M. de Tenner et la toise du Pérou est exactement établi, 2° que M. de Tenner a parfaitement réussi à effectuer la première réunion des opérations géodésiques de Russie avec les triangles de l'Europe plus occidentale.

6.

Dans les opérations géodésiques de Russie il se trouve nombre de jonctions analogues. Toutes ces jonctions, des triangles mesurés sous la direction de MM. de Schubert et de Toutchkov, soit avec les triangles de la mesure des provinces baltiques, soit avec ceux des opérations de M. de Tenner, offrent, sans exception, un accord plus que satisfaisant, et le même accord se présente pour les branches de triangles qui s'étendent, en différents endroits, dans une direction verticale à celle du grand arc du méridien, ou dans le sens des parallèles, jusqu'au delà des provinces centrales de la Russie européenne. Cet accord universel donne la double satisfaction, de prouver la justesse des rapports des différents appareils employés pour la mesure des bases, et l'exactitude générale des angles et des azimuts observés.

7.

Parmi les branches d'opérations géodésiques en Russie, il y a une qui a effectué une réunion des triangles de Russie avec ceux de Suède. Cette branche, mesurée, sous la direction de M. le général de Schubert, par mon ancien collaborateur M. de Wrangell, longe, en partant des stations voisines de la capitale, les côtes du Golfe de Finlande, se trouve en jonction avec la mesure du grand arc du méridien par le côté commun Maholm-Hochland, réunit les deux bords du golfe une seconde fois entre Reval et Porkala-udd, puis continue le long des skäres et du litoral de Finlande, couvre les îles Aland du Golfe Bothnique, et aboutit enfin, par une jonction multiple, avec les stations des opérations géodésiques de Suède, aux environs de Stockholm.

Les triangles de Suède étant en jonction avec ceux du Danemark, mesurés par Schumacher, donc avec ceux du Hannovre, mesurés par M. Gauss, la dite branche donne sous le 60° de latitude la seconde réunion des opérations russes avec les travaux de l'Europe plus occidentale. En outre, elle offre les matériaux complets géodésiques pour la détermination d'un arc de 12° 16′ du parallèle de 60°, compris entre les observatoires de Poulkova et de Stockholm, arc pour lequel la différence des longitudes extrêmes est déjà donnée avec une exactitude distinguée, dans l'expédition chronométrique de la Baltique, exécutée en 1833 sous la direction de M. de Schubert. Cet arc pourra même aisément se prolonger jusqu'à près de 20°, dès que les triangles suédois seront continués jusqu'à une jonction avec les opérations géodésiques de la Norvège méridionale; les trois observatoires de Christiania, Stockholm et de Poulkova se trouvant sous trois latitudes très peu différentes, 59° 54′, 59° 20′ et 59° 46′. Même pour l'arc compris entre Poulkova et Christiania, la différence en longitude peut être regardée comme donnée par la combinaison de différentes expéditions chronométriques déjà faites; savoir l'expédition Baltique de 1833, l'expédition de jonction entre Poulkova et Altona de 1843, les opérations multiples de jonction entre Altona et Copenhague, faites par feu M. Schumacher, enfin le beau travail que M. Hansteen a exécuté en 1848, pour la jonction chronométrique de Christiania avec Copenhague. La communication régulière par pyroscaphes, qui se prépare maintenant entre Kronstadt, Stockholm, Christiania etc., offrira en outre toute facilité désirable pour soumettre les différences en longitude à une vérification ultérieure.

8.

Les deux réunions mentionnées, des opérations géodésiques de Russie avec celles de l'Europe plus occidentale, ont été faites sous 60° et 56° de latitude; et il est impossible d'y ajouter encore une jonction intermédiaire, parce que la Mer Baltique sépare, entre ces latitudes, la Russie

des autres parties du continent. Mais les triangles de Russie s'étendent le long de sa frontière occidentale, à partir de Memel, encore sur une ligne de 1100 verstes, jusqu'au Danube sous 45° de latitude. La réunion complète des opérations russes aux opérations occidentales réclame, par conséquent, des jonctions plus méridionales, et telle jonction se présente comme le plus avantageusement à faire précisément dans les triangles qui, en Pologne, avancent le plus vers l'ouest. La grande importance scientifique de la jonction actuellement achevée sous 50° de latitude, par suite de la convention de Tarnogrod, se déduit de la seule considération, que cette jonction met pour la première fois les travaux russes en contact avec ceux de l'Europe centrale et méridionale.

9.

Qu'il me soit permis de faire ici quelques considérations sur la signification du contact des opérations géodésiques, exécutées dans les différents états de l'Europe. Dans les jonctions il y a deux avantages pratiques:

a) les triangles de jonction garantissent aux cartes à construire des deux côtés, un accord parfait dans les parties limitrophes;

b) chaque jonction fournit des données précises sur l'exactitude des deux opérations mises en contact.

Mais, sans doute, la plus haute signification de ces réunions se trouve en ce qu'elles offrent des matériaux précieux, pour une connaissance plus exacte de la figure de la Terre; et c'est évidemment ce point important, qui a engagé les gouvernements éclairés à protéger les différentes propositions faites de la part des géomètres, pour effectuer des continuations des opérations géodésiques au delà des frontières d'un seul état. Citons ici comme exemples: la prolongation de la mesure du grand arc du méridien de France à travers la Catalogne jusqu'aux îles Baléares; la réunion des travaux des savants et des ingénieurs de France, du Piémont et d'Autriche, due à une proposition de l'im-

mortel Laplace, pour déterminer la valeur de l'arc du parallèle moyen entre le pôle et l'équateur, arc de 15°,5 entre Marennes, au nord de l'embouchure de la Gironde dans l'Atlantique, et Fiume, sur les bords orientaux de la Mer Adriatique ; enfin la prolongation de l'arc du méridien de Russie à travers la Lapponie et le Finmarken, réalisée, sous la protection de S. M. le Roi Oscar, par le zèle des géomètres de Suède et de Norvège. La connaissance actuelle sur les dimensions de l'ellipsoïde terrestre est déjà telle, que de graves erreurs dans les positions géographiques, déduites à l'aide d'opérations géodésiques, ne sont plus à craindre, mais cette connaissance doit devenir avec le temps beaucoup plus précise qu'elle ne l'est aujourd'hui, et il reste surtout à prouver qu'effectivement la courbure de la Terre, dans le sens des parallèles, répond exactement à un corps de révolution formé par l'ellipse de l'arc du méridien. Or ce n'est que dernièrement que l'astronome royal anglais, M. Airy, en s'appuyant sur sa mesure de l'arc du parallère entre Valentia en Irlande et Greenwich, a signalé que les discordances, entre les longitudes calculées des opérations géodésiques et les longitudes chronométriques, ont disparu en Grande-Bretagne, depuis que ce calcul a été basé sur des éléments plus exacts de la figure de la Terre [1]).

10.

Les fruits à tirer des opérations géodésiques de l'Europe entière doivent être réservés en majeure partie à la postérité. Cependant, il est important d'examiner: soit quelle récolte peut se faire déjà maintenant ou dans le courant de peu d'années, soit quels préparatifs sont à faire, pour rendre les immenses matériaux accessibles et profitables à nos descendants. C'est précisement la jonction de Tarnogrod qui engage à cet examen.

J'ai mentionné plus haut la mesure de l'arc du parallèle

1) Monthly notices of the Royal Astronomical Society Dec. 12. 1851. p. 37.

entre Marennes et Fiume. Maintenant Fiume est géodésiquement lié avec les triangles autrichiens de la jonction de Tarnogrod, et rien n'empêche de donner à l'arc du parallèle une étendue bien plus grande. Les triangles russes vont déjà, sans interruption et dans le sens général des parallèles jusqu'à Jékaterinoslav en partant des triangles de la dite jonction. M. le major-général Wrontchenko, dirigeant des opérations trigonométriques de la Russie méridionale, a pour tâche de conduire ses triangles jusqu'à Novo-Tscherkask, et atteindra ce chef-lieu du pays des Cosaques du Don vers la fin de cette année. Novo-Tscherkask n'est que de 1° 55′ plus boréal que Marennes, mais de 41° 12′ plus à l'est. Supposons encore, ce qui est très probable, qu'en peu d'années les opérations géodésiques russes toucheront Astrakhan, la différence des latitudes se reduisant à 59′, l'amplitude de l'arc du parallèle sera 49° 11′, au delà du triple de l'arc entre Marennes et Fiume. L'addition de quelque peu de triangles pourra même conduire à une station sur le bord occidental de la Mer Caspienne d'une latitude exactement égale à celle de Marennes [2]). On objectera peut-être, contre l'exécution réelle de la mesure d'un arc du parallèle dans de si grandes dimensions, la difficulté immense de déterminer la différence en longitude entre les deux points extrêmes, avec une exactitude suffisante. Mais cette difficulté n'existe plus. Par les expéditions chronométriques, entreprises depuis dix ans, avec des moyens éminents en horloges [3]), de la part de l'Observatoire central de Russie et

2) Il faut cependant convenir que la jonction de Tarnogrod n'est pas la plus avantageusement située pour la prolongation du parallèle du 45^{me} degré. Pour ce but spécial, une jonction en Gallicie, vis-à-vis de Kamenetz-Podolsk, ou par la Transsylvanie et la Moldavie, vis-à-vis de Kichenev serait à préférer.

3) L'Observatoire de Poulkova est redevable de ces moyens chronométriques au secours désintéressé que lui a prêté M. E. Dent de Londres, en fournissant à l'Observatoire un grand nombre de ses chronomètres du premier rang, pour l'usage dans les opérations de longitude. C'est déjà la neuvième année, que cette collection de chronomètres, propriété de M. Dent, se trouve à l'Observatoire de Poulkova, et cet

de concert avec l'État-major Impérial, il existe déjà une jonction chronométrique entre Greenwich et Novo-Tscherkask, dans laquelle on peut garantir l'exactitude de la différence en longitude à un tiers de seconde en temps près. Donc, il ne reste qu'à ajouter la différence exacte en longitude entre Marennes et Greenwich.

11.

En Grande-Bretagne, M. Airy a exécuté la mesure de l'arc du parallèle de 51° 40′, dans une étendue de 10° 40′, depuis Feagh-Main, sur les bords de l'Océan en Irlande (île de Valentia), jusqu'à Greenwich. Varsovie se trouve sous 52° 13′, seulement de 17′ plus boréal que Feagh-Main, 51° 56′. En outre, Varsovie est rigoureusement joint en longitude avec Poulkova, par notre expédition de 1845. Donc, le travail le plus épineux de la mesure d'un arc du parallèle, celui de la différence des longitudes des deux extrémités, ici Feagh-Main et Varsovie, est entièrement achevé. Cette différence est de 31° 22′ 37″,6 [4]), avec une erreur probable de

---

artiste éminent vient même de déclarer, qu'il est tout-à-fait disposé à ajouter encore au nombre de ses chronomètres, si l'étendue croissante des travaux géographiques de Russie le rend désirable.

4) La longitude entre Feagh-Main et Varsovie repose sur la combinaison des arcs de longitude suivants:

Feagh-Main à Greenwich Obs.

$+0^h\ 41^m\ 23^s,23 \mp 0^s,06$ par 30 chron. 1844, exp. anglaise

Greenwich Obs. à Altona Obs.

$+0\ 39\ 46,14 \mp 0,04$ » 42 » 1844 » russe

Altona Obs. à Poulkova Obs.

$+1\ 21\ 32,52 \mp 0,04$ » 82 » 1843 » »

Poulkova Obs. à Varsovie Obs.

$-0\ 37\ 11,38 \mp 0,03$ » 40 » 1845 » »

d'où Feagh-Main à Varsovie

$+2\ 5\ 30,51 \mp 0,09$

Pour de telles opérations, la réussite dépend en premier lieu de l'exactitude dans la détermination du temps absolu, et de l'élimination des équations personnelles des différents observateurs. Sous ce point de

1″,4, c.-à-d. elle est connue avec l'exactitude de $\frac{1}{80000}$ de sa totalité, exactitude qu'il ne sera pas facile à surpasser dans la partie géodésique de la mesure. Il ne s'agit donc maintenant que de la réunion géodésique entre Feagh-Main et Varsovie. Cette réunion est effectuée par les deux jonctions mentionnées de Tarnogrod et de Memel, mais elle pourra se faire par des triangles plus directs sur les points limitrophes de la Pologne avec la Prusse [5]). Ajoutons encore à cette considération que l'arc mesuré du parallèle du 52me degré ne se terminera point à Varsovie. D'après le plan des travaux de l'État-major Impérial, les triangles centraux de Russie, avancés déjà à l'est sur une ligne très considérable seront conduits, dans le courant de deux ou trois années, jusqu'à Samara, Saratov et Astrakhan sur le bord du Volga. La ville de Saratov se trouve sous 51° 32′ à 25° 2′ à l'est de Varsovie. Cet arc ajouté à celui de 31° 23′ compris entre Feagh-Main et Varsovie, produira un arc total de 56° 25′ sous 52° de latitude, entre Feagh-Main et Saratov. Pour la différence en longitude entre les points extrêmes, il ne faudra qu'ajouter la différence entre Moscou et Saratov, de 8° 30′ à peu près, à celle entre Feagh-Main et Moscou

---

vue, tous les scrupules possibles ont été considérés dans les quatre opérations citées. Un fait remarquable qui a été reconnu par les deux expéditions de terre, entre Poulkova et Moscou et entre Poulkova et Varsovie, c'est que la marche des chronomètres est considérablement plus régulière dans un transport par terre, que dans les bateaux à vapeur par mer. Ce fait a été constaté depuis, par l'expérience qu'ont offerte six autres années d'expéditions chronométriques à l'intérieur de l'Empire.

5) Cette jonction des triangles de Prusse et de Pologne s'exécute à présent sous la direction de MM. le lieutenant-général de Tenner et le major-général de Baeyer. M. de Baeyer vient d'envoyer à Poulkova une copie de la toise dont s'est servi Bessel, soit dans ses célèbres recherches sur le pendule, soit dans la mesure de la base pour ses triangles. Cette toise étant l'unité primitive de toutes les opérations géodésiques du royaume de Prusse, la copie en sera incessamment comparée avec l'étalon de Poulkova.

$= 47^0\ 55'\ 2''{,}2 \mp 1''{,}4$, déjà exactement déterminée par les expéditions chronométriques [6]).

12.

Quant au second point que j'ai mentionné, de rendre les immenses matériaux accessibles et profitables, de grandes difficultés se présentent pour un plan efficace. Ne serait-il pas temps d'engager, dès à présent, les autorités des différents états à contribuer au moins à un tracé des triangles du premier rang du total des opérations géodésiques européennes, avec l'indication des différentes bases et des azimuts et latitudes observés? L'étude d'un tel tracé donnerait une connaissance intime de la connexion et de l'étendue des opérations, elle indiquerait les lacunes à remplir, s'il y a lieu et occasion, elle offrirait le coup d'oeil général, indispensable pour préparer les résultats qui pourront être déduits, à l'aide des mesures des arcs du parallèle de grande étendue.

13.

Il me reste maintenant à m'occuper de l'objet direct de ce rapport, savoir «*de la comparaison des travaux de jonction entre les opérations autrichiennes et russes.*»

Cette jonction diffère de celles que j'ai mentionnées plus haut, par la circonstance qu'elle a été effectuée sur deux

---

6) La différence en longitude entre Poulkova et Saratov pourra être gagnée sur une double voie, soit directement avec Moscou, soit par Kazan déjà chronométriquement lié avec Moscou. La distance entre Kazan et Saratov n'est que la moitié de celle entre Moscou et Saratov, et pourra être parcourue par les bateaux à vapeur du Volga. Kazan est aujourd'hui le point extrême oriental des opérations chronométriques du premier rang, exécutées dans l'intérieur de la Russie, Varsovie en est le point le plus occidental. La différence en longitude entre ces points est de 28°. Déjà le projet est formé de continuer les opérations chronométriques, toujours avec des moyens et des précautions analogues, encore de 12° jusqu'à Jékaterinbourg au delà de l'Oural, afin de gagner un point fondamental pour les levées projetées du terrain des mines Ouraliennes, et un point de départ propre et certain, pour les travaux géographiques de Sibérie.

endroits, une fois près de Cracovie, une autre fois près de Tarnogrod, les deux stations communes extrêmes Oycow et Roszaniec étant éloignées de 187 verstes.

Du côté autrichien, un réseau de 26 triangles principaux a été établi entre les stations de jonction, triangles qui, par suite de circonstances locales, s'écartent un peu de la ligne principale droite qui réunit ces stations. La base de Partyn, au nord de la ville de Tarnow était de 3149 klafter de Vienne ou de 3064 toises. Elle est plus voisine de la jonction occidentale, la distance entre Oycow et la base étant de 70 verstes, celle entre la base et Roszaniec de 120 verstes. L'orientation du réseau fut faite à l'aide de la mire méridienne de l'Observatoire de Cracovie, un des points principaux de la jonction, par l'angle mesuré entre la mire et le côté de triangle Cracovie-Sieborowice. Pour les latitudes et longitudes à calculer, l'Observatoire de Cracovie était le point de départ, en employant la position de cet Observatoire qu'avait fixée le directeur M. Weisse par ses observations et calculs. Les élévations des différents points au dessus du niveau de la mer, données par M. de Mariéni, ont pour point de départ les bords de la Mer Adriatique, éloignée en ligne droite de Cracovie de 95 milles géographiques = 665 verstes environ. Mais il est à présumer que la ligne effectivement parcourue par les triangles est considérablement plus longue.

Du côté russe, il y avait deux bases respectivement voisines aux deux endroits de jonction. Sur l'extrémité orientale la base de Tarnogrod, de 2522 sajènes = 2761 toises, est jointe par seulement deux triangles au côté commun Biszcza-Roszaniec. Sur l'extrémité occidentale se trouve la base de Czenstochov de 2048 sajènes = 2243 toises, éloignée d'à-peu-près 60 verstes du point de jonction le plus voisin Oycow; et il n'a fallu qu'un petit nombre de triangles [7]) pour la déduction du premier côté de jonction Oycow-Ko-

---

7) Dans les tracés joints au mémoire de M. de Tenner, les triangles compris entre la base et le côté Oycow-Koniusza n'ont pas été indiqués.

niusza. Pour l'orientation des triangles et la déduction des positions géographiques, M. de Tenner avait trois azimuts à sa disposition, observés à l'Observatoire de Varsovie, à Markovice près de Czenstochovo et à Przymiarki, point extrême de la base de Tarnogrod. M. de Tenner s'est servi, pour l'orientation des triangles de jonction occidentaux, de l'azimut observé à Varsovie, transporté par 45 et 47 triangles intermédiaires. Pour les triangles de l'autre jonction, l'orientation est basée sur l'azimut observé au point voisin Przymiarki. Les latitudes des stations occidentales de jonction près de Cracovie ont été déduites par M. de Tenner, en partant de la latitude de Varsovie. Pour la jonction orientale, près de Tarnogrod, la latitude observée de Przymiarki a été le point de départ. Toutes les longitudes sont basées sur celle de Varsovie, déduite de l'expédition chronométrique entre Varsovie et Poulkova. Les hauteurs absolues au dessus du niveau de la mer ont pour point de départ les bords de la Baltique près de Polangen en Courlande. La distance en ligne droite entre ce point et les stations de jonction est de 85 milles géographiques ou d'environ 600 verstes. Mais la ligne du polygone effectivement parcourn, de 121 et de 126 côtés, a été de 1180 et de 1280 verstes.

14.

Comparaison des angles identiques.

a) *Angles sphériques observés.*

Jonction orientale près de Tarnogrod.

	Mariéni.	*Tenner.*	*M-T*	*carrés.*
1. Roszaniec-Biszcza-Szyszkow .	93°27′30″,98	30″,54	+ 0″,44	0,1936
2. Biszcza-Szyszkow-Roszaniec .	48 36 45,63	46,28	— 0,65	0,4225
3. Szyszkow-Roszaniec-Biszcza. .	37 55 44,16	43,97	+ 0,19	0,0361
4. Bukowina-Roszaniec-Biszcza .	19 33 14,06	12,69	+ 1,37	1,8769

NB. Le quatrième angle identique se trouve en combinant deux angles mesurés dans le second et le troisième triangle de M. de Mariéni, et deux angles des triangles 53 et 54 de M. de Tenner.

Jonction occidentale près de Cracovie.

	Mariéni.	*Tenner.*	*M-T.*	*carrés.*
5. Wanda-Oycow-Koniusza	35 33 31,94	32,57	— 0,63	0,3969
6. Oycow-Koniusza-Wanda	50 49 25,26	24,48	+ 0,78	0,6084
7. Krakau-Oycow-Sieborowice. .	42 49 13,70	14,29	— 0,59	0,3481
8. Oycow-Sieborowice-Krakau. .	75 21 46,18	46,28	— 0,10	0,0100
9. Krakus-Oycow-Sieborowice..	46 38 6,21	6,36	— 0,15	0,0225
10. Oycow-Sieborowice-Kracus .	81 23 25,25	25,18	+ 0,07	0,0049
		Somme	+ 0,68	3,9199

Valeur moyenne de M-T = + 0,068

NB. Dans les trois triangles communs occidentaux, l'angle troisième donné par l'unique mesure de M. de Mariéni a dû être exclus.

Par la moyenne M-T = + 0″,068 il est indiqué qu'il n'existe aucune différence d'un sens constant entre les angles observés de part et d'autre. Aussi voit-on que, des 10 M-T, il y a cinq + et cinq —. On doit, par conséquent, regarder les M-T comme différences purement accidentelles. Ainsi la somme des carrés des M-T, trouvée = 3,9199, donne la différence probable d'un M-T isolé = 0″,42, ou, en acceptant la même précision pour les M et les T, une erreur probable de ∓ 0″,30 dans les angles mesurés de part et d'autre, *exactitude vraiment admirable.*

b) *Angles sphériques corrigés à la somme* = 180° + *l'excès.*

M. de Tenner donne dans son mémoire soit les angles observés, soit les angles sphériques corrigés à la somme 180° + l'excès, soit enfin les angles plans réduits à 180° 0′ 0″,0. Dans l'exposé de M. de Mariéni, les angles corrigés à 180° + l'excès manquent, les angles plans réduits à 180° 0′ 0″,0 s'y trouvent. Il est cependant inadmissible de comparer entre eux les angles plans M et T, les M étant les angles du triangle formé entre les chordes, les T au contraire les angles plans du triangle plan de côtés identiques avec le triangle sphérique, d'après le célèbre théorème de Legendre. Mais rien n'empêche de réduire les angles sphériques M

observés, aux angles sphériques de la somme 180°+l'excès, l'excès étant donné dans les deux tableaux. C'est ainsi que j'ai obtenu la comparaison suivante.

Jonction orientale.

	Mariini.	*Tenner.*	*M-T*	*carrés.*
1.	93°27′30″,87	30″,43	+ 0″,44	0,1936
2.	48 36 45,53	46,17	— 0,64	0,4096
3.	37 55 44,06	43,86	+ 0,20	0,0400
4.	19 33 14,23	12,78	+ 1,45	2,1025

Jonction occidentale.

5.	35 33 32,22	32,90	— 0,68	0,4624
6.	50 49 25,54	24,81	+ 0,73	0,5329
7.	42 49 14,15	14,50	— 0,35	0,1225
8.	75 21 46,63	46,49	+ 0,14	0,0196
9.	46 38 6,37	6,50	— 0,13	0,0169
10.	81 23 25,41	25,33	+ 0,08	0,0064
			Somme	3,9064.

La somme des carrés des différences en *b*) n'a que très peu diminué en comparaison de *a*). Il faut cependant remarquer qu'on est autorisé d'exclure l'angle 4., comme non pas directement observé, mais provenant de la combinaison de deux angles. Dans ce cas

la somme des M-T en *a*) devient.....— 0″,69
la valeur moyenne des M-T observés...— 0,077
la somme des carrés en a) se réduit à.....2,0430
la somme des carrés en *b*) se réduit à.....1,8039

et l'erreur probable d'un angle isolé se présente:

pour l'angle observé = 0″,228
pour l'angle corrigé = 0″,215.

15.

Comparaison des côtés identiques des triangles communs.

Jonction orientale.

	Martini. toises.	Tenner. toises.	M-T toises.
Roszani c-Szyszkow	10143,910	10143,965	— 0,055
Biszcza-Roszaniec	7624,432	7624,482	— 0,050
Szyszkow-Biszcza	6246,660	6246,688	— 0,028
Bukowina-Roszaniec	4426,977	4427,004	— 0,027
Somme ...	28441,979	28442,139	— 0,160

Jonction occidentale.

Oycow-Koniusza	14954,897	14954,796	+ 0,101
Koniusza-Wanda	8714,252	8714,200	+ 0,052
Wanda-Oycow	11616,253	11616,153	+ 0,100
Oycow-Sieborowice	8332,590	8332,571	+ 0,019
Sieborowice-Krakau	6425,497	6425,507	— 0,010
Krakau-Oycow	9146,582	9146,564	+ 0,018
Sieborowice-Krakus	7690,060	7690,046	+ 0,014
Krakus-Oycow	10458,664	10458,646	+ 0,018
Somme ...	77338,795	77338,483	+ 0,312

En employant les deux sommes des côtés identiques dans les deux jonctions, nous trouvons comme résultat:

pour la jonction orientale, $M-T = -\frac{1}{177760} = -0{,}000005625$

" " " occidentale, $= +\frac{1}{247900} = +0{,}000004034$

Différence ... $\frac{1}{103530} = 0{,}000009659$

Cette différence d'un cent millième est le produit de deux sources d'erreurs, savoir:

1) l'inexactitude commise dans la mesure des trois bases;
2) l'imperfection restante dans les angles des triangles qui ont effectué les deux jonctions, à partir des bases.

Examinons, au moins approximativement, le second point. Il y a en tout à-peu-près 40 triangles employés entre les trois bases. Mettons que ces triangles aient jouis tous de la forme la plus parfaite, équilatère. Dans ce cas, sur chaque triangle isolé tomberait une imperfection de

$$0{,}000009659 : \sqrt{40} = 0{,}000001527 = \frac{1}{654800}.$$

Une petite analyse montre qu'à cette petite fraction répond une erreur probable de 0″,230 d'un angle mesuré. Cette erreur a été trouvée plus haut = 0″,215. Donc la différence indiquée est exactement celle, à laquelle il fallait s'attendre, par suite de l'imperfection qui restait dans les angles déjà corrigés à 180° + l'excès. Elle est même plus petite, en considérant que la forme parfaite des triangles équilatères n'existe pas dans la réalité. Nous en tirons la conclusion importante *qu'il n'y a, dans l'opération de jonction, aucun indice d'une imperfection commise dans la mesure des trois bases.* Cette nouvelle expérience me paraît d'une haute valeur, du moins pour les opérations géodésiques de Russie, dans lesquelles on fait la compensation des triangles de sorte, que toutes les bases sont exactement représentées, principe qui réclame une supériorité éminente de la mesure des bases.

Il reste à considérer ce que la comparaison des côtés identiques indique sur l'exactitude du rapport supposé entre les règles dont on s'est servi de part et d'autre, pour la mesure des bases. En réunissant les deux fractions

$$-0{,}000005625 \text{ et } +0{,}000004034$$

à une moyenne, nous obtenons

$$-0{,}0000007955 = -\frac{1}{1257000}$$

qui est tellement petite, qu'elle paraît accuser une exactitude presque parfaite du rapport. Mais il faut avoir égard à ce que cette fraction est sujette à une erreur probable de

$$\mp 0{,}000003339 = \mp \frac{1}{300000}.$$

D'où suit que la jonction admet cette dernière inexactitude probable du rapport entre les deux appareils employés à la mesure des bases, mais qu'elle indique une exactitude plus grande entre le klafter de Vienne et le sajène employé par M. de Tenner, et qu'elle constate une exactitude bien en dedans de $\frac{1}{300000}$ pour le rapport du klafter de Vienne à l'étalon de Poulkova. C'est ici que l'importance des comparaisons faites entre la copie du klafter de Vienne et l'étalon de Poulkova se prononce. Avec le rapport donné par M. Stampfer, entre le mètre et le klafter, il y aurait eu une différence de $\frac{1}{9900}$ dans les côtés identiques; ou M-T = — 2,87 toises dans la somme des 4 côtés de la jonction orientale, et M-T = — 7,81 toises pour la somme des 8 côtés de la jonction occidentale; différences qui sont actuellement — 0,16 et + 0,31 toises.

16.

Comparaison des hauteurs absolues des différentes stations de jonction au-dessus du niveau de l'Océan.

NB. Les hauteurs de M. de Tenner sont relatives au niveau de la Mer Baltique, celles de M. de Mariéni au niveau de la Mer Adriatique. Les chiffres se rapportent aux pointes des signaux.

Jonction orientale.

	Mariéni. toises.	*Tenner.* toises.	*M-T* toises.
Biszcza ...	116,73	117,95	— 1,22
Bukowina.	131,48	132,72	— 1,24
Roszaniec.	138,17	139,26	— 1,09
Szyszkow.	119,21	120,27	— 1,06
		Moyenne ...	— 1,152

Jonction occidentale.

	Mariéni. toises.	*Tenner.* toises.	*M-T* toises.
Koniusza..	175,44	177,27	— 1,83
Oycow....	252,04	253,69	— 1,65
Sieborowice	171,96	173,67	— 1,71
Krakus...	140,91	142,56	— 1,65
Krakau...	117,60	119,36	— 1,76
Wanda....	124,82	126,60	— 1,78
		Moyenne...	— 1,730

1) En comparant en premier lieu les deux moyennes

toises.

(M-T) or. = — 1,15
(M-T) occ. = — 1,73,

nous rencontrons une différence moyenne de 0,58 toises = 3,5 pieds, pour le niveau relatif des stations appartenantes aux deux jonctions. Cette différence est le produit de deux opérations de nivellement trigonométrique, qui réunissent des stations éloignées entre elles en ligne droite, par moyenne, de 175 verstes = 25 milles géographiques. Mais les polygones des deux nivellements ont parcouru, entre les deux terrains de jonction, des distances bien plus considérables, du côté autrichien d'au-delà de 30 milles, du côté russe de près de 70 milles géographiques. Sans considérer ce détour, nous avons le fait, que la différence de niveau entre des stations éloignées de 25 milles géographiques a été évaluée, par deux opérations absolument indépendantes et qui suivaient de diverses lignes, avec un accord de 0,58 toises, auquel correspond dans chaque opération isolée une erreur moyenne de 0,41 toise, une erreur probable de 0,28 toise = 1,7 pieds.

2) La moyenne des deux M-T est 1,44 toises. C'est d'autant, qu'en moyenne, les hauteurs absolues trouvées par M. de Tenner sont plus grandes que celles données par M. de Mariéni. Si les opérations de nivellement étaient d'une exactitude absolue cette différence indiquerait un niveau de la Mer Adriatique plus élevé de 1,44 toises, que celui de

la Mer Baltique. Mais quelle est la précision de ce chiffre? Pour répondre à cette question, profitons de la donnée que la jonction a fournie, savoir d'une précision moyenne de 0,41 toises pour une distance de 25 milles. Entre la Mer Adriatique près de Fiume et la Mer Baltique près de Polangen, la ligne droite est de 180 milles géographiques ou 7,2 fois plus grande. Il faut par conséquent admettre une différence de $0{,}41 \cdot \sqrt{7{,}2} = 1{,}10$ toises, comme produite par l'accumulation des erreurs d'opération; et même une plus grande, en considérant qu'il peut guère être supposé, que toutes les différentes portions du nivellement total aient pu être exécutées avec le même degré de précision dont jouissent les opérations de jonction. Cette remarque est constatée par le fait que M. de Tenner donne l'erreur probable de ses hauteurs au dessus de la Baltique = 1,35 toises pour la branche orientale, = 1,38 toises pour la branche occidentale, pour la moyenne = 0,97 toises. Prenons la même incertitude pour la ligne du nivellement autrichien, depuis l'Adriatique, et nous aurons une erreur probable de $0{,}97 \cdot \sqrt{2} = 1{,}37$ toises, ou une différence moyenne de 2,03 toises à attendre dans les résultats des deux nivellements, différence qui dépasse celle qui a été observée = 1,44 toises.

3) La conclusion à tirer est, qu'il n'y a, dans le nivellement autrichien-russe, entre la Mer Adriatique et la Mer Baltique, aucun indice d'une différence de niveau pour ces mers. Une branche du nivellement trigonométrique de M. de Tenner a déjà atteint la Mer Noire, au nord de l'embouchure du Danube, et ce nivellement total n'accuse qu'une différence de 0,53 toises entre les deux mers, le niveau de la Baltique étant plus élevé; différence qui doit être regardée comme nulle à côté des erreurs qui restent dans le nivellement. Donc, les deux nivellements, exécutés de la part des gouvernements autrichien et russe, ont décidé qu'il n'existe aucune différence essentielle entre les niveaux des trois bassins, de la Méditerranée, de la Mer Noire et de la Baltique, et cette identité des niveaux n'est sujette qu'à une incertitude d'à-peu-près deux toises. Aujourd'hui les géomètres suédois s'occupent à achever l'opération de ni-

vellement entre le Golfe Bothnique et la Mer Glaciale, en employant les stations trigonométriques des triangles suédois-norvégiens de la mesure de l'arc du méridien, entre Tornea et Fuglenaes près du Cap-Nord. Ce travail ajoutera aux comparaisons antérieures du niveau des trois grands bassins, celle du niveau de l'Océan ouvert.

17.

La hauteur absolue du point zéro du baromètre de Pistor, établi à l'Observatoire de Cracovie, a été évaluée

par M. de Mariéni = 110,65 toises
par M. de Tenner = 112,41 »

Moyenne ... = 111,53 toises.

Onze années d'observations faites à l'aide de ce baromètre ont donné la hauteur moyenne du mercure = 329,380 lignes de France à 0° du mercure, et pour une température moyenne de l'air = + 7°,39 R. En combinant ce chiffre avec la hauteur moyenne du baromètre au bord de l'Océan d'après M. Encke = 336,137 lignes, à 0° du mercure et pour la température moyenne de l'air = + 7°,29 R., M. Weisse, directeur de l'Observatoire de Cracovie, a calculé la hauteur absolue de son baromètre = 106,25 toises, trop faible de 5,28 toises relativement à la moyenne des nivellements trigonométriques. M. de Tenner a fait exécuter une comparaison entre les baromètres des observatoires de Poulkova, de Varsovie et de Cracovie, comparaison faite par l'astronome M. Prazmovski, attaché à l'Observatoire de Varsovie et à la mésure du royaume de Pologne, à l'aide de deux baromètres de voyage, transportés à différentes reprises de Varsovie à Cracovie et à Poulkova. Cette comparaison a conduit à une correction de — 0,44 lignes à donner aux indications du baromètre de Cracovie, pour répondre aux indications corrigées du baromètre de Paulsen à Poulkova. La correction de ce dernier baromètre + 0,22 ligne, donnée par feu M. Schumacher, a été constatée plus tard comme parfaitement exacte à l'aide d'une suite de comparaisons sympiézométriques avec le baromètre nor-

mal de Girgensohn à l'Observatoire central, baromètre de 0,85 pouce de diamètre intérieur du tube. La correction — 0,44 lignes correspond à un changement de hauteur de + 5,67 toises qui, appliquée à 106,25 toises, conduit à la hauteur barométriquement déterminée de Cracovie = 111,92 toises. Celle-ci ne diffère donc maintenant que de 0,29 toises de la hauteur trigonométrique. En prenant la correction du baromètre de Cracovie = — 0,41 ligne à la place de — 0,44 ligne, nous aurons un accord parfait. La vraie signification de cette déduction me paraît être la suivante. Les 11 années d'observations barométriques de M. Weisse à Cracovie, combinées avec la hauteur trigonométriquement déterminée, indiquent une correction de 0,03 ligne à porter sur la hauteur moyenne du baromètre au bord de la mer = 336.14 lignes, donnée par M. Encke; mais dans cette correction il y a une incertitude de 0,155 lignes, correspondante à l'incertitude de 2 toises sur la hauteur absolue de Cracovie.

18.

Comparaison des azimuts des côtés identiques.

Jonction orientale.

		Azimut observé.		
Côté.		*Mariéni.*	*Tenner.*	*M-T*
Roszaniec-Szyszkow..	102° 0′	50″,20	54″,32	— 4″,12
Roscaniec-Bukowina..	120 23	20,45	25,40	— 4,95
Roszaniec-Biszcza....	139 56	34,11	38,18	— 4,07
			Moyenne...	— 4,38

Jonction occidentale.

Oycow-Wanda.....	309 20	9,97	10,84	— 0,87
Oycow-Krakau	327 52	44,59	43,80	+ 0,79
Oycow-Krakus.....	331 41	37,23	35,80	+ 1,43
Sieborowice-Krakus..	23 50	12,49	10,98	+ 1,51
Sieborowice-Krakau..	29 51	50,92	49,82	+ 1,10
Wanda-Koniusza.....	223 8	29,00	30,13	— 1,13
			Moyenne...	+ 0,47

Il y a donc, pour la jonction orientale, une différence moyenne de $4''{,}4$ entre les azimuts respectifs; pour la jonction occidentale, la différence disparaît presque totalement. Or les recherches de Bessel sur la figure de la Terre (Astr. Nachr. No. 438) ayant démontré que toute latitude observée est sujette à une erreur accidentelle moyenne de $\mp 2''{,}64$, par suite des déviations locales dans la direction de la pesanteur: il s'en suit que tout azimut observé est exposé, par cette même raison, à une incertitude moyenne $\mp 2''{,}64 . \sec \varphi$, ou, pour $\varphi = 50^0\ 14'$, de $\mp 4''{,}12$. Deux azimuts comparés sont sujets à une différence moyenne de $\mp 4''{,}12 . \sqrt{2} = \mp 5''{,}83$. Les azimuts des deux jonctions présentent, par conséquent, un accord en dedans des différences que produisent les irrégularités dans la direction de la pésanteur. Donc une déviation relative dans la direction des triangles, par suite d'une accumulation des erreurs des angles mesurés, n'est nullement énoncée par les azimuts.

19.

Comparaison des latitudes et longitudes des stations de jonction.

NB. M. de Tenner a employé comme point de départ la longitude de Varsovie $= 1^h\ 14^m\ 45^s{,}70$. Le calcul définitif des expéditions chronométriques ayant donné entre Greenwich et Varsovie $1^h 24^m\ 7^s{,}28$, il s'en suit, avec la différence de $9^m\ 21^s{,}60$ entre Greenwich et Paris, Varsovie $1^h\ 14^m\ 45^s{,}68$ à l'est de Paris. Pour l'uniformité des chiffres, j'ai diminué les longitudes de M. de Tenner de $0''{,}30$ en arc.

Jonction orientale.

	Latitude			*Longitude*		
	Mariéni.	*Tenner.*	*M-T*	*Mariéni.*	*Tenner.*	*M-T*
Biszcza	50°25′54″,05	53″,81	+0″,24	20°18′17″,05	8″,73	+8″,32
Bukowina ..	50 22 7,28	7,03	+0,25	20 19 65,01	56,71	+8,30
Roszaniec ..	50 19 46,16	45,91	+0,25	20 26 21,71	13,41	+8,30
Szyszkow...	50 21 58,23	57,99	+0,24	20 9 63,04	54,73	+8,31
		Moyenne ...	+0,245		Moyenne ...	+8,307

Jonction occidentale.

	Latitude			*Longitude*		
	Mariéni.	*Tenner.*	*M-T*	*Mariéni.*	*Tenner.*	*M-T*
Koniusza . . .	50°10′54″,34	56″,41	— 2″,07	17°53′43″,99	35″,27	+ 8″,72
Oycow.	50 11 59,06	61,13	— 2,07	17 29 17,73	9,01	+ 8,72
Sieborowice.	50 9 41,73	43,80	— 2,07	17 42 28,03	19,32	+ 8,71
Krakus	50 2 17,82	19,90	— 2.08	17 37 23,57	14.86	+ 8,71
Krakau	50 3 50,05	52,13	— 2,08	17 37 14,42	5,71	+ 8,71
Wanda.	50 4 13,58	15,65	— 2,07	17 43 58,49	49,76	+ 8,73
		Moyenne . . .	— 2,074		Moyenne . . .	+ 8,717

1) L'accord des M-T isolés, dans chacune des 4 groupes, prouve l'exactitude des calculs exécutés indépendamment de part et d'autre.

2) Les deux différences moyennes des latitudes, M-T = + 0″,245 et M-T = — 2″,074, sont en dedans des irrégularités que produisent les déviations fortuites dans la direction de la pesanteur.

3) La moyenne des M-T en longitude, de la jonction occidentale, donne une correction, de — 8″,72 en arc ou de — 0ˢ,58 en temps, à porter sur la longitude de l'Observatoire de Cracovie, pour qu'elle corresponde à la longitude de Varsovie et de Poulkova. M. Weisse ayant déterminé sa longitude = 1ʰ 10ᵐ 28ˢ,99 à l'est de Paris, il faut la mettre maintenant à 1ʰ 10ᵐ 28ˢ,41 de Paris ou 1ʰ 19ᵐ 50ˢ,01 à l'est de Greenwich. Ceux qui connaissent la difficulté de la détermination d'une longitude par la voie purement astronomique, à l'aide des éclipses, des occultations, et des passages de la Lune, apprécieront le mérite de l'exactitude, j'ose dire inattendue, avec la quelle M. Weisse avait déterminé la longitude de l'Observatoire de Cracovie.

4) Les deux équations longitudinales M-T = + 8″,307, pour les stations orientales, et M-T = + 8″,717, pour les stations occidentales, conduisent, par la différence de 0″,410, à une conclusion très-intéressante. Pour fixer les idées, choisissons les deux stations qui sont les plus éloignées en longitude, et en même temps les moins distantes en latitude; nous trouvons:

Roszaniec — Oycow =

	en longitude	en latitude
selon M.	+ 2° 57′ 3″,98 = 10623″,98	+ 0° 7′ 47″,10 = 467″,10
selon T.	4,40 = 10624,40	7 44,78 = 464,78

On voit que la ligne géodésique qui réunit ces deux stations, suit de très près le parallèle. Abstraction faite maintenant de la différence de 2″,32 en latitude (parce qu'elle doit être regardée comme accidentellement produite par les irrégularités dans les trois latitudes qui ont servi de points de départ), nous avons une différence de 0″,42 sur 10624″,2 du parallèle compris entre les deux stations, pour la latitude moyenne 50° 16′. Dans les tables sur les dimensions de l'ellipse terrestre, publiées par M. Encke (Berl. Jahrbuch 1852), 1″ du parallèle de 50° 16′ de latitude est = 10,16022 toises. Nous avons donc une différence de 4,27 toises sur un arc du parallèle de 107943 toises, ou de $\frac{1}{25300}$. Cette différence doit être uniquement attribuée à l'accumulation des erreurs inévitables dans les opérations purement géodésiques, mesures des angles et des bases, car les erreurs des azimuts et des latitudes sont à-peu-près indifférentes, pour une direction dans le sens du parallèle. Au premier jugement on pourrait être frappé d'une différence de cette grandeur. Mais considérons de plus près la vraie nature de cette différence, et nous trouvons qu'elle est le produit d'une opération qui, partant d'Oycow, parcourt 30 milles géographiques en Autriche jusqu'à Roszaniec, puis retourne à Oycow, par un détour d'au moins 75 milles géographiques en Pologne, en passant par Varsovie et Czenstochovo. L'étendue totale de l'opération est par conséquent de 105 milles géographiques ou d'environ 400000 toises, et la différence de 4,27 toises ne s'éléve qu'à $\frac{1}{94000}$. Je crois que cette dernière analyse contient la preuve la plus concluante sur l'exactitude admirable des deux opérations géodésiques. En effet, c'est un problème extrêmement difficile que d'atteindre, par une suite d'au-delà de cent triangles, une exactitude de $\frac{1}{94000}$ dans

l'étendue totale de plus de 100 milles géographiques. La réussite doit être attribuée aux grands soins, voués par les dirigeants à toutes les parties de l'opération, et à l'assistance de quatre bases.

Dans l'exposé qui précède, j'ai examiné les travaux géodésiques, exécutés conformément à la convention de Tarnogrod, sous le point de vue double, de l'importance et signification scientifique et de la perfection intrinsèque. Cet examen a conduit à des résultats tellement satisfaisants, que je n'hésite point de déclarer ma conviction intime, basée sur une étude détaillée et consciencieuse, que cette opération présente, dans toutes ses parties sans exception, une perfection qui a surpassé mon attente de beaucoup, et qui la rend un monument aussi éminent dans les annales de la haute géodésie, qu'honorable au plus haut degré aux deux dirigeants, M. le lieutenant-général de Tenner et M. le colonel de Mariéni, et à tous ceux qui ont participé à l'exécution.

L'importance scientifique de cette opération saute aux yeux. La réunion des travaux géodésiques occidentaux et orientaux de l'Europe, à un seul grand système, ouvre la perspective de connaissances précises sur la courbure des parallèles de l'Europe, fondées sur des mesures d'une étendue colossale, et qui seront d'une certitude non atteinte jusqu'à présent. C'est au gouvernements éclairés de la Russie et de l'Autriche également empressés à favoriser les progrès des sciences exactes, qu'est due la réalisation d'une entreprise des plus importantes et des plus fertiles dans ses conséquences.

Je me suis fait un devoir de rendre compte à l'Académie Impériale de St.-Pétersbourg des résultats plus que satisfaisants, auxquels m'a conduit l'examen des dites opérations. Je me réjouis de pouvoir être, en cette occasion, l'interprète de l'Académie, pour offrir aux directeurs de ces travaux les félicitations de ce corps savant, des beaux succès dont leurs efforts ont été couronnés.

Poulkova, le 1 mars 1852.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XI. No.* 8 et 9.)

$\frac{3}{15}$ Décembre 1852.

Extrait d'une lettre de M. LASSELL à M. Otto Struve.

(Avec une planche.)

La Valette, Malte, 19 novembre 1852.

..... Peut être avez vous déjà appris que je suis venu ici avec mon télescope de vingt pieds, dans le but de profiter du ciel admirable et de la latitude plus méridionale de cette île, pour observer particulièrement les planètes Neptune, Uranus et Saturne. Je suis arrivé ici le 24 août et j'ai obtenu tout de suite, de la part des autorités locales, la permission de construire un observatoire sur le bastion nommé «le Chevalier de St.-Jean» au bout de la rue Forni, dans l'endroit de la ville, d'après mon jugement, le plus favorablement situé pour ce but. A peine l'érection de l'édifice fut-elle achevée et les observations eussent-elles commencé, que l'île fut dévastée par un terrible «Gregale» ou vent du nord-est et qui, en produisant en même temps des naufrages dans le port et des dommages aux forts, déplaça en partie le toit de mon observatoire, de sorte que je ne pouvais commencer les observations régulières que le 28 octobre. Depuis ce temps, j'ai travaillé régulièrement, vu que presque chaque nuit sans exception le ciel était beau et que l'état de l'atmosphère, sous le rapport de la tranquillité des images

et de la transparence, admettait en général les plus délicates observations. Comme une preuve de ce que je viens de dire, je n'ai qu'à citer le fait que, depuis le 28 octobre jusqu'au 16 novembre, j'ai obtenu 15 séries de mesures de la position et de la distance du satellite de Neptune, en l'observant dans toutes les parties de son orbite, même aux époques de son plus petit éloignement de la planète, dans une distance des centres de 4″ à 5″ ou à peine plus que de 4″. J'ai obtenu dans la même période 14 séries de mesures, en position et en distance, des deux satellites les plus luisants d'Uranus, ainsi que plusieurs mesures des deux nouveaux satellites, lesquels pourtant, pour être mesurés, réclament un état excellent de l'atmosphère et l'absence de la Lune — à la condition toutefois qu'ils ne soient pas trop près de la planète. D'ordinaire je vois tous les 4 satellites en même temps dans le champ de la lunette, sans avoir besoin d'exclure la lumière de la planète, et par un grossissement de 1018 fois. C'est ainsi que, par un état du ciel ordinaire, je puis estimer toujours les positions et les distances, ce que je n'ai jamais pu faire en Angleterre. Vous concevez que je suis enchanté du climat dont je ne puis presque pas exprimer toute mon admiration. D'après mon avis, c'est certainement l'endroit le plus favorable où un astronome doit se rendre, s'il veut travailler beaucoup en peu de temps et sans désagrément ou privation quelconques.

Cependant la supériorité des observations que je fais ici, ne doit pas être attribuée uniquement à la meilleure qualité du climat et de l'atmosphère, mais, aussi en partie au moins, à l'excellente figure du miroir de mon télescope. En printemps de cette année, j'appliquais une modification à la machine qui polit mes miroirs, dont j'esperais obtenir des images plus précises. Ayant repoli les miroirs avant de venir ici, je me suis réjoui de trouver que ce changement était couronné du plus parfait succès. Par les essais préalables et peu nombreux que je pouvais faire sur la figure ou les surfaces des miroirs, avant de quitter la maison, j'étais déjà préparé à les trouver à un très haut degré de perfection, et je suis bien heureux de pouvoir dire, qu'après un usage plus étendu

(au moins d'un de ces miroirs), l'opinion conçue de leur supériorité s'est confirmée entièrement. En effet, je n'ai pas été en état d'y découvrir la plus petite déviation de la figure régulière. Les contours précis qu'ils montrent d'Uranus, de Neptune et de Saturne, regardés par des grossissements que je n'ai jamais employés en Angleterre par exemple de 650, 778 et même quelquefois de 1018 fois, en sont des preuves satisfaisantes, et le maximum du grossissement à employer n'est pas limité par un manque de précision dans les images, mais plutôt par les perturbations atmosphériques qui deviennent intolérables. Pour prouver que les miroirs admettent les grossissements les plus forts, je cite seulement le fait que, le 30 octobre, à une époque où le satellite de Neptune était dans sa plus petite distance, je n'étais pas en état de le voir avec les grossissements ordinaires du micromètre de 614 et de 760 fois et que ce n'est qu'après avoir essayé une suite de lentilles simples dont les grossissements augmentaient toujours, qu'il fut reconnu par un grossissement de 1917 fois.

Vous avez raison de supposer que la planète Saturne occupera une portion considérable de mes recherches et de mon attention, et j'ajoute ici une esquisse qui représente, aussi bien que je l'ai pu faire, tout ce que j'ai pu reconnaître sur la surface de cette planète. Mais en vérité, je ne puis vous donner qu'une *idée* de ce que je vois, car il est tout au dessus de mes forces de représenter tous les détails du phénomène et particulièrement l'aspect délicat des bandes.

Peut-être le phénomène le plus intéressant que j'aie observé, est celui de *la transparence évidente de l'anneau obscur*, la surface de la planète et ses contours étant distinctement visibles à travers cet anneau dans l'endroit où il couvre le corps de la planète. Rien, à ce qu'il paraît, ne représente mieux les phénomènes que je vois, que si l'on s'imagine, au lieu de l'anneau *C*, un tissu de crêpe attaché au bord inférieur de l'anneau *B* et qui laisse passer en partie la lumière de la planète et forme ainsi, en quelque sorte, un contraste avec les autres parties de l'anneau qui se projettent contre le ciel noir. Cet appendice merveilleux serait-il peut-être une sorte de nébulosité matérielle qui forme un chaînon entre les nébulosités plus déli-

cates de l'univers et les corps solides de notre système planétaire?

Je ne puis voir rien qui ressemble à une division de l'anneau extérieur *A*; mais il y a, au milieu de cet anneau, une ombre intense, un peu plus foncée que la partie la plus noire de l'anneau *B* près du bord de *C*. Je l'ai constamment observée pendant les nuits favorables, de sorte que je suis sûr que ce n'est pas une illusion. La largeur en est à-peu-près le tiers de la largeur de *A*. La teinte foncée de l'anneau *B* s'étend à moins d'un tiers ou à-peu-près à un quart de sa largeur totale, dans la direction de *A*.

Au commencement du mois d'octobre, je remarquai une tache oblongue, à-peu-près comme une ligne, apparemment sur l'anneau près de la division principale, là où elle se trouve en contact avec la partie Sud-Est du limbe de la planète, tandisque l'ombre de la planète se présentait distinctement sur la partie Sud-Ouest des anneaux. D'abord, je ne pouvais trouver aucune explication de ce phénomène; mais après l'opposition de la planète et depuis que l'ombre de la planète s'est montrée du côté Sud-Est, à-peu-près le même phénomène s'est présenté du côté Sud-Ouest, dans l'endroit occupé auparavant par l'ombre, de sorte qu'il paraît maintenant que cette tache était le germe de l'ombre à venir, et qu'en effet l'ombre devient visible d'un bord du limbe avant d'avoir quitté l'autre bord. Je ne comprends pas comment cela peut arriver. Le Soleil étant maintenant plus élevé au dessus du plan des anneaux que la Terre, ce phénomène paraît être impossible.

L'aspect de la planète elle-même offre beaucoup plus de détails que je ne l'ai jamais cru. Les bandes se trouvent en si grand nombre et si délicatement nuancées, tant en couleurs qu'en contours, que je ne puis point espérer vous en décrire même imparfaitement la beauté; mais si vous voulez comparer mon esquisse grossière avec la description, vous acquerrez peut-être une idée générale de leur disposition et forme. En procédant du bord méridional de l'anneau *C* dans la direction Sud, il y a

1. une bande brillante, égale en largeur de très près à la somme des largeurs des anneaux *A* et *B* à l'endroit où ils passent par le corps de la planète;
2. la bande principale d'une couleur rouge foncée, un peu plus large;
3. une étroite bande claire, mais moins brillante que la première;
4. une autre bande, couleur jaunâtre-rouge, d'une largeur environ moitié de celle de la première bande rouge;
5. une bande obscure extrèmement étroite et bien définie, dont les bouts touchent le milieu de l'anneau *B*, au point de contact avec le limbe. Cette bande forme le commencement de la région polaire dont la couleur passe par degrés à un vert bleuâtre;
6. une bande plus large et plus claire;
7. une autre bande extrèmement étroite et de couleur bleu-foncée;
8. une autre bande claire;
9. la plus foncée des bandes bleues. Elle forme la périphérie de la région polaire qui se présente comme un disque plus clair. Le fond de cette région polaire devient, par degrés, plus foncé vers le pôle, et ce n'est que par le contraste avec la bande très foncée qui l'entoure, qu'elle se manifeste. En supposant donc que les parties plus claires forment la surface de la planète elle-même, il y a 5 bandes différentes et plus foncées, dont deux sont rouges et trois vert-bleuâtres. La plus méridionale de celles-ci présentait la majeure partie de sa circonférence totale; j'estimai la partie visible à trois quarts du cercle entier.

La largeur des anses de l'anneau *C* me paraît confirmer, aussi parfaitement qu'une estimation peut le donner, la détermination que vous en avez obtenue; elle occupe 0,56 de l'espace entier *ad* de votre dessin. J'ai l'intention de commencer sans délai une série de mesures micrométriques sur les différentes dimensions des anneaux, quoique je connaisse bien les difficultés que présente cette détermination. La description que je vous ai faite des bandes de Saturne cor-

respond à la période entre le 4 et le 13 novembre, et plus particulièrement à la dernière date.

Je passe maintenant à la communication la plus merveilleuse et peut-être la plus inexplicable que j'ai à faire — savoir que pendant toutes mes observations je n'ai jamais été en état de voir la moindre trace de la division de l'anneau obscur, que l'année passée vous avez dessiné si distinctement et mesuré avec vos micromètres; et cela, par des circonstances optiques incomparablement supérieures à toutes celles que j'ai jamais vues en Angleterre. Je ne puis voir non plus aucune division entre *B* et *C*, telle qu'elle fut observée par M. Dawes et non plus une division de l'anneau obscur en deux anneaux concentriques dont l'intérieur était le plus faible, ainsi que l'a décrit notre ami commun (M. Dawes). Tout l'anneau obscur me paraît d'une couleur uniforme grisâtre, terminé distinctement sur les deux bords, intérieur et extérieur, eu égard au contraste plus fort qui doit avoir lieu sur le bord extérieur, par le contact avec l'anneau luisant *B* Je ne puis ajouter aucun commentaire à cette anomalie étrange .....

—

Remarques sur la lettre de M. Lassell.

En communiquant à l'Académie l'extrait précédent de la lettre intéressante de M. Lassell, j'ai l'honneur d'ajouter encore quelques remarques.

Plusieurs fois, dans le courant de cet automne, j'ai regardé Saturne par la grande lunette de Poulkova et j'étais frappé de ne plus pouvoir discerner la division de l'anneau obscur, que, l'année passée, j'avais observée distinctement et mesurée à différentes reprises à l'aide du micromètre, et qui en outre avait été reconnue par M. Dawes déjà en hiver 1850 — 51. Je n'osais cependant me prononcer positivement sur un changement réel dans la constitution des anneaux obscurs, parce que toutes les observations de cet automne avaient été moins sûres, à cause de l'état continuellement très défavorable des images. J'attendais donc avec impatience un ciel favorable pour constater la remarque. Jusqu'ici cette occasion ne s'est

point prêtée, mais en attendant, voilà les observations de M. Lassell, exécutées avec son excellent télescope et par le ciel admirable de Malte, qui viennent de décider la question. M. Lassell, n'a pu voir aucune trace d'une division sur l'anneau *C* et, par conséquent, nous devons conclure qu'elle n'existe plus dans le même état que l'année passée, et que, dans le courant d'une seule année, la constitution de ces corps a subi un changement essentiel. Je remarque à cette occasion que la différence entre les observations de M. Dawes de l'hiver 1850 à 51 et les miennes de l'automne suivant, faites des deux côtés sur la division des anneaux obscurs, m'avaient déjà engagé à dire, dans mon *Mémoire sur les dimensions des anneaux de Saturne* pag. 5, «qu'elle me paraît trop forte pour ne pas exciter au moins le soupçon d'un changement réel dans le système des anneaux obscurs». Ce soupçon est aujourd'hui un fait indubitable.

Cette disparition de la division des anneaux obscurs paraît être remarquée également en Angleterre par M. Dawes. Je viens de recevoir aussi de sa part une lettre accompagnée d'un dessin soigné du système de Saturne, fait par une belle nuit de septembre. Dans ce dessin il n'y a aucune indication de la division.

Dans la même lettre, M. Dawes écrit que les observations faites par lui-même paraissent constater la transparence de anneaux obscurs, observée par M. Lassell. Le même phénomène a été observé également, et même avant M. Lassell, par le Capitaine Jacob, directeur de l'Observatoire de Madras, de sorte qu'il n'y a plus raison de mettre en doute la réalité du phénomène. M. Dawes, en me communiquant ses observations, fait la remarque judicieuse, qu'en effet la matière dont ces anneaux sont composés, doit être extrêmement mince, vu que la lumière du Soleil, pour rendre perceptible le corps de la planète à travers les anneaux, les a dû traverser deux fois.

Pendant les observations de l'année passée je n'ai pas remarqué cette transparence. Je conviens que je n'y ai pas fait une attention particulière; mais ne serait-il pas possible que la transparence observée cette année par trois différents

astronomes, et qui n'a été remarquée par aucun astronome dans les deux années précédentes, soit produite par les changements rapides dans le système de ces anneaux, changements dont nous avons maintenant les preuves directes?

A cette occasion, j'ose diriger l'attention de l'Académie sur les rapports de l'Association Britannique qui s'est réunie cette année à Belfast en Irlande. Parmi les propositions recommandées par ce congrès savant, se trouve, entre autres, la suivante:

«De présenter à la Société Royale l'importance attachée par M. Otto Struve à la détermination de la «constante de l'irradiation pour l'objectif de Huyghens de 123 pieds de foyer.»

L'Académie se souviendra que c'était cet instrument de Huyghens dont s'étaient servis Pound et Bradley, dans les observations des diamètres de Saturne et de ses anneaux. Dans mes recherches sur le rapprochement des anneaux au corps de la planète, j'avais été obligé de faire des suppositions sur la quantité de l'irradiation de cette lunette, basées sur des remarques occasionnelles de Newton. Une nouvelle détermination de l'irradiation produite par cet objectif qui est aujourd'hui propriété de la Société Royale de Londres, servira, par conséquent, essentiellement à donner des valeurs plus exactes de la quantité du rapprochement de l'anneau vers le corps de la planète. Il est à espérer que, par suite de cette présentation, la Société Royale fera entreprendre une recherche convenable sur cet objet par quelqu'un de ces membres.

Poulkova ce 2 décembre 1852.

Otto Struve.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XI. No.* 10.)

Mélange de M. Lassell.

$\frac{11}{23}$ Mars 1853.

LETTRE DE M. LE PROFESSEUR TCHEBYCHEV À M. FUSS, SUR UN NOUVEAU THÉORÈME RELATIF AUX NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LES FORMES $4n+1$ ET $4n+3$.

La bienveillance avec laquelle vous avez toujours agréé mes recherches, m'engage à vous présenter un nouveau résultat, relatif aux nombres premiers, et que je viens de trouver. En cherchant l'expression limitative des fonctions qui déterminent la totalité des nombres premiers de la forme $4n+1$ et ceux de la forme $4n+3$, pris au-dessous d'une limite très grande, je suis parvenu à reconnaître que ces deux fonctions diffèrent notablement entre elles par leurs seconds termes, dont la valeur, pour les nombres $4n+3$, est plus grande que celle pour les nombres $4n+1$; ainsi, si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, inférieurs à une limite quelconque x, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n+1$, et que l'on divise ensuite cette différence par la quantité $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles, que ce quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra. Cette différence dans la répartition des nombres premiers de la forme $4n+1$ et $4n+3$, se manifeste clairement dans plusieurs cas. Par exemple, 1) à mesure que c s'approche de zéro, la valeur de la série

$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + e^{-19c} + e^{-23c} \ldots$

s'approche de $+\infty$; 2) la série

$f(3) - f(5) + f(7) + f(11) - f(13) - f(17) + f(19) + f(23) - \ldots,$

où $f(x)$ est une fonction constamment décroissante, ne peut être convergente, à moins que la limite du produit $f(x) \cdot x^{\frac{1}{2}}$, pour $x = \infty$, ne soit zéro. — Je suis parvenu à ces résultats en traitant une certaine équation, relative aux nombres premiers, et qui comprend, comme cas particulier, celle que M. A. de Polignac et moi, indépendamment l'un de l'autre, nous avons trouvée dans nos recherches sur les nombres premiers.

Agréez etc. Signé: P. Tchebychev.

Ce 10 mars 1853.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XI. No.* 13.)

$\frac{5}{17}$ November 1852.

Einige Geleitszeilen zu dem beifolgenden Entwurfe des Weges zwischen Kola und Kandalakscha; von Dr. A. Th. v. Middendorff.

(Mit einer Karte.)

Vor eilf Jahren legte Hr. v. Baer der Akademie das Original eines topographischen Entwurfes vor, welchen ich im Jahre 1840, während eines kleinen, quer durch das Innere des Russischen Lapplandes unternommenen Abstechers angefertigt hatte. Hr. v. Baer übergab zugleich der Akademie einen Auszug aus meiner gleichzeitig eingesandten Schilderung des Eigenthümlichen in jenem Entwurfe, nebst seinen eigenen Vermuthungen über den Weg, auf welchem sich mehrere gar grobe Fehler der neueren Karten Lappland's in selbige eingeschlichen haben mochten, und kündigte den bevorstehenden Stich meines Entwurfes an [1]). Dieser wurde auch bald darauf ausgeführt, jedoch unterblieb der Abdruck bis jetzt.

Trotz der sehr grossen Mangelhaftigkeit des in Rede stehenden Entwurfes zögere ich dennoch nicht, ihn sogar jetzt, nachdem volle zwölf Jahre seit seiner Skizzirung verflossen sind, zu veröffentlichen, da seitdem nicht nur noch immer

1) Bulletin scientifique publié par l'Académie Imp. des Sc. de St.-Pétersbourg, Tome IX, 1842, No. 211, p. 298.

keine genauere Darstellung der betreffenden Gegend erschienen ist, sondern sogar die inländischen gleich wie die ausländischen Kartographen bis auf den heutigen Tag fortfahren, die früheren vollkommen fehlerhaften Zeichnungen zu kopiren, obgleich Hr. v. Baer schon vor neun Jahren [2]) die wesentlichsten Berichtigungen, welche mein beiliegender Entwurf bringt, in ein von ihm herausgegebenes Kärtchen verjüngten Maassstabes hineingetragen hat. Ueberdies scheint mir die bevorstehende Herausgabe der lappländischen Reise Castrén's durch unsere Akademie meinem Unternehmen gegenwärtig auch einiges Interesse des Augenblickes zu gewähren.

Obgleich nun allerdings die oben angeführte «Anzeige» Hrn. v. Baer's, insbesondere aber ein von mir selbst im Jahre 1845 veröffentlichter ausführlicher Bericht [3]), als vorläufig gedruckte Texte zu dem beiliegenden kartographischen Entwurfe anzusehen sind, und obgleich ich auch in solchem Sinne auf die genannten Abhandlungen verweise, scheint es mir doch unumgänglich, folgende Erörterungen an diesem Orte hinzuzufügen.

Vor allem ist es mein Wunsch, diese meine Aufnahme des von Kola nach Kandalakscha führenden Weges vor Ueberschätzung zu sichern. Es dürfte nämlich Manchem bei Durchlesung des Beginnes der oben citirten Anzeige Hrn. v. Baer's so vorkommen, als hätte ich damals meinen Abstecher durch das Innere von Lappland mit der besonderen Absicht einer zu unternehmenden topographischen Aufnahme angetreten; wovon jedoch nicht die Rede sein konnte. Meine ganze Ausrüstung bestand nämlich aus meinem Doppellaufe nebst der Jagdtasche, welche letztere zwar einige kleine zoologische Reiseapparate enthielt, aber für den Zweck der

2) Baer und Helmersen, Beiträge zur Kenntniss des Russischen Reiches, 1843, achtes Bändchen, p. 263, Tab. V.

3) Bericht über einen Abstecher durch das Innere von Lappland, während der Sommer-Expedition im Jahre 1840; abgestattet von A. Th. v. Middendorff — in den Beiträgen zur Kenntniss des Russischen Reiches, von Baer und Helmersen, 1845, eilftes Bändchen, p. 138.

flüchtigsten Ortsaufnahme durchaus nichts mehr darbot, als einen gewöhnlichen kleinen Jagdkompass mit graduirtem Kreise (ohne Diopter). Alles, was ich also in Bezug auf die Aufnahme meines Weges thun konnte, beschränkte sich auf fleissiges Notiren jeder auffallender divergirenden Compassrichtung, die ich einschlug, nebst einer ohngefähren Abschätzung der jedes Mal zurückgelegten Entfernung, vorzugsweise nach der Uhr. Derart gelang es mir, wenigstens die Richtung des Laufes der Flüsse und der Seen, welche mein Weg verfolgte oder kreuzte, ziemlich brauchbar zu Papier zu bringen. Es lag mir aber freilich zu sehr am Herzen, eine Kontrolle über das Niedergezeichnete zu gewinnen, als dass ich mir nicht die Gelegenheit fernreichender Uebersichten zu Nutze gemacht hätte, welche mir drei der bedeutendsten Höhen versprachen, durch welche die übrigen Gebirgsverzweigungen überragt wurden, zwischen denen mein Weg führte. Die Ersteigung der drei nackten Kuppen Puáds Oáwenj, Úmpdyk Túntur und Shelésnaja Gora belohnte mich in reichem Maasse durch das befriedigendste Panorama, indem ich von jeder derselben eine grosse Strecke meines Weges übersah, und zwar jedes Mal sogar über die zuvor erstiegene und auch über die zunächst zu ersteigende Höhe hinaus, so dass ich also von diesen Höhen hinab die Hauptrichtungen meines Weges mit ziemlicher Genauigkeit entnehmen konnte.

In Folge dessen erklärt es sich nun, wie mein Entwurf später seine Probe bestand, d. h. leidlich genau in den Rahmen passte, welcher durch die astronomisch (von Lütke und Reinecke) bestimmten Endpunkte, Kola und Kandalakscha festgestellt wird.

Damit aber die Herausgabe des beiliegenden Entwurfes trotz der Flüchtigkeit desselben dennoch gebührend gerechtfertigt erscheine, ist es unerlässlich, dass ich einige Vergleiche zwischen meinen Befunden und den von denselben kaum glaublich abweichenden Angaben des Specialblattes der *Подробная Карта Россійской Имперіи* anstelle, welches letztere offenbar die Grundlage für die auf allen neueren Karten jetzt allgemein gebräuchlichen Darstellungsweisen der in Rede ste-

henden Landstrecke abgegeben hat. Ich glaube mich zu dem Ausspruche berechtigt, dass die von mir zurückgelegte Strecke in das eben genannte Specialblatt nach einer Skizze eingetragen worden, welche nicht ein Mal auf Autopsie beruhte. Wenigstens bietet uns nur diese Annahme einen Schlüssel zur Erklärung dessen, dass der Lauf des Kola-Flusses in jener Karte um beinahe einen rechten Winkel von seiner wahren Richtung abweicht; dass aus dem russischen Kol-Osero und aus dessen lappländischen Synonyme Kule-Jaur auf jener Karte zwei verschiedene Seen entstehen konnten u. s. w.

Wie sich erwarten liess, bietet die Configuration des Inneren vom Russischen Lapplande eine Wiederholung der benachbarten geognostischen Geschwistergegend — Finnland — dar, so dass eine genauere topographische Aufnahme des Russischen Lapplandes, statt der bisherigen plumpen Klekse, dem Auge dieselben bizarren, vielfach zerrissenen Umrisse zahlloser Seen darstellen würde, welche die Karte Finnlands auszeichnen. Ueberdies ergeben sich offenkundig die Seen des Russischen Lapplandes als die Ueberreste vorzeitlicher grösserer Gewässer, deren Hauptrichtung sich von Süd nach Nord zog; in genauer Uebereinstimmung mit den daselbst von Böhtlingk untersuchten Diluvialschrammen.

Es ist oft schwer, sich im Russischen Lapplande entschieden darüber auszusprechen, ob das Gewässer, das man befährt, ein etwas verbreiteter Fluss, oder ein See ist; ja, der Ausspruch darüber hängt nicht selten so sehr von beliebiger Ansichtsweise ab, dass eine derartige Verbreiterung der Niwa den Russen eine Flusskrümmung (Изгибъ oder Изгибо), den Lappen ein See (Ssala-Jaur) gilt. Alle Seen Lapplands, die ich befuhr, sind überaus seicht[4]). Der Murd-See hatte in seinem ganzen Verlaufe wenig über einen Fuss Tiefe, und sogar im grossen Imándra maass ich dort wo er sich in seiner Südhälfte zusammenschnürt, weniger als zwei Fuss; auch sollen, laut Aussagen der Eingeborenen, etwa zwei Klafter der

4) Aehnliches berichtete auch W. Böhtlingk aus dem westlichen Lapplande über den grossen Noto-See; vergl. Bulletin scientif. publié par l'Acad. de Sc. de St.-Pétersbourg, Tome VII, No. 8, 9.

Durchschnittsgrösse seiner bedeutenderen Tiefen entsprechen. Nur dem Pul-See sagte man an einzelnen Stellen eine Tiefe von 9 bis 10 Klaftern nach.

Die bisherigen Darstellungen fehlen durchgängig wider den eben besprochenen Charakter der Gewässer Lapplands, so dass z. B. namentlich, den neusten Karten zufolge, die Breite des Imándra sich zu dessen Länge durchschnittlich etwa wie 1 zu 5 verhält, statt, der Natur gemäss, wie 1 zu 15 bis 20. Ausserdem ist das Westufer des Imándra, dessen Anblick mir nach einem flüchtigen Hinblicke durch Schneegestöber entzogen wurde, vorzugsweise zerrissen und mit zahlreichen bewaldeten Inseln (Schären) besetzt.

Zu den wesentlichsten Irrthümern gehörte wohl die bisherige durchaus falsche Angabe über den Lauf des Kola-Flusses, der nicht von Ost nach West, sondern von Süd nach Nord fliesst, und dessen Quellen wir wahrscheinlich im Kao-See zu suchen haben, aus welchem sich ein kleines Gewässer in den Kola-See ergiessen soll. Ein Moosmorast, von wenig mehr als eine Werst Länge, der das Südende des Kola-Sees vom Nordende des Peless-Sees trennt, bildet die Wasserscheide zwischen dem Gebiete des Eismeeres einerseits, und dem des Weissen Meeres (Kandalakscha-Busen) andererseits.

Ein zweiter Fehler von Bedeutung ist der angebliche Ursprung des Umba-Flusses aus dem Imándra-See. Er soll sich, den bisherigen Darstellungen zufolge, nach einem Verlaufe von beiläufig 100 Wersten in den grossen Komb-See, und aus diesem in den Kandalakscha-Busen ergiessen. Statt dessen führt die Niwa den Ueberfluss des Imándra zum Meere. Auch versicherten mich die Lappen, dass sich kein Fluss von einiger Bedeutung von Westen her in den Imándra ergiessen soll, am wenigsten aber die Tumssa, wie es die Karten wollen, sondern dieser Fluss befinde sich, erzählten sie, an der Grenze Finnland's, und ergiesse sich in den Kówdo-See.

Den obigen Fehlern entsprechend, ist auch die Form und Stellung aller kleinern Seen falsch angegeben worden. So liegt z. B. der Peless-See in der Natur nordöstlich, statt nordwestlich vom Imándra, wie die Karten angeben, und

nicht nordöstlich, sondern südöstlich vom Kola-See; ferner liegt der Kola-See und auch der Pul-See nicht westlich, sondern nordwestlich vom Imándra u. s. w.

Was nun schliesslich den Post-Weg anlangt, der allerdings im Sommer und Winter wöchentlich von der Briefpost, und auch nicht selten von Beamten zurückgelegt wird, so stossen wir auch in dieser Beziehung auf bedeutende Fehler, welche unverändert in die im Jahre 1842 herausgegebene Post-Karte [5]) übergegangen sind. Heben wir Folgendes heraus: Die Stationen Kiza und Tschernorútschjevsskaja (auch Worónjerutschjevsskaja genannt), welche man theilweise zu Wasser erreicht, stehen auf der Karte entfernt von jeglicher Wasserverbindung; die Station Masseljsskaja befindet sich nicht am Imándra-See, wie die Karten zeigen, sondern etwa 20 Werst von ihm, am Kola-See; die Station Jekosstróvsskaja nicht am Südende des Imándra, sondern über 25 Werst nordwärts, am Westufer desselben; die Station Saschéjetschnaja nicht halbweges zwischen dem Imándra und dem Dorfe Kándalakscha, sondern am Südufer des Imándra.

In Bezug auf diesen Post-Weg ist jedoch zu bemerken, dass die Stationen zur Winterzeit etwas verlegt werden, und namentlich: 1) Kíza etwa 3 Werst flussaufwärts von der Sommerstation, auf das linke Ufer des Kola-Flusses, ohngefähr $1\frac{1}{2}$ Wert von diesem; 2) Tschernorútschjevsskaja, auch gegen 3 Werst, aber flussabwärts; 3) Masseljsskaja in den Pógosst (Kirchdorf) Másseljsskoj, am Másselj-See; 4) Woronjeosérsskaja einige Werst westwärts von der Insel Wyssókoj; 5) Jekosstróvsskaja in den Pógosst desselben Namens, der etwa 15 Werst westlich von der Sommerstation gelegen sein soll; 6) Saschéjetschnaja, gegen 3 Werst näher zu Kándalakscha als im Sommer.

Den Grund zu diesen Verlegungen der Winterstrasse geben eines Theiles bequemere Bahnstrecken ab, hauptsächlich

---

5) Почтовая Карта Россійской Имперіи, изданная Почтовымъ Департаментомъ по новѣйшимъ свѣдѣніямъ доставленнымъ отъ мѣстныхъ Губернскихъ Начальствъ, С. Петербургъ, 1842-го года.

aber gute Futterplätze für die Rennthiere. Erschöpfung des Rennthiermooses ist auch der Grund, weshalb frühere Pógosst-Plätze gegenwärtig mitunter verödet stehen sollen.

Die oben angedeuteten groben Fehler aller neueren Karten im Betreff der hier in Rede stehenden Wegestrecke setzen uns in Verwunderung, wenn wir mit Hrn. v. Baer auf einen vor mehr als 100 Jahren durch unsere Akademie herausgegebenen Atlas zurückblicken [6]. Obgleich in diesem der Nóto-See, noch Kóla-See, der Túloma-Fluss noch Kóla-Fluss genannt werden, Irrthümer, welche die neueren Karten, wahrscheinlich nach schwedischen Quellen, berichtigt haben, so fällt uns doch auf den ersten Blick in die Augen, dass die Darstellung der Wegstrecke zwischen Kóla und Kándalakscha der Natur entnommen worden war. Hierfür sprechen in gleichem Grade die richtigen Gestaltverhältnisse des Imándra-Sees und auch die der Natur entsprechende Richtung des eigentlichen Kóla-Flusses. Obgleich nun allerdings mehrere Fehler jenes akademischen Blattes bei Zuratheziehung meines Entwurfes nicht zu verkennen sind, wie z. B. der Múrd- und der Púl-See auf ihm die Namen gewechselt haben u. d. m., so können wir aus ihm doch sogar einige Vervollständigungen unseres beifolgenden Kärtchens für einzelne Strecken entnehmen, welche ferner ab von meinem Wege lagen. So scheint ohnfern der Nordspitze des Imándra eine grössere Bucht — Petscha (auf Schmid's Karte Peksa genannt) — vorhanden zu sein, welche mir leicht entgehen konnte, da wir uns dort an das Westufer des Imándra hielten. Ferner macht die akademische Karte vier Buchten an dem Westufer namhaft, das ich in der That vielfach zerrissen und durch mehrere Inseln verdeckt fand; diese Buchten werden dort (von N. nach S. gehend): 1) Muneta, 2) Witjä, 3) Kissla, 4) Wassa Lemba genannt. Erwähnen wir noch, dass meine Saschéjetschnaja Guba dort Retschnája genannt wird, dass an der Stelle meines Peless-Sees ein See

6) Russischer Atlas, entworfen bei der Kayserl. Academie der Wissenschaften, St. Petersburg, 1745. — Das Blatt führt den Titel: «Россійская Лапландія.»

Ssemogie steht, dass in die Bábenskaja Guba ein Fluss Kánda sich ergiesst, der aus einem Kóla-See entspringt u. dgl. m., als eben so vieler Fragen, über welche der nächstfolgende Reisende mit Leichtigkeit wird entscheiden können.

Aus den jenem «Russischen Atlas» beigegebenen Erläuterungen erfahren wir über die Quellen nur Folgendes: «Lap-«ponia Russica cum adjacentibus regionibus ..... Hat ihr «Fundament in dem zwischen Petersburg, Archangel und «Moskwa aus den observirten Longitudinibus und Latitudini-«bus, construirtem Triangel, wie auch den übrigen durch den «Hrn. De l'Isle de la Croyère observirten Breiten, aus «welchen die Charten, deren man sich dabey bedienen kön-«nen, so gut als möglich verbessert worden»

In einigen Stücken, insbesondere in Betreff der Benennung des Nóto-See's und des Túloma-Flusses, ist eine andere, gleichfalls bei der Akademie angefertigte Karte vom Jahre 1773 noch richtiger [7]). Nur zwei Jahre darauf erschien in Moskau Ancelin's Atlas [8]), und wir müssen in ihm die erste Quelle der oben besprochenen groben Unrichtigkeiten erkennen, welche von nun an in alle neuere und neueste Karten des In- und Auslandes übergingen.

Es möchte dieses zwar einer der unbedeutendsten Fälle gewesen sein, in welchem die Gründlichkeit der Arbeiten unserer Akademie zu wenig Anerkennung gefunden und übertönt worden, jedoch ist der Hergang dieser Angelegenheit auffallend genug, um den Versuch der nachstehenden Erklärungsweise seines Ursprunges zu rechtfertigen.

---

7) Генеральная карта географическая, представляющая Архангелогородскую Губернію, на свои провинціи раздѣленную, сочиненъ Акад. Наукъ Адіюнктъ Я. Ф. Шмидъ, 1773. — Auch lateinisch unter folgendem Titel herausgegeben: Tabula geographica generalis Gubernii Archangelopolitani, in suas provincias divisi, componente J. F. Schmidio, 1773.

8) Ancelin, Atlas général et élementaire de l'Empire de toutes les Russies, Moscou, 1795. Blatt: Gouvernement d'Arkhangel. Vgl. auch den Атласъ Россійской Имперіи, сочиненный при главномъ правленіи училищъ, для употребленія въ Губернскихъ гимназіяхъ, 1807. Vgl. das Blatt: Карта Губерній Архангельской, Олонецкой и Вологодской.

Ziehen wir nämlich die ältesten holländischen Karten zu Rathe, so sehen wir auf denselben am Beginne des 17ten Jahrhunderts die Andeutung eines von Süd nach Nord fliessenden Kóla-Flusses auftauchen [9]). Gegen das Ende desselben Jahrhunderts (namentlich Olaus Rudbeck; zwischen 1675 bis 1679) nimmt dieses Gewässer, Kalla-Fluss (Fischfluss) genannt, aus einem Kalla-Jerwi (Fischsee) seinen Ursprung und wir gewinnen allmälig die Ueberzeugung, dass mit diesen Darstellungen die grösseren, gleichfalls in den Kola-Busen sich ergiessenden Gewässer, der Nóto-See und der Túloma-Fluss, gemeint waren, während der eigentliche Kola-Fluss nebst dem Imándra auf jenen Karten noch vollkommen fehlte. Mit dem Schlusse des 17ten Jahrhunderts fügte der vielverbreitete Atlas Sanson d'Abbeville's den früheren Darstellungen auch eine Andeutung des wahren Kola-Flusses hiuzu, aber unbenannt. Deshalb sehen wir denn auch den Nóto-See und den Túloma-Fluss bis zum Jahre 1773 ungestört ihre falschen Namen tragen, da unterdessen das Städtchen Kóla und der den Kóla-Fluss entlang führende Weg dahin, nicht nur für die Fischereien an den Küsten des Russischen Lapplands und die Unternehmungen nach Nowaja-Semlja, sondern auch für Archángelsk und dessen weitverzweigte Handelsverbindungen eine gewisse Bedeutung gewonnen hatten. Den berühmteren Namen übertrug man auf die grösseren Gewässer. Es scheint mir wahrscheinlich, dass die endliche Lösung dieses hundertjährigen Irrthumes auf Grundlage schwedischer Quellen erfolgte, welchen man nun durchgängig grösseres Zutrauen schenkte und darin so weit ging, dass man auch ihre Darstellungsweise des Russischen Lapplands adoptirte. Gerade mit der Wegestrecke zwischen Kola und Kandalakscha nahm aber die grössere Richtigkeit unserer inländischen Quellen ihren Anfang, und dieses war zu seiner Zeit von den Mitgliedern unserer Akademie nach Verdienst gewürdigt worden.

9) Auch der im Jahre 1737 bei unserer Akademie erschienene: Атласъ, сочиненный къ пользѣ и употребленію юношества и всѣхъ читателей, напечатанъ въ Санктпетербургѣ, при Импер. Академіи Наукъ, gehörte noch diesem Standpunkte an.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. XI. No. 14.*)

$\frac{11}{23}$ Mars 1853.

PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA COMÈTE DÉCOUVERTE PAR M. SCHWEIZER LE 8 MARS (24 FÉVRIER) 1853; PAR M. OTTO STRUVE.

La comète découverte par M. Schweizer fut observée à Poulkova pour la première fois, le 13 (1) mars. Depuis ce temps, j'ai réussi à déterminer 5 fois la position de cet astre, à l'aide de la grande lunette, en le comparant avec des étoiles voisines. Pour quatre jours d'observation les positions des étoiles de comparaison se trouvent dans le catalogue des zones Besséliennes, rédigé par M. Weisse. En partant de ces positions, j'ai déduit les lieux suivants de la comète:

	Temps sid. de Poulk.	$\mathfrak{R}$ Com.	Decl. Com
13 mars	$7^h55^m47^s$	$70^\circ 13' 28''$	$-3^\circ 25' 40''$
15 »	8 0 54	69 43 45	— 1 3 39
19 »	7 33 32	69 0 23	+ 2 41 51
20 »	7 31 14	68 51 56	+ 3 29 8

Ces positions ne doivent être regardées que comme approximativement exactes. Le calcul rigoureux ne pourra se faire qu'après une détermination nouvelle des étoiles de comparaison, l'automne prochain.

Les trois premières observations m'ont servi à calculer les éléments suivants de l'orbite de cette comète. M. Linde-

loef, de Helsingfors, actuellement attaché à l'Observatoire central, a bien voulu faire le second calcul de ces éléments afin d'en contrôler l'exactitude. Voici ce que nous avons trouvé:

Temps du périhélie: 1853 févr. 24,093 temps moy. de Poulkova.

$$\begin{aligned} \text{Log } q &= 0{,}03813 \\ P - \Omega &= 275^\circ\, 42',7 \\ \Omega &= 69^\circ\, 27',5 \\ i &= 20^\circ\, 13',3 \end{aligned}$$

mouvement rétrograde.

Ces éléments présentent tant de ressemblance avec ceux de la fameuse comète de 1664, calculés par Halley, qu'il y a lieu de supposer l'identité des deux comètes. Par cette raison, il est d'urgence de continuer les observations aussi longtemps que possible, afin de pouvoir calculer les éléments elliptiques avec plus d'exactitude. Malheureusement les observations ne pourront être continuées très longtemps. La comète a déjà passé son périhélie, depuis 27 jours, et s'éloigne en même temps très vite de la terre, de sorte que son éclat s'affaiblit rapidement. Il est vrai qu'elle se meut encore vers le Nord, mais cet accroissement de la déclinaison diminue considérablement chaque jour, et dans peu de jours l'augmentation de la déclinaison du Soleil sera plus forte que celle de la comète. Or, le changement de l'ascension droite de la comète étant très petit, le Soleil s'approche d'elle rapidement et je crains que, dans quinze jours d'ici, nos observations de cette comète ne doivent déjà cesser.

Le premier jour de mes observations, la comète me parut assez brillante pour être aperçue à l'oeil nu, si le clair de Lune n'avait entravé sa visibilité; et il n'y a presque pas de doute que, quelques jours avant qu'elle passait dans l'hémisphère boréal, elle a été facilement reconnaissable à l'oeil nu dans les observatoires de l'hémisphère terrestre austral. Si cette supposition se réalise, notre astronome M. Schweizer

sera bien privé de l'honneur d'être le premier astronome qui ait aperçu cette comète; mais, en revanche, nous gagnerons beaucoup pour l'exactitude des éléments à déduire, par le concours des observations antérieures auxquelles on peut s'attendre de la part des astronomes du Cap et de Madras. M. Schweizer aura toujours le mérite d'avoir été le premier à nous annoncer l'arrivée de cet astre, peu de jours seulement après qu'il était devenu visible au dessus de l'horizon des observatoires de l'Europe.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XI. No.* 21.)

$\frac{12}{24}$ Juin 1850.

Sur les dérivées des fonctions algébriques par M. OSTROGRADSKY.

1. Nous allons établir ce théorème fort simple: que le degré de la dérivée d'une fonction algébrique est inférieur d'une seule unité à celui de la fonction elle-même; à moins pourtant que ce dernier ne soit zéro. Le théorème dont il s'agit sera établi sans la considération des limites, qui ne nous paraît pas suffisamment claire pour un objet aussi simple, et sans le secours des séries qui ne présenterait pas une rigueur désirable.

Désignons par x la variable indépendante et par y une fonction algébrique de cette variable. Il est toujours permis de supposer que la dernière soit donnée par l'équation

$$0 = A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots . A_2 y^2 + A_1 y + A,$$

que nous écrirons, pour abréger, par

$$f(x, y) = 0$$

et dans laquelle l'exposant n est un nombre entier et les coefficients A_n, A_{n-1}, $\ldots$ A_2, A_1, A sont des polynomes entiers en x. Nous supposerons, ce qui est encore permis, que la fonction $f(x, y)$ est indécomposable; car si elle ne l'était pas, on appliquerait à chacun de ses facteurs, supposé indécomposable, les considérations qui vont suivre.

Le degré d'une fonction algébrique y n'est autre chose que l'exposant numérique α, qui, pour x infiniment grand, rendrait fini le rapport

$$\frac{y}{x^{\alpha}}.$$

On trouverait cet exposant par l'emploi du prallélogramme analytique de Newton, ou par le procédé algébrique dû à Lagrange; sa détermination est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'en parler.

Comme nous devrons considérer, dans la suite, les degrés de plusieurs fonctions différentes de x, et qu'il ne serait pas commode de représenter ces degrés chacun par un lettre particulière, nous les indiquerons par la caractéristique δ placée devant la fonction dont il s'agira de marquer le degré. Ainsi celui de y, au lieu de α, sera désigné par δy, de même δA_k représentera le degré du polynome A_k. Pour ce qui regarde les fonctions dérivées, nous les dénoterons, d'après Lagrange, par des accents.

L'équation

$$f(x, y) = 0$$

définissant y, il est visible que son premier membre disparaîtrait identiquement si l'on y mettait pour y sa valeur tirée de cette même équation, et par suite, le degré de l'expression $f(x, y)$, considérée comme fonction de x, sera évidemment zéro. Mais si l'on y mettait au lieu de y, non pas sa valeur tirée de l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

mais une autre fonction algébrique du même degré δy que cette valeur, par exemple le monome $x^{\delta y}$ accompagné d'un coefficient indépendant de x et arbitraire, l'expression $f(x, y)$ acquerrait alors un degré que nous représenterons par m.

Nous nous écartons de la notation admise tout-à-l'heure parce que il ne s'agit pas du degré actuel de la fonction $f(x, y)$, degré qui est zéro, mais de celui qu'elle aurait conditionellement.

La dérivée y' de y a pour valeur

$$-\frac{f'(x)}{f(x)},$$

savoir :

$$-\frac{A'_n y^n + A'_{n-1} y^{n-1} + \ldots A'_2 y^2 + A'_1 y + A'}{nA_n y^{n-1} + (n-1)A_{n-1} y^{n-2} + \ldots + 2A_2 y + A_1}.$$

Il est visible que le degré du numérateur et celui du dénominateur de cette valeur, sont inférieurs au degré m de la fonction $f(x, y)$, le premier, généralement parlant, d'une seule unité et le second de δy. Ainsi la dérivée y' étant représentée par une fraction dont le numérateur monte à la puissance $m-1$, et le dénominateur à la puissance $m-\delta y$, nous aurons

$$\delta y' = m-1-(m-\delta y) = \delta y-1.$$

La démonstration précédente n'est pas rigoureuse, parce que les termes les plus élevés, soit du haut, soit du bas de l'expression y', pourraient disparaître, et par suite, les différences entre les exposants des termes les plus élevés parmi ceux qui resteraient, pourraient n'être pas $\delta y-1$.

On sait que par la substitution de $x^{\delta y}$, au lieu de y, dans la fonction $f(x, y)$, deux termes au moins de cette fonction doivent acquérir un même degré m, plus élevé que celui de tous les autres termes; supposons que les termes, dont il s'agit, soient

$$A_i y^i + A_k y^k + A_l y^l + \ldots$$

et qu'ils se trouvent rangés par l'ordre des exposants i, k, l... qui vont en diminuant, nous devons avoir

$$(1)\quad m = i\delta y + \delta A_i = k\delta y + \delta A_k = l\delta y + \delta A_l = \ldots.$$

puis, en désignant par p, le coefficient de $x^{\delta y}$ dans la valeur de y et supposant

$$A_i = a_i x^{\delta A_i} + b_c x^{\delta A_i - 1} + \ldots\ldots$$
$$A_k = a_k x^{\delta A_k} + \ldots\ldots$$
$$A_l = a_l x^{\delta A_l} + \ldots\ldots,$$

nous aurons pour déterminer p, l'équation

$$0 = a_i p^i + a_k p^k + a_l p^l + \ldots\ldots$$

dont pour abréger, nous représenterons, le second membre par φp.

Voyons maintenant les termes les plus élevés dans

$$f'(x) = A'_k y^k + A'_{k-1} y^{k-1} + \ldots + A'_2 y^2 A'_1 y + A'$$

et dans

$$f'(y) = nA_k y^{k-1} + (n-1) A_{k-1} y^{k-2} + \ldots 2A_2 y + A_1$$

Il est clair qu'ils ne se trouveront que dans les dérivées, relatives à x et à y, de la partie

$$A_i y^i + A_k y^k + A_l y^l + \ldots .$$

de la fonction $f(x, y)$ où sont les termes les plus élevés de cette fonction elle-même; ainsi, en n'ayant égard qu'aux termes les plus élevés, nous aurons

$$f'(x) = \delta A_i a_i p^i + \delta A_k a_k p^k + \delta A_l a_l p^l \ldots .) x^{m-1}$$

$$f'(y) = (ia_i p^{i-1} + ka_k p^{k-1} + la_l p^{l-1} + \ldots .) x^{m-\delta y}$$

La dernière équation revient visiblement à

$$f'(y) = \varphi'(p) x^{m-\delta y}$$

quant à la première, en y remplaçant δA_i, δA_k, δA_l, .. respectivement par leurs valeurs

$$m - i\delta y,\ m - k\delta y,\ m - l\delta y, \ldots .$$

tirées des équations (1), elle deviendra

$$f'(x) = m(a_i p^i + a_k p^k + a_l p^l \ldots .) x^{m-1} - (ia_i p^i + ka_k p^k + la_l p^l + \ldots .) \delta y x^{m-1}$$

savoir

$$f(x) = m\varphi p x^{m-1} - p\varphi'(p) \varrho y x^{m-1}$$

ou bien, à cause de $\varphi p = 0$,

$$f'(x) = -p\varphi'(p) \delta y x^{m-1}$$

Donc en substituant

$$y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = \frac{p\varphi'(p) dy x^{m-1} + \ldots}{\varphi'(p) x^{m-\delta y} + \ldots}$$

savoir

$$y' = p\delta y x^{\delta y - 1} \frac{(1+z)}{1+u}$$

Les fonctions z et u disparaissant pour la valeur infinie de x, il s'en suit que la puissance $\delta y - 1$ de x est la plus élevée dans y', c'est-à-dire que le degré de la dérivée est inférieur d'une unité à celui de la fonction elle-même.

La conclusion précédente est en défaut dans le cas de $\delta y = 0$, puisque alors la puissance de x la plus élevée dans le numérateur de l'expression

$$\frac{pp'p\delta y x^{m-1} + \ldots.}{\varphi' p x^{m-\delta y} + \ldots.}$$

disparaît, et celle qui l'est dans le dénominateur de la même expression y demeure; mais ce cas où la fonction y aurait zéro pour degré a été prévu et exclu, nous y reviendrons tout-à-l'heure.

Indépendamment du cas $\delta y = 0$, il faut encore examiner celui où la dérivée $\varphi'(p)$ s'évanouirait, ce qui ferait disparaître simultanément les puissances les plus élevées de x en haut et en bas de l'expression qu'on vient d'écrire. Il serait donc nécessaire de rechercher les puissances qui suivent immédiatement celles qui auront disparu pour en comparer les exposants. Mais on évitera cette recherche, qui pourrait devenir assez compliquée, par la considération suivante.

La multiplicité des valeurs de p fournies par l'équation

$$\varphi p = 0$$

nous montre que plusieurs racines y de la fonction

$$f(x, y)$$

sont d'un même degré δy, et si l'on avait en même temps

$$\varphi'(p) = 0$$

il faudrait en conclure que deux ou un plus grand nombre de ces mêmes racines ont aussi le même coefficient p de leur terme le plus élevé, en sorte que le monome

$$px^{\delta y},$$

contenant la plus haute puissance de x qui soit dans les racines dont il s'agit, leur sera commun. Nous devons décider la question relative à la puissance de la dérivée y', seulement pour les racines y dont nous venons de parler; pour toutes les autres, elle l'est déjà. Pour cela, remplacez une de ces racines par

$$px^{\delta y} + z;$$

la variable z sera fonction de x, d'un degré δz moins élevé que δy, et, généralement parlant, elle ne présentera pas la circonstance où se trouvent les y, celles où deux ou plusieurs valeurs de z auraient pour leurs termes les plus élevés un monome commun. Comme

$$y' = p\delta y x^{\delta y - 1} + z'$$

et z' étant du degré $\delta z - 1$ inférieur à $\delta y - 1$, on en conclura que le degré de y', même dans le cas exceptionnel que nous examinons, est d'une seule unité inférieur à celui de y.

Il se peut cependant que plusieurs valeurs de z possédassent les mêmes termes les plus élevés; cela arrivera quand plusieurs valeurs de y auront deux ou un plus grand nombre de termes communs, et en même temps les plus élevés qui y soient. Pour lors, la circonstance que nous examinons pour y, ayant lieu pour z, nous ne pouvons, d'après ce qui précède fixer le degré de z' et par suite celui de y'. Le premier monterait peut-être plus haut que $\delta y - 1$.

Pour résoudre le cas qui nous arrête, remarquez d'abord que le nombre des termes égaux dans les différentes racines y, sera nécessairement limité; car l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

étant indécomposable, ne peut pas offrir des racines égales Ainsi, après un certain nombre de termes communs, viendront nécessairement les termes différents. Désignons par

$$px^{\delta y} + qx^{\alpha} + vx^{\beta} + \ldots$$

l'ensemble des termes communs à deux ou à un plus grand nombre de valeurs de y, et supposons

$$y = px^{\delta y} + qx^{\alpha} + vx^{\beta} + \ldots + z$$

où naturellement $\delta y > \alpha > \beta > \ldots > \delta z$.

La dérivée y' étant

$$p\delta y x^{\delta y - 1} + \alpha q x^{\alpha - 1} + \beta v n^{\beta - 1} + \ldots + z'$$

et les termes les plus élevés propres aux différentes valeurs de z n'étant pas égaux entre eux, nous aurons $\delta z - 1$ pour le degré de z' et par suite celui de la dérivée y' sera

$$\delta y - 1.$$

Le cas de $\delta z = 0$ ne fera pas exception, car on s'assure facilement que le degré de la dérivée d'une fonction z, dont $\delta z = 0$, est inférieur à -1. En effet, supposez

$$z = s + u$$

la quantité s, désignant le terme le plus élevé de z qui sera indépendant de x, et u représentant une fonction x d'un degré négatif, comme

$$z' = u',$$

vous aurez

$$\delta z' = \delta u' = \delta u - 1.$$

C'est-à-dire que le degré de la dérivée d'une fonction au degré zéro est d'une unité inférieur à la plus haute puissance après zéro qui soit dans la fonction. Il s'en suit qu'aucune fonction algébrique ne peut avoir pour dérivée une fonction du degré -1. Ainsi toute fonction, dont la dérivée a pour degré l'unité négative est nécessairement transcendantes.

(Tiré du *Bull. phys-mathém.* T. XI. No. 22.)

$\frac{27 \text{ Mai}}{8 \text{ Juin}}$ 1853.

Catalogue des étoiles circompolaires, composé d'après les observations de Lalande, publiées dans les Mémoires de l'Académie de Paris de 1789 et 1790, et réduit a l'époque de 1790. Rédigé par M. FEDORENKO, candidat ès sciences de l'Université de Kharkov et collaborateur surnuméraire aux travaux de l'Observatoire central. Rapport fait a l'Académie par M. W. STRUVE.

J'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie le travail d'un jeune astronome russe, M. Ivan Fedorenko, candidat de l'Université de Kharkov, depuis trois ans séjournant à l'Observatoire central. C'est un jeune savant d'un talent prononcé, surtout pour la théorie, et d'une assiduité infatigable. En 1852, il a participé, avec M. le professeur Woldstedt de Helsingfors, aux travaux définitifs de la mesure de l'arc du méridien, par la détermination de la latitude, de l'azimut et du temps, à Kilpimäki, point central de l'arc de Finlande. — Ayant reconnu, dès l'entrée de M. Fedorenko à l'Observatoire, sa vocation particulière pour les travaux compliqués et difficiles de calcul, je l'ai engagé à entreprendre un travail considérable de cette nature, propre, en même temps, à rendre un service important à l'astronomie.

On sait que feu Jérôme Lalande avait publié, soit dans les *Mémoires de Paris* (1789 et 1790), soit dans un ouvrage séparé, *l'Histoire céleste française* (1801), les observations d'au-delà de 50,000 étoiles fixes, comprises entre le pôle arctique et le tropique du Capricorne. C'est le premier travail de ce genre, d'observation par zones, mais qui a été poursuivi plus tard, dans un plus grand détail et avec des moyens plus parfaits, par Bessel et par M. Argelander.

Ce travail de Lalande avait rendu un service éminent à la science, étant l'unique ressource, d'où l'on puisait des points de comparaison pour l'observation des comètes et des petites planètes, découvertes depuis 1801 jusqu'en 1823. Ce ne fut qu'en 1823 que les premières zones de Bessel parurent, et c'est en 1852 seulement que les zones de M. Argelander ont porté la nouvelle révision céleste à l'étendue du travail de Lalande. Du reste, celui-ci est encore à présent en usage régulier, parce qu'il contient un nombre considérable d'étoiles non identiques avec celles des zones récentes En outre, les observations de Lalande, étant faites à une époque reculée maintenant de plus de 50 ans, contiennent des matériaux précieux pour la recherche des mouvements propres des étoiles, et c'est sous ce point de vue que j'en ai profité avec un succès distingué, dans les recherches données dans l'introduction de mes *Positiones mediae.*

L'usage des zones de Lalande était anciennement très peu commode; ce que j'ai éprouvé à l'occasion de l'apparition de la Comète d'Olbers en 1815 et plus tard. Chaque position cherchée d'une étoile réclamait un travail de plusieurs heures, à faire par chaque astronome. C'est pourquoi Bessel, avant de commencer ses zones à lui, proposa, en 1821, la construction de tables de réduction pour *l'Histoire céleste*, table à baser sur les excellentes positions du catalogue de Piazzi de 1813; et indiqua la voie pour la confection de ces tables. MM. Hansen et Nissen exécutèrent la proposition de Bessel, et feu Schumacher publia en 1825 les tables de réduction de *l'Histoire céleste.* Les réductions des étoiles circompolaires boréales, observées dans les deux volumes des *Mémoires* manquent à cette collection, sans doute parce

que le catalogue de Piazzi était trop pauvre en étoiles boréales, pour pouvoir fournir les bases requises pour cette partie.

Bessel, en proposant les tables de réduction, s'était déclaré contre la cataloguisation des étoiles de *l'Histoire céleste*. Mais l'expérience ayant prouvé qu'un catalogue ordonné était indispensable pour l'usage général et commode du travail de Lalande, l'Association Britannique nomma, en 1837, une commission composée de MM. Airy, Baily et Robinson, pour diriger la cataloguisation complète des positions des étoiles de l'*Histoire céleste* et des *Mémoires*, en allouant à cet effet une somme de 500 Lstr., somme qui plus tard fut augmentée encore d'au delà de 300 Lstr. Le résultat de cette entreprise fut le catalogue connu de 1200 pages in-8°, calculé sous la direction de M. Baily, et publié en 1847 aux frais du Gouvernement Anglais. Il ne contient cependant que les étoiles de *l'Histoire céleste*. Les étoiles des *Mémoires* ne s'y trouvent pas, parce que MM. Hansen et Nissen n'avaient pas fourni les tables de réduction, et que la construction de ces tables indispensables présentait de graves difficultés, quoique les bases en aient pu être trouvées dans le catalogue des étoiles de Groombridge, publié en 1838.

Ces bases ayant été considérablement augmentées, par la publication des observations de M. Argelander, je proposai à M. Fedorenko, en 1850, de faire un essai de la construction des tables de réduction pour les *Mémoires*. L'essai ayant parfaitement réussi, j'engageai notre astronome à entreprendre la réduction totale, c.-à-d. soit la construction des tables de réduction, soit la cataloguisation complète. C'est l'origine et l'histoire du travail que j'offre aujourd'hui à l'Académie.

Quant à l'exécution qui a coûté 2 ans et demi de travail non interrompu, M. Fedorenko, sans avoir recouru à l'assistance d'autrui, a su vaincre toutes les difficultés d'une manière qui ne laisse rien à désirer. Ces difficultés n'étaient pas petites, car il fallait quitter en partie la voie indiquée par Bessel, qui avait pu supposer que, pour chaque zone de 2° de large, le limbe du mural représentait d'assez près un petit

secteur d'un cercle de déclinaison. Cette hypothèse n'était pas rigoureuse, quoique approximativement juste pour les étoiles voisines de l'équateur; mais elle devenait insuffisante et même très dangereuse pour les étoiles voisines du pôle. M. Fedorenko, par cette raison, rechercha, pour chaque zone, la position du plan que l'axe optique, en se mouvant le long du limbe, avait décrit sur le ciel, recherche qui lui fournissait en même temps un moyen pour examiner l'exactitude des ascensions droites obtenues. Il serait trop long de décrire ici la marche des vastes calculs de notre auteur, et il suffit de dire que l'examen très détaillé que j'ai fait de l'ouvrage, m'a donné les preuves les plus satisfaisantes sur le soin et l'intelligence, avec lesquels les calculs ont été conduits.

L'ouvrage de M. Fedorenko contient:

1) *l'introduction*, dans laquelle sont exposées les méthodes employées de recherche et de calcul;
2) *les tables auxiliaires* de réduction;
3) *le catalogue* ordonné qui contient 4673 positions, pour l'année 1790, avec les précessions annuelles;
4) *les notes.*

J'ose prier l'Académie de bien vouloir se charger de la publication de l'ouvrage de M. Fedorenko, étant persuadé qu'il est digne de cet honneur. Il remplit une lacune dans les différents catalogues des étoiles fixes, il fait rentrer les observations des étoiles boréales de Lalande dans l'usage général des astronomes.

Pour pouvoir donner des renseignements précis, j'ai fait exécuter, à l'imprimerie, un échantillon d'une page du catalogue. D'après un examen soigné, le manuscrit formera un volume de 28 feuilles imprimées in-4°. Je propose que l'édition soit de 600 exemplaires, dont 50 seront destinés à l'auteur, 150 à l'Observatoire central pour l'echange, enfin que l'Académie charge le directeur de l'Observatoire central du soin et de la surveillance spéciale de l'édition.

Poulkova, le 19 mai 1853.

(Tiré du *Bullet. phys.-mathém. T. XII. No.* 2.)

$\frac{13}{25}$ Mai 1853.

Quatrième Note sur les Étoiles Doubles, par M. YVON VILLARCEAU.

η de la Couronne Boréale.

Les étoiles doubles dont on peut regarder les éléments comme connus, au moins approximativement, sont au nombre de quatre: ce sont ξ de la grande Ourse, p d'Ophiuchus, ζ d'Hercule et η de la Couronne (voir le 3e Vol. du Cosmos de M. de Humboldt, page 254, 258 et suivantes). Encore ce nombre se réduirait-il à trois, si la double solution que nous avons fait connaître (Bulletin de la Classe Physico-Mathématique T. VIII, No. 7, et Additions à la Connaissance des temps pour 1852) pouvait se maintenir à l'époque actuelle. L'objet de la présente note est de fixer celle des deux solutions de l'orbite de η de la Couronne, qui doit être définitivement adoptée.

—

Ainsi qu'on peut se le rappeler, l'ambigüité que nous avons rencontrée tient à ce que les deux composantes du système sont si peu dissemblables physiquement qu'on ne peut les distinguer l'une de l'autre que par leurs positions relatives: cette distinction, qui est possible lorsque l'on compare des positions relatives peu différentes ou séparées par un court intervalle de temps, cesse de l'être, lorsque les positions se rapportent à des époques éloignées qui ne com-

prennent aucune observation intermédiaire. Cette difficulté s'est présentée à l'égard des deux observations de W. Herschel faites en 1781 et 1802, et distantes entre elles de 21 ans; le même intervalle de temps sépare la dernière de l'époque 1823 où commence la série non interrompue des observations jusqu'à l'époque actuelle. Les observations de W. Herschel doivent-elles être employées telles qu'elles ont été données primitivement, ou *renversées*, c'est-à-dire modifiées de 180°? La condition de les représenter par un même système d'éléments, que les observations modernes, pouvait seule lever cette difficulté.

Or en conservant la position de 1802, j'ai dû renverser celle de 1781, et je suis parvenu à une orbite caractérisée par une révolution de 66 ans environ et que personne n'avait soupçonnée. Renversant au contraire l'observation de 1802 et conservant celle de 1781, j'ai obtenu une orbite d'à-peu-près 43 ans de révolution; c'est l'orbite qu'avaient déjà indiquée Sir John Herschel et M. Mädler, et qui a été reproduite d'après ces astronomes, dans la plupart des ouvrages qui traitent de cette matière.

Nous avons montré dans notre première communication sur η de la Couronne, que le résultat de la comparaison de nos deux orbites avec les observations ne pouvait seul établir un motif sérieux de préférence entre les deux solutions. Mais une discussion minutieuse des circonstances physiques des deux observations de W. Herschel nous a présenté des probabilités en faveur de l'orbite de 66 ans. Quelque puissantes que fussent ces probabilités, il convenait cependant, de remettre à une autre époque la question de décider entre les deux solutions. Nous avons fixé pour cette époque, celle où se feront les observations de η de la Couronne en 1853, en indiquant la possibilité de séparer les deux orbites avant ce temps, si la puissance de la grande lunette de Poulkova permettait de continuer les observations malgré le grand rapprochement des étoiles composantes. Les observations ont été effectivement continuées jusqu'ici en Russie; et l'intérêt excité par le sujet qui nous occupe a décidé MM. Lassell et Hartnup à faire en An-

gleterre des observations qu'ils ont bien voulu me communiquer. M. Dawes a également eu la bienveillante attention de me transmettre une série d'observations inédites s'étendant pour η de la Couronne jusqu'à 1849 inclusivement. Ces circonstances me mettent à même de présenter dès aujourd'hui le résultat auquel je suis parvenu quant au choix à faire entre les deux orbites; j'ai, en même temps, profité des nouvelles observations pour faire subir aux éléments de l'orbite définitive une correction dont j'avais indiqué l'opportunité en terminant ma première communication.

Du premier coup d'oeil, il était aisé de voir que la série des observations faites depuis 1847, ne pouvait s'accorder avec l'orbite de 43 ans de révolution; je me suis attaché dès lors à la correction des éléments de l'orbite de 66 ans. Ici s'est présentée une difficulté que l'insuffisance des données m'avait empêché de rencontrer dans mon premier travail, et qui s'était déjà présentée dans mes recherches sur l'orbite de ζ d'Hercule, mais avec un caractère moins prononcé. Je veux parler de l'emploi des distances dans la détermination des éléments des orbites d'étoiles aussi resserrées. En déterminant les éléments de ζ d'Hercule à l'aide des angles de position seulement, nous sommes parvenus (Additions à la Connaissance des temps pour 1852) à bien représenter ces angles; mais les distances manifestaient des erreurs systématiques; en faisant usage à la fois des angles de position et des distances, les dernières étaient mieux représentées, mais les erreurs systématiques apparaissaient dans les angles de position.

Dans mes nouvelles recherches sur η de la Couronne, un essai de correction des éléments basé sur l'emploi simultané des angles de position et des distances, m'a fourni des éléments qui laissent dans la comparaison des angles de position des erreurs systématiques très prononcées, et inadmissibles lorsque l'on envisage la grande précision des mesures d'angles de position. J'ai dès lors pris le parti d'employer uniquement ces derniers, et de réserver les mesures de distances pour la détermination du demi-grand axe seulement. A cet égard, je ferai remarquer que cinq mesures

de distance obtenues par M. W. Struve de 1826 à 1835 excèdent 0″,7; tandis que dix-sept autres mesures obtenues postérieurement par cet astronome et par MM. Otto Struve et Mädler sont comprises entre 0″,6 et 0″,4. Lorsqu'on veut déduire des distances mesurées d'autres éléments que le demi-grand axe, les résultats dépendent particulièrement des variations de distance; or il est visible que les variations des distances comprises entre 0″,6 et 0″,4 sont des quantités tout-à-fait comparables aux erreurs dont peuvent être affectées des mesures si difficiles à obtenir. Quant aux cinq autres distances comprises entre 0″,7 et 1″,15, l'emploi de leurs variations présente encore des difficultés sur lesquelles nous reviendrons dans un moment. Nous nous sommes cru par ces raisons obligé d'employer uniquement les angles de position dans la correction des éléments autres que le demi-grand axe.

Voici maintenant sur quelles considérations nous nous sommes fondés pour obtenir le demi-grand axe. Les observations de MM. Struve peuvent être groupées en deux séries très distinctes sous deux points de vue différents. Une première série de 8 mesures comprend celles que M. Struve père a faites à Dorpat de 1826 à 1838. L'autre série comprend 12 observations faites pour la plus grande partie par M. Otto Struve à Poulkova de 1839 à 1852. Ces deux séries se distinguent en ce qu'elles ont été faites par deux observateurs différents et à l'aide d'instruments différents aussi. Deux mesures de distances sont dues à M. Mädler qui les a obtenues en 1840 et 1841 avec l'instrument de Dorpat.

Dans l'emploi que nous ferons de la série des observations de M. Struve à Dorpat, nous aurons égard aux remarques présentées par le célèbre astronome dans les Mensurae Micrometricae, page CLIII. M. Struve, après avoir rappelé que la distance 0″,7 est trop petite pour être mesurée en bissectant les deux étoiles, expose que les très-petites distances jusqu'à 0″,8 ne sont pas mesurées à proprement parler, mais bien estimées en suivant les procédés qu'il a décrits. Par un examen attentif, il a acquis la preuve que les erreurs accidentelles dans l'estime ne dépassent

pas celles que l'on peut craindre dans les mesures de distances comprises entre 1″ et 2″. Néanmoins les distances obtenues par estime méritent, suivant lui, moins de confiance. Les petits écarts de l'estime prouvent plutôt la constance du jugement que la vérité du résultat obtenu, surtout si les espaces à comparer sont terminés dissemblablement. C'est pourquoi M. Struve a institué des expériences sur des étoiles doubles artificielles de différents diamètres apparents et distantes angulairement de 0″,22 à 0″,81 pour déterminer la valeur moyenne des erreurs commises dans l'estime des distances. Après avoir reproduit le tableau qui résume ses expériences, M. Struve ajoute que, suivant sa conviction, l'estime des distances des étoiles du ciel qui sont très resserrées, se fait de la même manière que si l'on opérait sur des étoiles artificielles. Il ne doute nullement qu'on ne doive appliquer les corrections de la table aux distances plus petites que 1″; et il ne lui semble pas probable que les distances ainsi corrigées restent encore affectées d'erreurs qui atteignent 0″,1.

En présence d'énoncés aussi précis et émanant de l'auteur même des observations que j'avais à employer, je n'ai pas hésité à faire l'application des corrections indiquées; seulement, pour faciliter l'interpolation, j'ai substitué à la table de M. Struve une autre table que j'ai déduite d'une interpolation graphique pratiquée sur les nombres consignés dans celle de M. Struve. Les deux tables sont, comme on va le voir, très-peu différentes; et le seul avantage de la mienne est dans une continuité que la table de M. Struve ne présente pas au même degré. Voici ces deux tables:

Distance estimée.	Correction selon M. Struve.	Correction obtenue graphiquement.	Distance estimée.	Correction selon M. Struve.	Correction obtenue graphiquement.
0″,30	+ 0″,13	+ 0″,128	0″,65	—	+ 0″,069
0,35	—	+ 0,125	0,70	+ 0″,06	+ 0,055
0,40	+ 0,12	+ 0,120	0,75	—	+ 0,042
0,45	—	+ 0,113	0,80	+ 0,03	+ 0,030
0,50	+ 0,10	+ 0,105	0,85	—	+ 0,018
0,55	—	+ 0,094	0,90	+ 0,01	+ 0,010
0,60	+ 0,07	+ 0,082	0,95	—	+ 0,004
0,65	—	+ 0,069	1,00	0,00	0,000

on voit effectivement que la plus grande discordance de ces deux tables ne s'élève qu'à 0″,01.

Les corrections indiquées ici ne doivent pas être regardées comme définitives; car MM. Struve n'ont pas terminé leurs recherches expérimentales; et l'on peut remarquer d'ailleurs, en se rapportant aux Mensurae micrometricae, que les observations qui ont fourni les corrections pour les distances comprises entre 0″,6 et 1″,0, ne sont peut-être pas assez nombreuses.

La série des distances comprises entre 0″,4 et 0″,6 et observées par M. Otto Struve à Poulkova soulève une difficulté. Convient-il ou non d'appliquer à ces observations les corrections données par la table précédente? Cette table a été déduite par M. Struve père de ses propres observations faites à Dorpat; le défaut d'identité des observateurs ne paraît pas s'opposer à l'application de la table à la 2e série, puisque l'erreur de l'estime est attribuée à la dissemblance des limites qui terminent les espaces à comparer. D'un autre côté, les instruments de Dorpat et de Poulkova sont établis dans des conditions peu différentes et l'on y adapte des oculaires à peu près aussi puissants. La plus sérieuse objection que l'on pourrait opposer à l'usage actuel de la table de M. Struve est relative à la part un peu incertaine de l'estime et de la mesure directe dans les distances obtenues par M. Otto Struve. Quoiqu'il en soit, la série des distances de η de la Couronne fournies par cet astronome ne pourrait pas se concilier sans corrections constantes ou variables avec celles de M. W. Struve.

A défaut de données positives et à titre d'essai, je me suis décidé à appliquer aux observations de distance de M. Otto Struve les corrections tirées de la table précédente; en sorte que le résultat auquel conduit l'emploi de ces distances ne pourra être admis qu'à la condition d'être vérifié d'une autre manière. D'ailleurs il est presque inutile de rappeler qu'il ne s'agit ici que de la détermination du demi-grand axe.

Quant aux deux distances observées par M. Mädler avec la lunette de Dorpat, il résulte de ce qui vient d'être dit,

qu'on peut leur appliquer les corrections de M. Struve; c'est ce que j'ai fait.

Enfin je n'ai point tenu compte, dans la détermination du demi-grand axe, de trois distances observées, l'une par Sir John Herschel et les deux autres par M. Dawes, attendu que les différences entre les distances mesurées par ces astronomes et celles de M. Struve ne m'ont pas paru assez exactement déterminées dans le cas où les distances sont très petites. Nous reviendrons un peu plus loin sur les observations de M. Dawes.

Les observations d'angles de position que j'ai employées pour corriger les éléments de l'orbite de η de la Couronne sont au nombre de 37. Elles comprennent toutes celles qui sont parvenues à ma connaissance. Les équations de condition ont été traitées par la méthode des moindres carrés, et m'ont conduit aux éléments que voici, (le demi-grand axe excepté).

Eléments de l'orbite de η de la Couronne Boréale $\left\{\begin{array}{l}\text{R} = 15^h\,17^m,0 \\ \text{D} = +30^\circ\,50'\end{array}\right\}$ 1850

Passage au périhélie.....1779,328 : 1846,647

Moyen mouvement annuel.. 5°,3484

Angle (sin = excentricité)... 23°51',0

Longitude du noeud ascendant 9 52,3
Longitude du périhélie.... 194 51,9
} comptées du méridien de 1850 (mouvement annuel = −0',294)

Inclinaison.. ..... ±59 18,6

Demi-grand axe ..... 1",2015

D'où il suit:

Durée de la révolution.....67ans,309

Excentricité.....0,40433.

	Dates.	Position.	Distance.
Plus petit périhélie apparent	1786, 068; 1853, 377	264°33'	0",4830
Plus grand aphélie apparent	1811, 942; 1879, 251	11 5	1,6851
Plus grand périhélie apparent	1771, 431; 1838, 740	116 20	0,5139
Plus petit aphélie apparent	1778, 744; 1846, 033	188 15	0,7170

Les angles de position sont comptés du méridien de 1850.

ons.

Dates.	Angles de O h	Rapports de la distance au demi-grand axe, déduit des six 1rs éléments.	Angle de position observé — calculé		Distance corrigée — calc.
			dièdre.	en arc.	
1781, 69	210°41′	0,5346	— 0°12′	— 0″,002	—
1802, 69	359 40	1,2406	+ 1 5	+ 0,028	—
1823, 27	25 57	1,1681	— 1 33	— 0,038	—
1826, 77	—	1,0060	+ 0 24	+ 0,008	— 0″,055
1829, 55	—	0,8527	+ 0 19	+ 0,006	— 0,061
1830, 30	44 28	0,8084	— 1 11	— 0,020	(— 0,151)
1831, 36	51 12	0,7452	+ 1 10	+ 0,018	—
1831, 42	52 30	0,7416	+ 2 12	+ 0,034	—
1831, 63	—	0,7290	— 0 38	— 0,010	+ 0,019
1832, 48	56 42	0,6779	+ 1 8	+ 0,016	—
1832, 55	56 42	0,6738	+ 0 45	+ 0,011	—
1832, 76	—	0,6613	— 0 14	— 0,003	+ 0,027
1833, 28	62 6	0,6307	+ 1 53	+ 0,025	—
1833, 39	63 31	0,6243	+ 2 36	+ 0,034	—
1835, 41	—	0,5163	— 2 23	— 0,026	+ 0,157
1836, 52	—	0,4703	+ 0 39	+ 0,006	+ 0,089
1837, 47	—	0,4432	— 4 7	— 0,038	— 0,025
1838, 44	—	0,4302	— 5 17	— 0,048	— 0,028
1839, 82	—	0,4390	— 3 45	— 0,035	+ 0,144
1840, 52	—	0.4342	— 1 46	— 0,017	+ 0,073
1841, 43	150 24	0,4815	+ 0 25	+ 0,004	+ 0,010
1841, 50	—	0,4838	+ 0 31	+ 0,005	+ 0,041
1842, 21	157 58,5	0,5084	+ 0 1	+ 0,000	— 0,006
1843, 30	—	0,5460	— 2 44	— 0,031	+ 0,003
1845, 61	—	0,5933	— 2 2	— 0,025	— 0,051
1846, 61	—	0,5943	+ 1 45	+ 0,022	— 0,070
1846, 88	196 46	0,5914	+ 2 41	+ 0,033	—
1847, 64	—	0,5775	+ 2 8	+ 0,026	— 0,093
1848, 00	—	0,5681	+ 1 41	+ 0,020	(— 0,025)
1848, 72	—	0,5449	— 0 22	— 0,004	— 0,054
1849, 44	—	0,5173	+ 3 45	+ 0,041	(+ 0,073)
1849, 65	—	0,5087	— 1 54	— 0,020	+ 0,007
1850, 52	—	0,4727	— 4 3	— 0,040	— 0,017
1851, 35	236 37	0,4411	+ 1 7	+ 0,010	—
1851, 40	239 18	0,4394	+ 3 9	+ 0,029	—
1851, 56	—	0,4340	— 5 0	— 0,045	+ 0,009
1852, 62	—	0,4080	+ 4 41	+ 0,040	+ 0,032

NB. Les nombres d qui n'ont pas été employées dans la détermination du demi-gra

*) La moyenne 1″,15 ns obtenu le premier en supprimant l'une des quatre observation nservées à l'époque moyenne 1826, 77 en tenant compte de la v

Ces éléments comparés à ceux que nous avons publiés dans les Additions à la Connaissance des temps ne présentent que d'assez faibles différences avec ceux-ci; la plus grande différence angulaire, celle relative à la position du noeud est de $5^{0}\,31'$; la durée de la révolution a été augmentée d'une année, et la date du passage au périhélie de 3 mois environ.

Avant de dire comment nous avons obtenu le demi-grand axe, nous allons présenter le résultat de la comparaison de l'ensemble des observations avec nos éléments corrigés. (Voir le tableau.)

Disons maintenant comment nous avons déterminé le demi-grand axe. Les autres éléments obtenus au moyen des angles de position seulement, nous ont permis de calculer les diverses valeurs du rapport de la distance au demi-grand axe.

Soient: ρ' ce rapport; A le demi-grand axe; et ρ la distance observée et corrigée conformément aux indications de M. Struve: nous avons posé pour chaque observation de distance une équation de la forme $\rho = \rho' A$.

En traitant, par la méthode des moindres carrés, l'ensemble des équations relatives aux observations de M. W. Struve; puis de la même manière celles de M. Otto Struve et celles de M. Mädler, nous avons obtenu les trois équations suivantes :

Par 8 obs. de M. W. Struve $4''{,}3217 = 3{,}5770\,A$; d'où $A = 1''{,}2082$
12 obs. de M. O. Struve $3{,}7067 = 3{,}1063\,A$; » $A = 1{,}1933$
2 obs. de M. Mädler . . $0{,}5908 = 0{,}4903\,A$; » $A = 1{,}205$

Par l'ensemble des 22 obs. $8''{,}6192 = 7{,}1736\,A$; d'où $A = 1''{,}2015$

La plus grande différence de ces trois déterminations avec le résultat final est de $0''{,}008$ seulement. Une aussi grande concordance tendrait à justifier l'application que nous avons faite aux observations de MM. Otto Struve et Mädler des corrections qui étaient seulement légitimées à l'égard des observations de M. Struve père.

Quant à la différence entre les valeurs du demi-grand axe correspondantes à MM. Struve, nous la trouvons ici de 0″,015; elle est de même sens et précisément égale à la différence que nous avons indiquée (Additions à la Connaissance des temps pour 1852, page 197) entre les valeurs du demi-grand axe de l'orbite de *p* d'Ophiuchus, relatives à ces deux observateurs. Dans ce dernier cas, il s'agissait d'une quantité égale à 5″ environ; et les distances qui excédaient toutes 1″ n'avaient besoin de recevoir aucune correction. Toutefois la coïncidence exacte que nous rencontrons ici doit être regardée comme purement fortuite; il suffirait en effet d'altérer de quelques centièmes de seconde une des distances observées pour que la coïncidence cessât d'être aussi parfaite.

En faisant la somme des corrections apportées aux 12 distances de M. Otto Struve et celles des différences correspondantes entre l'observation corrigée et le calcul, on trouve les nombres + 1″,214 et + 0″,024, dont les moyennes sont respectivement + 0″,101 et + 0″,002. Si l'on admet que l'exactitude de la valeur du demi-grand axe est suffisamment établie par la petitesse des écarts entre les résultats partiels et le résultat moyen, on arrive à cette conséquence que la correction moyenne à appliquer aux distances observées par M. Otto Struve entre les limites 0″,4 et 0″,6 est de + 0″,099, ou à très peu près 1 dixième de seconde. Les variations des corrections employées entre ces limites ne dépassent pas 0″,02 par rapport à cette moyenne, d'où il suivrait que les erreurs de M. Otto Struve entre ces limites seraient sensiblement constantes. Au reste, ce ne sont là que des présomptions; nous les soumettons particulièrement à l'examen de l'habile astronome à l'obligeance duquel nous devons la communication de belles séries d'observations.

Nous avons laissé de côté les deux mesures de distances obtenues par M. Dawes, parce que le faible pouvoir optique de son instrument comparé à ceux de Dorpat et de Poulkova nous faisait considérer les mesures de très petites distances comme peu comparables à celles qui ont été

obtenues en Russie. Cependant les erreurs (— 0″,025) et (+ 0″,073) déduites d'une valeur du demi-grand axe obtenue sans le concours des observations de M. Dawes, montrent que les observations de cet astronome distingué ne sont pas aussi loin d'être comparables à celles de MM. Struve qu'on aurait pu le craindre tout d'abord. Le demi-grand axe que donnent les deux mesures de M. Dawes est de 1″,241, valeur qui ne diffère que de 0″,040 de notre moyenne générale. Encore faut-il faire remarquer que ce résultat étant déduit de quantités observées qui sont presque moitié moindres que le résultat obtenu, l'influence des erreurs des observations y est presque doublée.

Malgré la concordance assez remarquable des valeurs du demi-grand axe, il faut bien reconnaître que les erreurs des distances corrigées sont loin d'atteindre le degré de petitesse des erreurs qui affectent les angles de position. Indépendamment de ce que l'on pourrait conserver quelques doutes sur la légitimité des corrections appliquées, le résultat de la comparaison des distances *) montre que nous devions effectivement nous en tenir à l'emploi des angles de position dans la détermination des six principaux éléments de l'orbite.

En jetant un coup d'oil sur les différences relatives aux angles de position qui sont données dans le tableau précédent, on remarque que la plus forte de ces différences réduite en arc ne s'élève qu'à 0″,048. Leur ensemble donne pour l'erreur probable d'un angle de position exprimée de la même manière le nombre 0″,0188. Or M. Struve a établi que l'erreur probable de la moyenne de trois observations d'angle de position, réduite en arc, varie de 0″,018 à 0″,028 pour les distances comprises entre 0″,70 et 1″,48. Le

*) A l'égard de l'observation de 1839 nous devons faire remarquer d'après M. Otto Struve que les observations de cette année là peuvent n'être pas prises en considération, par la raison que c'est en 1839 qu'il a commencé à se livrer aux mesures micrométriques, et que ses observations d'alors ne pouvaient jouir de la précision que l'expérience lui a permis d'atteindre ensuite. Ainsi l'écart + 0″,144 de la distance mesurée en 1839 ne doit point nous surprendre.

résultat qui précède s'accorde très bien avec les déterminations expérimentales de M. Struve.

Notre tableau semble indiquer la trace d'une erreur systématique entre les époques 1837 et 1840; on observera que cet intervalle comprend un passage au périhélie apparent et qu'en outre on n'a là d'autres observations que celles de MM. Struve: de 1846 à 1848 on trouve encore quelques erreurs de même signe, mais qui sont très-faibles. Enfin les erreurs un peu sensibles des deux dernières observations qui sont respectivement de $-0'',045$ et $+0'',040$ peuvent être attribuées au très grand rapprochement des étoiles; car le compagnon marche vers le périhélie apparent qui doit avoir lieu en 1853, 377, la distance se réduisant à cette époque à $0'',484$.

Les traces d'erreurs systématiques dont nous avons parlé ne pourront disparaître entièrement que lorsque les astronomes auront eux-mêmes déterminé, par des observations ou expériences spéciales la loi des erreurs qui affectent les angles de position suivant l'obliquité par rapport à l'horizon de la ligne droite qui joint les images des étoiles. Nous avons lieu d'espérer que MM. Struve nous feront bientôt connaître le résultat de leurs recherches sur ce sujet.

Malgré les discordances qui subsistent encore dans les comparaisons des angles de position, nous pouvons considérer nos éléments comme représentant les observations d'une manière très-satisfaisante. Il nous reste à dire comment l'orbite de 43 ans y satisfait. Nous nous sommes bornés à comparer les deux dernières observations de M. Otto Struve aux éléments (2e solution) publiés dans les Additions à la Connaissance des temps. Le résultat de la comparaison est

Date.	Angle observé — angle calculé.	Distance obs. — distance calc.	Dist. corrigée — dist. calc.
1851, 56	$-104^\circ\ 7'$	$-0'',035$	$+0'',083$
1852, 62	$-\ 91\ 30$	$-0,213$	$-0,093$

On aura une valeur plus approchée de l'écart des deux orbites, quant aux angles de position, en corrigeant les observations de M. Otto Struve des erreurs indiquées par la comparaison présentée ci-dessus; de cette manière il vient

1851, 56 — 99° 7′
1852, 62 — 96 11

ou environ — 97°,5 pour le commencement de 1852.

Or une telle discordance n'est pas de celles que l'on fait disparaître par de légers changements dans les éléments; nous sommes donc autorisé à rejeter l'orbite de 43 ans de révolution et à considérer l'orbite de 67 ans comme étant bien celle que décrit réellement le compagnon de η de la Couronne.

La révolution de 67ans,309 ne nous paraît pas susceptible d'être sensiblement modifiée par les observations ultérieures, attendu que la position correspondante à l'ancienne observation de W. Herschel a été atteinte et dépassée dans ces dernières années; la durée de la révolution ne se trouve dès lors affectée que d'une incertitude au plus égale au temps pendant lequel serait décrit un angle de position égal à la différence algébrique de l'erreur moyenne des observations modernes et de celle de W. Herschel. On reconnaîtra aisément que cette incertitude ne peut guère dépasser une année. Or le nombre 66ans,257 satisfait déjà à l'ensemble des observations antérieures à 1848. Il est donc visible que la vraie durée de la révolution, si elle excède 67ans,309, ne s'en écartera que d'une petite fraction d'année.

Ajoutons en terminant qu'ayant appliqué aux seules observations de MM. Struve la méthode présentée dans mon 3e Mémoire sur les Etoiles Doubles, sans leur faire subir de corrections relatives aux distances, j'ai obtenu immédiatement une orbite encore un peu indéterminée, il est vrai, mais dans laquelle la durée de la révolution se trouvait être de 69ans,3. Ainsi, sans avoir recours aux anciennes observations d'Herschel, la série des observations de MM. Struve suffit déjà pour donner une idée assez approchée de l'orbite de η de la Couronne.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XI. No.* 5. 6.)

$\frac{27 \text{ Mai}}{8 \text{ Juni}}$ 1853.

Auflösung einer Aufgabe aus der *Mécanique analytique* von Lagrange; von FERD. MINDING.

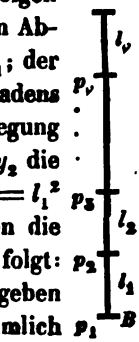
Im ersten Bande der *Méc. anal.* Seite 393 der Ausgabe von 1811 liest man Folgendes:

> Ce cas, qui est celui des oscillations très petites d'un fil suspendu à un point fixe et chargé d'un nombre quelconque de poids, est aussi susceptible d'une solution générale lorsque les poids sont tous égaux entre eux et placés à distances égales les uns des autres.

Diese Worte bezeugen, dass Lagrange sich mit der allgemeinen Aufgabe, welche beliebige Gewichte an einem frei hangenden Faden beliebig vertheilt voraussetzt, damals noch nicht näher beschäftigt hatte. Sie gaben mir Veranlassung, den Gesetzen der Schwingungen eines solchen Fadens nachzuforschen, welche sich als verhältnissmässig einfach erwiesen, und da sie meines Wissens anderweitig noch nicht bekannt gemacht worden sind, einer kurzen Darlegung nicht unwerth sein möchten.

Es sei der untere Endpunkt B eines von A frei herabhangenden Fadens AB der Anfang der nach A gerichteten x; in

B sei das Gewicht p_1 angebracht und darüber folgen der Reihe nach die Gewichte $p_2, p_3, \ldots p_\nu$ in den Abständen $p_1p_2 = l_1$, $p_2p_3 = l_2, \ldots p_{\nu-1}p_\nu = l_{\nu-1}$; der Abstand $p_\nu A$ sei $= l_\nu$ und die ganze Länge des Fadens $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_\nu = L$. Während der Bewegung seien x_1 und y_1 die Cordinaten von p_1, x_2 und y_2 die von p_2 u. s. f., so ist $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_1^2$ u. s. f. Da aber für sehr kleine Schwingungen die Quadrate der y vernachlässigt werden können, so folgt: $x_2 - x_1 = l_1$, $x_3 - x_2 = l_2$ u. s. f. oder es ergeben sich für $x_1, x_2, \ldots$ unveränderliche Werthe, nämlich $x_1 = 0$, $x_2 = l_1$, $\ldots x_\nu = L - l_\nu$, wie bei dem Gleichgewichte des Fadens. Daher werden auch in den Differentialgleichungen der Bewegung die Beschleunigungen nach x, oder die Ausdrücke $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \ldots$ sämmtlich gleich Null und die Spannungen bleiben wie in der Gleichgewichtslage, nämlich p_1 auf der Strecke l_1, $p_1 + p_2$ in l_2, $p_1 + p_2 + p_3$ in l_3 u. s. f. Es mag hier noch bemerkt werden, dass der Faden selbst nicht als schwer und auch nicht dehnbar gedacht wird, so wie dass solche Bewegungen, bei welchen die einzelnen unbelasteten Fadenstrecken sich krümmten, ausgeschlossen sind. Man setze noch:



$$p_1 = q_1 l_1,\ p_1 + p_2 = q_2 l_2, \ldots p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu = q_\mu l_\mu$$

und bezeichne in gewohnter Weise die Schwere mit g, so ergeben sich aus bekannten Gründen die folgenden Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{p_1}{g}\frac{d^2y_1}{dt^2} = \quad - q_1(y_1 - y_2),$$

$$\frac{p_2}{g}\frac{d^2y_2}{dt^2} = -q_1(y_2 - y_1) \quad - q_2(y_2 - y_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{p_\mu}{g}\frac{d^2y_\mu}{dt^2} = -q_{\mu-1}(y_\mu - y_{\mu-1}) - q_\mu(y_\mu - y_{\mu+1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{p_\nu}{g}\frac{d^2y_\nu}{dt^2} = -q_{\nu-1}(y_\nu - y_{\nu-1}) - q_\nu(y_\nu - y_{\nu+1}),$$

wo das auf den festen Aufhängepunkt A sich beziehende $y_{\nu+1}$ gleich Null ist und nur der Symmetrie wegen hier beibehalten wird. Um diesen Gleichungen zu genügen, sei $y_1 = C\cos t\sqrt{(gk)} + D\sin t\sqrt{(gk)}$, und

$$y_2 = f_1 y_1,\ y_3 = f_2 y_1, \ldots y_\nu = f_{\nu-1} y_1,$$

endlich $y_{\nu+1} = f_\nu y_1 = 0$, daher $f_\nu = 0$.

Die Einsetzung dieser Werthe ergiebt für die unbekannten Factoren f folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= p_1 k - q_1(1 - f_1),\\
0 &= p_2 f_1 k + q_1(1 - f_1) - q_2(f_1 - f_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= p_{\mu+1} f_\mu k + q_\mu(f_{\mu-1} - f_\mu) - q_{\mu+1}(f_\mu - f_{\mu+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= p_\nu f_{\nu-1} k + q_{\nu-1}(f_{\nu-2} - f_{\nu-1}) - q_\nu(f_{\nu-1} - f_\nu).
\end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Zur Abkürzung sei noch

$$p_1 = P_1,\ p_1 + p_2 = P_2, \ldots p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu = P_\mu;$$

also auch

$$q_1 l_1 = P_1,\ q_2 l_2 = P_2, \ldots,\ q_\mu l_\mu = P_\mu.$$

Wird ferner gesetzt:

$$f_\mu = \alpha^0{}_\mu - \alpha'{}_\mu k + \alpha''{}_\mu k^2 - \ldots + (-1)^\lambda \alpha^\lambda{}_\mu k^\lambda + \ldots$$

so ist hauptsächlich das Bildungsgesetz der Coefficienten (α) dieser Reihe zu untersuchen. Man findet leicht aus *I*:

$$\alpha^0{}_\mu = 1,\ \alpha'{}_\mu = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_\mu.$$

Um allgemein $\alpha^\lambda{}_\mu$ zu erhalten, setze man in die Gleichung:

$$0 = q_\mu f_{\mu-1} + (p_{\mu+1} k - q_\mu - q_{\mu+1}) f_\mu + q_{\mu+1} f_{\mu+1} \quad \text{I'}),$$

für f die obige Reihe, so ergeben die in k^λ multiplicirten Glieder die Gleichung:

$$p_{\mu+1}\alpha^\lambda{}_\mu + q_\mu[\alpha^\lambda{}_\mu - \alpha^\lambda{}_{\mu-1}] = q_{\mu+1}[\alpha^\lambda{}_{\mu+1} - \alpha^\lambda{}_\mu],$$

welche, weil

$$p_{\mu+1} = P_{\mu+1} - P_\mu,\ q_{\mu+1} = \frac{P_{\mu+1}}{l_{\mu+1}},\ q_\mu = \frac{P_\mu}{l_\mu}$$

ist, auch folgende Form annimmt:

$$P_{\mu+1}\left(\frac{{\alpha^\lambda}_{\mu+1} - {\alpha^\lambda}_\mu}{l_{\mu+1}} - {\alpha_\mu}^{\lambda-1}\right) = P_\mu\left(\frac{{\alpha^\lambda}_\mu - {\alpha^\lambda}_{\mu-1}}{l_\mu} - {\alpha_\mu}^{\lambda-1}\right). \quad \text{II.}$$

Der dieser Bedingung genügende Werth von ${\alpha^\lambda}_\mu$ wird erhalten wie folgt:

Aus den Zahlen 1, 2, 3.... μ bilde man die Combinationen zu je λ, ohne Wiederholungen; es seien $n', n'', n''', \ldots n^\lambda$ die Glieder einer solchen Combination, nach der Grösse steigend geordnet, also $n' < n'' < n''' . < n^\lambda$. Ferner bilde man das Produkt:

$$\left(1-\frac{P_{n'}}{P_{n''}}\right)\left(1-\frac{P_{n''}}{P_{n'''}}\right)\left(1-\frac{P_{n'''}}{P_{n^{IV}}}\right)\ldots\left(1-\frac{P_{n^{\lambda-1}}}{P_{n^\lambda}}\right) = \Pi_n{}^\lambda,$$

wo $P_{n'} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_{n'}$, u. s. f., übereinstimmend mit der schon eingeführten Bezeichnung; dieses Produkt werde mit $l_{n'}\, l_{n''}\, l_{n'''} \ldots l_n{}^\lambda$ multiplicirt und die Summe sämmtlicher Ausdrücke dieser Art für alle möglichen Verbindungen der Elemente 1, 2, 3..μ zu je λ genommen; so hat man ${\alpha^\lambda}_\mu$.

Hiernach ist

$${\alpha^\lambda}_\mu = \overset{(\mu)}{\Sigma}\, l_{n'}\, l_{n''}\, l_{n'''} \ldots l_n\lambda \,.\, \Pi_n\lambda, \quad \text{III.}$$

wo $\overset{(\mu)}{\Sigma}$ die Summe aller Combinationen aus μ Elementen andeutet.

Beispiele:

$${\alpha^2}_2 = l_1 l_2\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{l_1 l_2 p_2}{p_1 + p_2}.$$

$${\alpha^2}_3 = l_1 l_2\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) + l_1 l_3\left(1 - \frac{P_1}{P_3}\right) + l_2 l_3\left(1 - \frac{P_2}{P_3}\right) = \frac{l_1 l_2 p_2}{p_1 + p_2} + \frac{l_1 l_3 (p_2 + p_3)}{p_1 + p_2 + p_3} + \frac{l_2 l_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Von der Richtigkeit dieser beispielsweise angeführten Werthe überzeugt man sich leicht durch Entwickelung von

$f_2, f_3 \ldots$ aus *I.* Der allgemeine Beweis für den in *III.* angegebenen Werth von $\alpha^{\lambda}{}_{\mu}$ lässt sich also führen:

Werden in dem Ausdrucke *III.* für $\alpha^{\lambda}{}_{\mu}$ diejenigen Theile, in welchen $n^{\lambda} = \mu$ ist, von den übrigen abgesondert, worin n^{λ} höchstens $= \mu - 1$ ist, so geben die letzteren zusammen $\alpha^{\lambda}{}_{\mu-1}$ und man erhält:

$$\alpha^{\lambda}{}_{\mu} - \alpha^{\lambda}{}_{\mu-1} =$$

$$l_{\mu}^{(\mu-1)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n}\lambda - 1 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 1 \,.\, \left(1 - \frac{P_{n}\lambda - 1}{P_{\mu}}\right)$$

oder

$$\frac{\alpha^{\lambda}{}_{\mu} - \alpha^{\lambda}{}_{\mu-1}}{l_{\mu}} =$$

$$\alpha_{\mu-1}^{\lambda-1} - \frac{1}{P_{\mu}}\,{}^{(\mu-1)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n}\lambda - 1 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 1 \,.\, P_{n}\lambda - 1;$$

ferner ist

$$\alpha_{\mu}{}^{\lambda-1} =$$

$$\alpha_{\mu-1}^{\lambda-1} + l_{\mu}^{(\mu-1)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \,.\, l_{n}\lambda - 2 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 2 \,.\, \left(1 - \frac{P_{n}\lambda - 2}{P_{\mu}}\right),$$

folglich:

$$P_{\mu}\left(\frac{\alpha^{\lambda}{}_{\mu} - \alpha^{\lambda}{}_{\mu-1}}{l_{\mu}} - \alpha_{\mu}{}^{\lambda-1}\right) =$$

$$-\,{}^{(\mu-1)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n}\lambda - 1 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 1 \,.\, P_{n}\lambda - 1 \qquad \text{a.}$$

$$- l_{\mu}\,{}^{(\mu-1)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n}\lambda - 2 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 2 \,.\, [P_{\mu} - P_{n}\lambda - 2].$$

Eben so ist

$$\alpha^{\lambda}{}_{\mu+1} - \alpha^{\lambda}{}_{\mu} =$$

$$l_{\mu+1} \,.\, \alpha_{\mu}{}^{\lambda-1} - \frac{l_{\mu+1}}{P_{\mu+1}}\,{}^{(\mu)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n}\lambda - 1 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 1 \,.\, P_{n}\lambda - 1$$

oder

$$P_{\mu+1}\left(\frac{\alpha^{\lambda}{}_{\mu+1} - \alpha^{\lambda}{}_{\mu}}{l_{\mu+1}} - \alpha_{\mu}{}^{\lambda-1}\right) =$$

$$-\,{}^{(\mu)}\Sigma\, l_{n'} l_{n''} \,.\, l_{n}\lambda - 1 \,.\, \Pi_{n}\lambda - 1 \,.\, P_{n}\lambda - 1.$$

Werden hier wieder rechter Hand die in l_μ multiplicirten Glieder, für welche $n^{\lambda-1}=\mu$ ist, von den übrigen abgesondert, so erhält man:

$$P_{\mu+1}\left(\frac{\alpha^\lambda{}_{\mu+1}-\alpha^\lambda{}_\mu}{l_{\mu+1}}-\alpha_\mu{}^{\lambda-1}\right)=$$

$$-\overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'}l_{n''}\ldots l_n\lambda-1\,.\,\Pi_n\lambda-1\,.\,P_n\lambda-1 \qquad \text{b.}$$

$$-l_\mu\overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'}l_{n''}\ldots l_n\lambda-2\,.\,\Pi_n\lambda-2\,.\,[P_\mu-P_n\lambda-2].$$

Die Uebereinstimmung der mit *a.* und *b.* bezeichneten Werthe beweist, dass die Gleichung *III.* der Bedingung *II.* genügt. Indem man sich nun leicht überzeugen kann, dass der nach dieser Regel gebildete Ausdruck von f_μ richtig ist für $\mu=2,\ 3,\ldots$ und indem man mit Hülfe der Gleichung *I**) allgemein von f_μ auf $f_{\mu+1}$ übergeht, so erhält man schliesslich:

$$f_\mu=1-\overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'}\,.\,k+\overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'}l_{n''}\,.\,\Pi_{n''}\,.\,k^2+\ldots$$

$$+(-1)^\lambda\overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'}l_{n''}\ldots l_n\lambda\,.\,\Pi_n\lambda\,.\,k^\lambda\ldots+(-1)^\mu\,.\,l_1l_2l_3\ldots l_\mu\,.\,\Pi_\mu\,.\,k^\mu \qquad \text{IV.}$$

da für $\lambda>\mu$ nach *III.* $\alpha^\lambda{}_\mu=0$ ist.

In dem von Lagrange untersuchten Falle gleicher Gewichte (p) in gleichen Abständen (l) wird nach obiger Formel:

$$f_\mu=1-\mu lk+\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1-\frac{n'}{n''}\right)\,.\,l^2k^2-\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1-\frac{n'}{n''}\right)\left(1-\frac{n''}{n'''}\right)\,.\,l^3k^3+\ldots$$

während die *Méc. anal.* angiebt:

$$f_\mu=1-\mu_1lk+\mu_2\frac{l^2k^2}{2'}-\mu_3\frac{l^3k^3}{3'}+\ldots.$$

wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3\ldots$ die Binomialzahlen $\mu, \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}$, u. s. w. bedeuten. Es muss demnach sein:

$$\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1-\frac{n'}{n''}\right)\left(1-\frac{n''}{n'''}\right)\ldots\left(1-\frac{n^{\lambda-1}}{n^\lambda}\right)=\frac{\mu_\lambda}{\lambda'},$$

welche Summation bemerkenswerth erscheint. Einen von der gegenwärtigen Untersuchung unabhängigen Beweis dieser

Formel will ich hier, als entbehrlich, der Kürze wegen unterdrücken.

Aus dem in *IV.* aufgestellten allgemeinen Ausdrucke für f_μ folgt die zur Bestimmung von k nöthige Gleichung, wenn für μ die Anzahl sämmtlicher Gewichte (ν) gesetzt wird, nämlich:

$$f_\nu = 0. \qquad \text{V.}$$

Sie ist in Hinsicht auf k vom νten Grade und die nähere Betrachtung der Gleichungen *I.* lehrt, in so fern die darin vorkommenden p und q der gegenwärtigen Aufgabe gemäss überall positive, von Null verschiedene Grössen sind, dass sie ν reelle, positive, ungleiche Wurzeln hat.

Durch Vertauschung von k mit k' gehe f_μ in f'_μ über. Multiplicirt man nun die ersten $\mu + 1$ der Gleichungen *I.* der Reihe nach mit $1, f'_1, f'_2, \ldots f'_\mu$ und addirt die Produkte, so kommt:

$$k \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} q_{\lambda+1} (f_\lambda - f_{\lambda+1})(f'_\lambda - f'_{\lambda+1}) + q_{\mu+1}(f_\mu - f_{\mu+1}) f'_\mu.$$

Verwechselt man hier k mit k', also auch f mit f', so folgt:

$$k' \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} q_{\lambda+1} (f_\lambda - f_{\lambda+1})(f'_\lambda - f'_{\lambda+1}) + q_{\mu+1}(f'_\mu - f'_{\mu+1}) f_\mu;$$

daher:

$$(k' - k) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda = q_{\mu+1}(f_{\mu+1} f'_\mu - f_\mu f'_{\mu+1}) \qquad \text{VI.}$$

oder

$$(k' - k)[p_1 + p_2 f_1 f'_1 + p_3 f_2 f'_2 + \ldots + p_{\mu+1} f_\mu f'_\mu] = q_{\mu+1}(f_{\mu+1} f'_\mu - f_\mu f'_{\mu+1}),$$

indem bei der Summation hier überall, wie gewöhnlich, die obere Grenze ausgeschlossen ist.

Aus *VI.* folgt: Sind k und k' zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $f_{\mu+1}=0$, so ist $f_{\mu+1}=0$ und $f'_{\mu+1}=0$; also

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f'_\lambda = 0. \qquad \textbf{VII.}$$

Sind die Grössen k und k' einander gleich, so wird $f_\mu = f'_\mu$, $f_{\mu+1} = f'_{\mu+1}$ und man erhält für vorstehende Summen zunächst $\frac{0}{0}$. Der wahre Werth findet sich auf bekannte Weise, nämlich:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f_\lambda = \left(f_{\mu+1}\cdot\frac{df_\mu}{dk} - f_\mu\cdot\frac{df_{\mu+1}}{dk}\right) q_{\mu+1}. \qquad \textbf{VIII.}$$

Wird hier für k eine Wurzel der Gleichung $f_{\mu+1}=0$ gesetzt, so ist:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f_\lambda = -f_\mu\cdot\frac{df_{\mu+1}}{dk}\cdot q_{\mu+1}. \qquad \textbf{IX.}$$

Nun seien $k'k''k'''\ldots k^\nu$ die Wurzeln (k) der Gleichung $f_\nu=0$, nach der Grösse steigend geordnet, k^λ irgend eine derselben; so ist der vollständige Ausdruck der Ordinate des schwingenden Gewichtes p_1 folgender:

$$y_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu+1} [C_\lambda \cos t\sqrt{(gk^\lambda)} + D_\lambda \sin t\sqrt{(gk^\lambda)}],$$

wo C_λ und D_λ die zu k^λ gehörigen Constanten sind, deren Gesammtzahl 2ν beträgt. Wird ferner durch $f^\lambda{}_\mu$ der Werth bezeichnet, welchen f_μ durch Einsetzung von k^λ für k erhält, so findet man für die Schwingungen von $p_{\mu+1}$:

$$y_{\mu+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu+1} [C_\lambda f^\lambda_\mu \cos t\sqrt{(gk^\lambda)} + D_\lambda f^\lambda_\mu \sin t\sqrt{(gk^\lambda)}]. \qquad \textbf{X.}$$

Wie die Constanten C_λ und D_λ mit Hülfe der Gleichung *VII.* bestimmt werden, bedarf keiner Erläuterung. Man findet, wenn $y^0{}_\mu$ und $k^0{}_\mu$ die Werthe von y_μ und $\frac{dy_\mu}{dt}$ für $t=0$ sind:

$$N.\, C_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f^\lambda{}_\mu y^0{}_\mu,$$

$$N.D_\lambda.V(gk^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\nu}p_{\mu+1}f^\lambda{}_\mu k^0, \qquad \text{XII.}$$

wo der gemeinschaftliche Nenner

$$N=\sum_{\mu=0}^{\mu=\nu}p_{\mu+1}f^\lambda{}_\mu f^\lambda{}_\mu$$

ist und nach *IX.* sich auch also schreiben lässt, nämlich:

$$N=-f^\lambda{}_{\nu-1}\cdot\frac{df^\lambda{}_\nu}{dk^\lambda}\cdot q_\nu \text{ für } x=L.$$

Hiermit ist die vorliegende Aufgabe für einen mit getrennten Gewichten beschwerten Faden gelöst. Für eine stetig vertheilte Belastung des Fadens gehen die gefundenen Ausdrücke in die folgenden über, welche ich hier, ausführlichere Betrachtungen einer anderen Gelegenheit vorbehaltend, noch kurz angeben will.

Es sei P_x das Gewicht des Fadens vom tiefsten Punkte bis zur Höhe x, so entspricht den vorigen Differentialgleichungen jetzt die folgende, worin einstweilen P für P_x gesetzt ist, nämlich:

$$\frac{1}{g}\frac{dP}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d\left(P\frac{dy}{dx}\right)}{dx}. \qquad \text{XIII.}$$

Hierin werde gesetzt: $y=C.f\cos t\sqrt{(gk)}+D.f\sin t\sqrt{(gk)}$, wo f eine noch zu bestimmende Function von x ist, so folgt, entsprechend den Gleichungen *I.* im vorigen Falle,

$$0=kf\frac{dP}{dx}+\frac{d\left(P\frac{df}{dx}\right)}{dx}. \qquad \text{XIII.}$$

Nun sei

$$f=1-\chi_1k+\chi_2k^2-\chi_3k^3+\ldots \text{ in inf.}, \qquad \text{XIV.}$$

so wird

$$\chi_1=x,\ \chi_2=\int_0^x dl_2\int_0^{l_2}dl_1\left(1-\frac{Pl_1}{Pl_2}\right)$$

wo Pl_1, Pl_2, .. die Werthe von P für $x=l_1$, $x=l_2$, .. sind. Es sei zur Abkürzung

$$\Pi_n = \left(1 - \frac{Pl_1}{Pl_2}\right)\left(1 - \frac{Pl_2}{Pl_3}\right)\left(1 - \frac{Pl_3}{Pl_4}\right)\cdots\left(1 - \frac{Pl_{n-1}}{Pl_n}\right),$$

so wird allgemein

$$\chi_n = \int_0^x dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1} \int_0^{l_{n-1}} dl_{n-2} \int \cdots \int_0^{l_2} dl_1 \cdot \Pi_n \cdot \textbf{XIV.})$$

Die Reihe für f convergirt für jeden Werth von k, wie leicht zu beweisen ist.

Schreibt man in dieser Reihe k' für k, so gehe f in f' über. Alsdann gelten die beiden Gleichungen:

$$kfdP + d\left(P\frac{df}{dx}\right) = 0 \text{ und } k'f'dP + d\left(P\frac{df'}{dx}\right) = 0,$$

aus deren Verbindung hervorgeht:

$$(k' - k)\int_0^x ff'dP = \left[f'\frac{df}{dx} - f\frac{df'}{dx}\right]P, \qquad \textbf{XV.}$$

indem hinsichtlich der Integrations-Constante zu bemerken ist, dass für $x = 0$, P verschwindet.

Für $k' = k$ folgt hieraus:

$$\int_0^x ffdP = \left[\frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx} - f\frac{d^2f}{dxdk}\right]P. \qquad \textbf{XVI.}$$

Für jedes x zwischen 0 und L hat die Gleichung $f = 0$ unendlich viele reelle, positive, ungleiche Wurzeln k und keine anderen.

Nun sei k eine, k' eine andere dieser Wurzeln, so ist $f = 0$ und $f' = 0$, also nach *XV.*

$$\int_0^x ff'dP = 0. \qquad \textbf{XVII.}$$

Ist hingegen $k = k'$ und $f = f' = 0$, so wird nach *XVI.*

$$\int_0^x ffdP = \frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx}\cdot P. \qquad \textbf{XVIII.}$$

Man bezeichne durch $k', k'', k''', \ldots k^\lambda \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f = 0$, nachdem darin L für x gesetzt worden, und zwar, wie bisher, nach der Grösse geordnet, so dass

$$k' < k'' < k''' < \ldots < k^\lambda < k^{\lambda+1} \ldots,$$

so erhält man schliesslich, wenn noch der Deutlichkeit wegen f als Function von x und k durch $f(x, k)$ bezeichnet wird:

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} [C_\lambda f(x,k^\lambda)\cos t\sqrt{(gk^\lambda)} + D_\lambda f(x,k^\lambda)\sin t\sqrt{(gk^\lambda)}] \quad \text{XIX.}$$

und wenn für $t=0$, $y=y^0$, $\frac{dy}{dt}=w^0$ ist, nach *XVII.*

$$N.C_\lambda = \int_0^L y^0 f(x,k^\lambda)\,dP,\ N.D_\lambda\sqrt{(gk^\lambda)} = \int_0^L w^0 f(x,k^\lambda)\,dP, \quad \text{XX.}$$

wo der gemeinsame Nenner

$$N = \int_0^L [f(x,k^\lambda)]^2\,dP$$

nach *XVIII.* sich auch ausdrücken lässt durch den Werth von

$$\frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx}\cdot P \text{ für } x=L \text{ und } k=k^\lambda.$$

Es zerfällt also die gesammte Bewegung des Fadens in eine unendliche Anzahl einfacher Schwingungen, deren jede als für sich bestehend betrachtet werden kann. Bezeichnet man die zu $k', k'', k''', \ldots$ gehörigen Schwingungen der Reihe nach als die erste, zweite, dritte, .. wobei immer $k' < k'' < k''' \ldots$ vorausgesetzt wird, so ist die Dauer der λten Schwingung $= \frac{2\pi}{\sqrt{(gk^\lambda)}}$, also für einen grossen Werth von λ, dem ein noch viel grösseres k^λ entsprechen wird, sehr klein; ferner theilt sich vermöge dieser λten Schwingung der Faden in λ Stücke, zwischen denen sich $\lambda - 1$ Ruhepunkte oder Schwingungsknoten befinden; d. h. es lässt sich zeigen, dass für ein gegebenes k, nämlich k^λ, die transscendente Gleichung in x: $f(x,k^\lambda) = 0$ zwischen $x=0$ und $x=L$, $\lambda - 1$ reelle, positive, ungleiche Wurzeln x hat, zu welchen noch die Wurzel $x=L$ hinzukommt. Man ersieht hieraus, wie für hinreichend grosse λ die Werthe von C_λ und D_λ, verglichen mit den entsprechenden Werthen für kleinere λ, sehr klein werden können, wie es die Convergenz der Reihe *XIX.* fordert; nämlich in den Werthen *XX.* von C_λ und D_λ heben sich die Theile der

Zähler durch den Gegensatz der Zeichen für ein hinreichend grosses λ in beträchtlichem Maasse auf, während der Nenner durch quadratische Elemente anwächst. Dieser Umstand, welcher auch bei andern Reihenentwickelungen willkührlicher Functionen wiederkehrt und gewiss höchst wesentlich ist, reicht jedoch zu einem strengen analytischen Beweise der Convergenz nicht hin und muss ein solcher hier, wie in manchen ähnlichen Fällen, noch erwartet werden, während inzwischen Gründe, die in der Natur der Sache liegen, die Convergenz nicht bezweifeln lassen.

Um noch ein Beispiel anzuführen, sei die Belastung des Fadens nach folgendem Gesetze vertheilt: Auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = L^0$ sei $P = x^n$ (n positiv) und von $x = L^0$ bis $x = L$ sei der Faden leer, d. h. $P = (L^0)^n$. Alsdann ergiebt sich:

$$f(x,k) =$$

$$1 - xk + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{x^2k^2}{2} - \frac{n.n}{n+1.n+2}\cdot\frac{x^3k^3}{3'.} + \frac{n.n.n}{n+1.n+2.n+3}\cdot\frac{x^4k^4}{4'.} - \ldots$$

gültig von $x = 0$ bis $x = L^0$, und

$$f(x,k) = 1 - xk + \frac{nL^0}{n+1}\left[x - \frac{L^0}{2}\right]\frac{k^2}{1} - \frac{n.n.L^{0^2}}{n+1.n+2}\left[x - \frac{2L^0}{3}\right]\frac{k^3}{2'.}$$

$$+ \frac{n.n.n.L^{0^3}}{n+1.n+2.n+3}\left[x - \frac{3L^0}{4}\right]\frac{k^4}{3'.} - \ldots.$$

von $x = L^0$ bis $x = L$. Für $x = L^0$ fallen beide Werthe zusammen.

Für $L^0 = L$, d. h. wenn die unbelastete Strecke verschwindet, gilt die erste Formel für die ganze Länge des Fadens, und wenn n eine ganze Zahl ist, so fällt sie mit einer Reihe zusammen, auf welche Bessel bei einer Untersuchung über planetarische Störungen (Schr. der Berl. Akademie vom Jahre 1824) geführt worden ist und welche er daselbst durch ein sehr einfaches bestimmtes Integral dargestellt hat. Es ist nämlich, wenn n eine positive ganze Zahl, die obige Reihe

$$1 - xk + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^2k^2}{2'.} - \ldots. =$$

$$\frac{(n-1)'.}{\pi\,(nkx)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\pi} \cos\left[(n-1)\,\varepsilon - 2\sqrt{(nkx)}\sin\varepsilon\right] d\varepsilon.$$

Die Herleitung dieses Ausdruckes übergehe ich um so mehr, als er für ein gebrochenes n ungültig wird und weil es hier überhaupt um besondere Fälle sich nicht handelt. Zu diesen gehören auch, nämlich der Annahme $n = 1$ entsprechend, die in der *Méc. anal.* betrachtete Schwingung eines gleichmässig schweren Fadens, so wie die bei Untersuchung des Wärmezustandes eines Cylinders in Fourier's Werke vorkommende und dort durch das obige Integral (für $n = 1$) ausgedrückte Reihe. Dies sind, so weit meine Kenntniss reicht, die einzigen Beispiele, in welchen die oben mit $f(x, k)$ bezeichneten Functionen bis jetzt hervorgetreten sind, deren Allgemeinheit durch das Vorstehende vielleicht in helleres Licht gesetzt wird.

Dorpat den 22 Mai (3 Juni) 1853.

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. XII. No.* 5. 6.)

$\frac{27\ \text{Mai}}{8\ \text{Juin}}$ 1853.

Rapport fait a M. le Directeur de l'Observatoire central sur les travaux de l'Expédition de Bessarabie, entreprise en 1852, pour terminer les opérations de la mesure de l'arc du méridien, par M. Prazmovski, astronome de l'Observatoire de Varsovie.

Les travaux de la mesure de l'arc colossal du méridien qui traverse les régions septentrionales de la Norvège et de la Suède, et toutes les provinces occidentales de la Russie, touchaient à leur fin. Pour donner le cachet de la dernière exactitude aux travaux russes, il fallait répéter les observations astronomiques sur quelques points méridionaux de cet arc, afin de les mettre au niveau de l'exactitude avec laquelle les travaux de la partie boréale avaient été exécutés. Une expédition devait se rendre, en été 1852, au midi de la Russie, pour faire les observations astronomiques requises. En même temps, l'expédition devait remesurer la base extrême méridionale, vu que la mesure antérieure présentait quelques petites incertitudes.

Appelé, par votre confiance, à la place de chef de l'expédition, je me rendis de Varsovie à Poulkova, déja en juin, pour assister aux préparatifs de l'expédition.

Messieurs Wagner, astronome à Poulkova, Gamov, officier du corps des topographes, et Butz, mécanicien, m'avaient été désignés pour collaborateurs. L'appareil qui devait servir pour remesurer la base de Taschbounar, près d'Ismaïl, se trouvait à Iékaterinoslav, entre les mains du major-général Vrontchenko. Cet appareil, ainsi que l'étalon qui l'accompagnait, ayant pu subir des dérangements, par suite de longs voyages et d'un usage de plusieurs années, il fallait l'examiner et corriger sur place. Notre mécanicien, muni d'un atelier ambulant, était à même de remettre l'appareil en bon état et de faire de petites réparations aux instruments.

Une nouvelle règle normale, étalon à bouts fixes, soigneusement comparée à l'étalon primitif de Poulkova, avait été expédiée à Moscou, sous la surveillance d'un sous-officier topographe, par le chemin de fer, au milieu du mois de juin, et de là elle devait être transportée par un voiturier, toujours sous la même surveillance personnelle, à Iékaterinoslav, et servir à la vérification de l'ancien étalon, envoyé de Poulkova déjà en 1848.

Voici l'itinéraire projeté et le plan des travaux de l'expédition.

Nous devions nous rendre par Moscou à Iékaterinoslav, exécuter les comparaisons de l'ancienne règle normale avec l'autre, nouvellement envoyée; nous acheminer à Ismaïl, avec tout l'appareil de la base, faire la détermination de la latitude et de l'azimut à Staro-Nekrassovka, extrémité australe du grand arc; puis mesurer la base de Taschbounar. Enfin, sur notre retour, nous avions à passer par Souprounkovtsi, pour déterminer la latitude de ce point.

La latitude de Staro-Nekrassovka devait être fixée, avec un soin tout particulier, par les deux méthodes des distances zénithales méridiennes et des passages observés au premier vertical.

Pour l'exécution des travaux astronomiques nous étions munis des appareils suivants:

1) Un *cercle vertical de Repsold* de 14 pouces de diamètre

avec 4 microscopes micrométriques. La lunette non brisée de 27 pouces de foyer était à l'extrémité de l'axe; objectif de 2 pouces, grossissements de 45 et 90 fois. Cet instrument avait servi en 1851 et 1852 à la détermination des latitudes de Torneå et de Fuglenaes.

2) Un *instrument universel de Repsold* à deux microscopes micrométriques pour chaque cercle. Le cercle vertical avait 10 pouces de diamètre, le cercle horizontal 12 pouces; lunette brisée, de $22^1/_2$ pouces de foyer et 22 lignes d'ouverture, grossissement de 54 fois. Le renversement très facile rendait cet instrument tout-à-fait propre aux observations du premier vertical.

3) Un *théodolite* de 8 pouces d'*Ertel*.

4) Quatre *chronomètres* dont deux réglés sur le temps sidéral, deux autres sur le temps moyen.

5) Deux *baromètres* de voyage.

6) *Thermomètres*.

7) Différents *appareils auxiliaires* tant pour les observations astronomiques, que pour la mesure de la base.

8) Deux *statifs transportables*, mais d'une extrême solidité, pour les deux instruments principaux.

Les boîtes des instruments furent emballées et placées avec les plus grandes précautions, pour qu'ils pussent supporter un long voyage en tarantass (voiture à longs brancards en bois), à travers un pays dépourvu en partie de bonnes routes. Les mêmes deux voitures, devaient servir pour les observateurs. L'appareil de la base avait son char à ressorts à lui.

Le 20 juillet (1 août) 1852 nous nous mîmes en route par la chaussée de Moscou, où nous sommes arrivés le 24 juillet (5 août).

En arrivant à Moscou notre premier soin fut de nous assurer, si les instruments avaient bien supporté le voyage. Pas une vis n'était dérangée, pas une ficelle cassée. L'emplacement et l'emballage des instruments avaient été parfaits sous tous les raports.

A Moscou nous fûmes obligés de nous arrêter deux jours,

pour remplacer par de nouvelles roues celles d'un de nos tarantass, qui avaient été fortement endommagées dans ce voyage de 700 verstes. Le 2 (14) août à midi nous parvinmes à Iékaterinoslav.

A notre arrivée, la règle normale n'était pas encore parvenue au lieu de sa destination. D'après le rapport du topographe qui accompagnait l'étalon, nous l'avions précédé au moins d'une semaine. Le temps nous étant précieux, une semaine de la meilleure saison pour les observations perdue en inactivité, dans l'attente de l'arrivée de la mesure normale, aurait pu en effet entraver la marche de nos opérations. Cette considération nous décida à quitter Iékaterinoslav avant l'arrivée de la nouvelle règle normale, et de remettre les comparaisons des deux étalons à l'époque où ils se trouveraient sur le lieux de la base à mesurer, avec tout l'appareil. Aussi le général Vrontschenko s'était il chargé d'expédier le nouvel étalon à Ismaïl simultanément avec les règles de l'appareil de la base.

Par suite de pluies abondantes, les routes dans les steppes étaient devenues à peine praticables, surtout pour nos lourds équipages. Le voyage de Iékaterinoslav à Odessa ne se fit que lentement, par la nécessité de s'arrêter dans les nuits les plus obscures, là où pendant le jour on trouvait à peine le moyen de passer.

Ce n'est que le 12 (24) août que nous sommes arrivés à Ismaïl. Je ne puis passer sous silence le zèle des autorités tant civiles que militaires à Ismaïl, à nous aider dans les arrangements pour accélérer la marche de nos travaux. Sans cette coopération active, nous aurions risqué d'éprouver des lenteurs qui auraient pu être funestes à la réussite de notre entreprise.

Le jour même de notre arrivée nous nous rendimes à Staro-Nekrassovka. Le lendemain dans la matinée, les matériaux pour la construction de l'observatoire temporaire, et d'un pilier maçonné, pour l'instrument universel, furent transportés à Staro-Nekrassovka; les six hommes de la milice intérieure, destinés à nous aider et à surveiller les instruments étaient présents.

L'instrument universel devait servir à déterminer la latitude, tant par les distances zénithales méridiennes, que par les observations au premier vertical. L'emplacement de deux instruments pour les observations des distances zénithales sous la même tente était impossible. C'est pourquoi je me décidai à observer en dehors de l'observatoire, en réservant le centre de la station et de la tente au cercle vertical de Repsold. Le pilier de mon instrument universel était placé à l'ouest du centre de la station, près de la paroi de la tente, dans une distance de $7^1/_2$ pieds du centre.

La solidité du pilier était une des conditions les plus importantes pour l'exactitude des observations au premier vertical. J'ai pris toutes les précautions possibles pour ce but. Une excavation de trois pieds environ de profondeur a été creusée dans le sol qui était d'une fermeté remarquable (terre-glaise). Au fond, on a enfoncé trois pilotis en bois dur, d'un pied et demi de long. Tout ce fond a été couvert d'une couche d'un excellent mortier en chaux et sable. Un bloc d'une pierre calcaire très poreuse, à deux surfaces horizontales, a été placé dessus. Sur le bloc j'ai fait sceller en mortier un cube de la même pierre, et sur cette pierre une dalle, d'un calcaire plus dur, qui devait servir de base à l'instrument.

Les observations devaient commencer avant que le mortier eût le temps de sécher complètement; surtout celui qui se trouvait sous terre. J'espérai que les trois pilotis produiraient une position tout-à-fait stable du pilier. Si le changement hygrométrique du bois pouvait donner quelques petits mouvements au pilier, ils devaient être d'une marche régulière, et par cela même peu à craindre. L'expérience a jusifié l'attente. Le pilier était d'une solidité qui ne laisse rien à désirer.

Ma première observation préalable date du 16 (28) août. Nous avons commencé les observations régulières le 19 (31) août.

Le temps assigné à notre expédition était trop court, pour

que nous pussions consacrer un temps considérable aux observations dans un même endroit. A Ismaïl, j'avais à déterminer la latitude géographique avec l'instrument universel, par les distances zénithales et par les passages, ainsi que l'azimut et le temps. J'ai donc été obligé de me restreindre à un nombre modique d'observations. Pour les distances au zénith, je me suis posé, comme minimum, quatre journées d'observations, et de faire le plus grand nombre d'observations des différentes étoiles principales, guidé toutefois dans le choix des étoiles par leur position symétrique des deux côtés du zénith. Chaque jour j'ai changé le lieu du zénith sur le limbe de 45 degrès.

Voici la liste des étoiles choisies pour les deux instruments du méridien:

au Nord.	$z =$	*au Sud.*	$z =$
α Cephei	16° 38′	α Coronae	18° 7′
α Ursae majoris	17 12	α Bootis	25 23
β Ursae minoris	29 25	α Ophiuchi	32 40
δ Ursae minoris sub polo	41 16	α Aquilae	36 51
Polaire	44 40	φ Orionis	37 58
β Ursae minoris sub polo	59 55	β Aquilae	39 18
α Ursae majoris sub polo	72 7	α Canis minoris	39 44
		δ Aquilae	42 31
		δ Orionis	45 44
		α Aquarii	46 22
		β Orionis	53 43
		α Canis majoris	61 51
		α Scorpii	71 26.

A l'exception de la polaire, toutes les autres étoiles ont été observées près de la culmination. Dans les quatre journées du 31 août au 3 septembre, j'ai réuni 34 mises d'onze étoiles situées au sud du zénith, et 27 mises de six étoiles situées au nord du zénith. Chaque mise était composée de deux pointages, dans chaque position du cercle.

Chaque jour, la correction du chronomètre a été déterminée à l'aide des distances zénithales à l'est et à l'ouest

du méridien, par les deux astronomes, chacun observant le temps avec son instrument. La comparaison des deux chronomètres donnait le contrôle des deux séries.

M. Wagner, consacrant tout son temps aux uniques observâtions des distances zénithales, avec le cercle vertical de Repsold, a pu disposer ses observations méridiennes d'une manière plus symétrique et plus élégante, relativement au zénith. Ses observations se partageaient, en outre, en deux groupes distincts, donnés par le changement de la position de l'objectif et de l'oculaire aux deux extrémités du tube. Depuis le 31 août n. s. jusqu'au 18 septembre, M. Wagner a pu réunir au delà de 130 mises, à peu près également disposées par rapport au zénith et dans les deux groupes indiqués. Cette belle série d'observations présente toutes les conditions de l'élimination des erreurs dans l'instrument et dans la réfraction.

Ma série, quoique moins grande et moins élégante, présente néanmoins les conditions requises pour cette élimination. Les erreurs de division sont éliminés, pour la plupart des étoiles, par la distribution régulière sur le cercle, et leur influence sur la latitude est sensiblement évanouissante, à cause de l'égalité presque parfaite des distances zénithales moyennes au sud et au nord du zénith.

Je me suis fixé le minimum des observations à faire au premier vertical à six journées. Voici les étoiles choisies, leurs distances au zénith et le nombre d'observations que j'ai faites.

	$z =$		
22 Andromedae	0° 5′	observée	5 fois
ϱ Cygni	0 24	»	6
β Aurigae	0 25	»	6
δ Cygni	0 34	»	6
α Cygni	0 35	»	8
3 Lyrae	1 35	»	1

3 Lyrae n'a été observée qu'une seule fois. D'abord son passage au vertical est tombait avant le coucher du soleil. L'étoile, quoique visible (5^{me} gr.), était excessivement faible et son passage au vertical ouest tombait entre les autres

passages. Ce n'était qu'avec peine qu'on pouvait parvenir à l'observer. J'ai préféré de négliger cette étoile.

J'avais établi une mire dans la direction occidentale du premier vertical, dont l'azimut a été déterminé par la mesure de l'angle entre la mire méridienne et celle-ci. Cette mire servait de point de repère, pour contrôler ou produire l'azimut invariable de l'axe optique de l'instrument. Le 5 septembre j'ai fait les premières observations des passages, le 18 les dernières.

Pour déterminer l'azimut d'un des sommets de triangle du premier ordre, dans ce climat où les images des objets terrestres distants sont rarement tranquilles, j'ai préféré d'observer l'azimut d'une mire pas trop éloignée, donc mieux visible, et de le transporter au point trigonométrique par l'angle intermédiaire mesuré avec soin. Dans ce but, j'ai fait enfoncer au nord de l'observatoire, à une distance d'au delà d'une verste, un pieu sur lequel se trouvait un carré noir, d'un pied de côté, au milieu duquel j'ai fait placer un autre carré blanc de deux pouces de côté. La déviation de cette mire était de quelques minutes du méridien. Le pieu était solidement fixé dans le sol très dur. S'il y avait un déplacement du pieu dans le sol (ce qui n'aurait pas été étonnant dans un pays où les pluies très rares permettent au sol de se dessécher si fortement qu'il fait des crévasses de plusieurs lignes de large et d'une étendue considérable), un tel déplacement s'éliminait par les mesures de l'angle entre la mire et le clocher de Novo-Nekrassovka, point du premier ordre; mesures entreposées entre les déterminations de l'azimut.

L'azimut a été déterminé par 12 mises dans lesquelles la polaire a été observée deux fois et la mire autant de fois, pour chaque position du cercle. Le premier pointage sur la mire précédait, le second suivait les deux observations de la polaire. L'angle entre la mire et le clocher a été déterminé par le même nombre de mises.

En 20 jours nous parvinmes à réunir un nombre assez imposant d'observations, des différents genres, grâce au beau temps qui nous favorisait. Effectivement, il n'y a eu qu'une

seule journée qui ne soit pas remplie dans nos journaux. Dans quelques journées, où le ciel était partiellement couvert, il s'éclaircissait le plus souvent, ou laissait du moins d'assez grandes parties découvertes, pour en pouvoir profiter. Aussi n'avons-nous laissé échapper aucune occasion qui pouvait servir à faire avancer notre travail. Les avantages d'un climat méridional étaient cependant contrebalancés, par de graves inconvenients qui provenaient des changements brusques de la température de l'air, et du rayonnement du sol aride et fortement échauffé par le soleil. Effectivement, à l'exception de quelques observations des étoiles voisines du zénith, dans lesquelles l'image était tranquille, pas une seule fois, dans les observations des distances zénithales, nous n'avons vu ces images calmes et bien définies, si fréquentes, dans cette saison et à ces heures de la journée, dans les climats plus septentrionaux. Pour les mesures des angles entre les objets terrestres, les difficultés sont encore plus grandes. D'ordinaire, dans les jours sereins, le mirage borne l'horizon de tous côtés. On est entouré, en apparence, d'eaux ondulantes qui ne sont interrompues que par les irrégularités du terrain. Les petites élévations, kourgans, y forment autant d'îles. Tous les objets vus dans la lunette ne conservent rien de leurs formes naturelles, ils ont l'apparence d'images réfléchies par la surface de l'eau agitée par le vent. Il y a cependant, chaque jour, vers le soir, une brièvе époque d'un calme des images terrestres, mais qui est plus voisine du coucher du soleil et de plus courte durée, que dans les climats plus septentrionaux. Elle commence, en août, à peu près une heure et demie avant le coucher du soleil. Pendant environ une heure les objets terrestres, surtout ceux qui s'élèvent un peu au dessus de la plaine, sont observables; mais les images presque totalement calmes ne durent que tout au plus une demi-heure.

Aussitôt que le soleil s'abaisse vers l'horizon, l'air se refroidit très rapidement. Après le coucher du soleil la marche descendante du thermomètre est extrêmement rapide. Le sol rayonne vers un ciel très transparent et resplendissant, qu'on peut comparer au ciel des nuits d'hiver de nos climats septentrionaux. Ordinairement, bien avant minuit l'humidité sature

l'atmosphère, et la rosée couvre l'instrument en telle abondance, que bientôt l'objectif cesse d'être transparent et qu'il faut l'essuyer chaque moment. Parfois, une ou deux minutes suffisaient pour que l'étoile disparût de nouveau. Enfin, malgré le plus beau ciel en apparence, il fallait souvent suspendre les observations.

Pendant que nous étions, M. Wagner et moi, occupés des observations astronomiques, le mécanicien de l'expédition travaillait à mettre l'appareil de la base en bon état. L'appareil, corrigé dans toutes ses parties, fut transporté à Ismaïl et le comparateur disposé dans un grand salon du club, localité très avantageuse pour notre but et qui avait été mise, avec une grande complaisance, à notre disposition. Le salon avait 8 sajènes (56 pieds) de long sur 7 sajènes (49 pieds) de large; les fenêtres donnaient au midi; elles étaient petites et très basses, de manière que le soleil ne donnait que sur une petite partie du salon. Les règles étaient placées au milieu à une égale distance des murs opposés, et le comparateur disposé à côté.

Le 19 septembre n. s. dans la matinée j'ai mesuré encore une fois l'angle entre la mire et le clocher de Novo-Nekrassovka. A 1 heure après midi nous quittâmes Staro-Nekrassovka, pour retourner à Ismaïl.

Le 20 et 21, les règles ont été comparées, à Ismaïl, avec les deux mesures normales; la position des tablettes pour le niveau a été examinée et la valeur des divisions du levier de touche à été déterminée. Le 22, les quatre règles placées avec toutes les précautions possibles dans leurs caisses, sans couvercles, ont été mises dans le fourgon atelé de six boeufs, et transportées au pas à Taschbounar.

Lors de notre premier passage par Taschbounar, en allant à Ismaïl, nous avions fait une reconnaissance, pour visiter le terrain de la base et pour retrouver les extrémités qui avaient été soigneusement marquées dans le terrain. Un moment, nous eûmes de sérieuses craintes sur la conservation des points fixes. L'esprit de destruction de la population environnante (Boulgares) est tel, que de deux pyramides en pierres calcaires qui marquaient les deux bouts de la base, il n'est resté d'autres vestiges que des pierres éparses par-ci par-là. Les deux

pyramides avaient été démolies jusqu'à la surface du terrain, destruction qui n'a point été dictée par le besoin des matériaux qui les composaient, parce que l'endroit abonde de la même pierre calcaire, mais par une simple malveillance. Les points fixes, se trouvant à 3 pieds au dessous du niveau du terrain, grâce à cette profondeur, sont restés intacts.

La journée du 25 septembre a été employée aux préparatifs de la mesure de la basé. L'extrémité Taschbounar à été mise à découvert, la base alignée, le terrain nettoyé des plantes, dans la longueur présumée d'une journée de travail. Les hommes qui devaient nous aider, ont reçu des instructions, et ont été exercés chacun dans le travail qui lui était destiné, pendant toute la mesure de la base. Nous avons accepté cette division du travail jusqu'aux moindres détails.

La division des occupations était la suivante. M. Wagner et moi nous placions les règles et faisions toutes les lectures. M. Gamow, placé à la lunette du théodolite dirigeait l'alignement des règles, M. Butz plaçait les trépieds. Le topographe Blum transportait le grand niveau et le calait. Quatre hommes étaient employés pour transporter les règles, deux autres pour les trépieds, deux pour ôter le gazon.

Le 26 sept. n. s. à $6^h 40^m$ du matin la première règle a été posée, à $5^h 55^m$ du soir la 88e. Le 8 octobre à $5^h 30^m$ du soir nous arrivâmes à l'extrémité Vaisa. La dernière règle étant posée, nous déterminâmes l'excédant, et la mesure de la base était achevée.

A l'exception du dernier jour où le ciel était couvert et la température constante pendant toute la journée, tout le reste de la base a été mesuré par un ciel clair et des changements rapides de température. Souvent, dans la matinée, notre travail a été interrompu par des bouffées d'un brouillard épais qui nous enveloppait. Cette couche de brouillard avait une épaisseur très petite : on voyait le soleil et un arc-en-ciel blanc, quelquefois double, de l'autre côté.

Le 9 octobre les règles furent transportées à Taschbounar à l'école de la colonie. C'était au moment des vacances. Après avoir fait ôter les bancs, nous avons trouvé une localité assez commode et convenable pour les comparaisons, la température

de cette chambre étant très constante, grâce aux fenêtres basses, d'après la coutume dans toutes les habitations de cette contrée.

Les comparaisons ont été faites le 10 et le 14 octobre. La position des tablettes pour le niveau a été vérifiée. Les différences que nous avons trouvées, dans les règles, relativement à la comparaison antérieure à la mesure de la base, étaient sans conséquence sur la longueur de la base, car elles rentraient, par leur extrême petitesse, dans l'ordre des incertitudes inévitables. La température moyenne de la base s'est trouvée $+20^{\circ},9$ C., par conséquent de $4^{\circ},7$ plus élevée que la température normale. La température des règles, dans les comparaisons, a été de $20^{\circ},4$, seulement d'un demi-degré différente de la température des règles pendant la mesure. Toute réduction à faire tombe donc sur la dilatation de la règle normale, dilatation qui est déterminée à Poulkova avec une grande précision.

Les deux extrémités de la base ont été recouvertes soigneusement de briques réunies par un mortier à chaux et à sable. Au dessus du niveau du sol, nous avons fait ériger deux élévations d'un sajène et demi (10,5 pieds) de base, sur un sajène (7 pieds) de haut, entourées d'un fossé assez profond. Par ce moyen, il paraît que ces extrémités sont mieux assurées et plus faciles à retrouver que par les pyramides en pierres ou briques, plus faciles et plus attrayantes à détruire. Les autorités locales ont été engagées à garder nos deux kourgans contre la malveillance des habitants.

Vers ce temps les officiers du génie de la forteresse d'Ismaïl avaient reçu l'ordre de donner des renseignements sur les matériaux propres à la construction du monument à élever, par ordre Sa Majesté, à l'extrémité australe de l'arc du méridien.

Après une conférence avec M. le colonel Accynov, M. Faszuvsky fut désigné pour se rendre sur place. M. Wagner et moi, accompagnés de M. Faszuvsky, nous allâmes à Staro-Nekrassovka, pour indiquer l'endroit exact et les précautions à prendre dans l'érection du monument.

Le centre de la station trigonométrique Staro-Nekrassovka

avait été désigné, d'après les arrangements faits par M. le lieutenant-général de Tenner, en 1848, par un cube de pierre calcaire d'un pied de côté, au milieu duquel se trouve un cylindre en plomb. Sur la surface de ce cylindre deux lignes se coupaient sous un angle droit. Ce cube est enfoncé, dans un massif, assez profondement au dessous de la surface du sol, à l'analogie des extrémités de la base.

Au moment de notre départ de Staro-Nekrassovka la tente astronomique fut démontée, et le fondement de la station soigneusement recouvert de terre. L'ancien (starost) du village de Staro-Nekrassovka fut instruit de surveiller l'endroit, et d'empêcher les fouilles et la destruction du pilier destiné à marquer plus visiblement le centre du monument à ériger. Néanmoins, trois semaines plus tard, le pilier n'existait plus, et les pierres en étaint dispersées à côté, le fondement étant resté intact.

Cette circonstance nous décida, afin de prévenir toute destruction ultérieure, d'engager ler autorités de la forteresse à se charger de la surveillance du point fixe de Staro-Nekrassovka.

Après avoir expédié l'appareil de la base à Iékaterinoslav, toujours sous l'inspection du sous-officier topographe Blum, notre tâche aux environs d'Ismaïl était accomplie, et nous eûmes à nous acheminer le plus tôt possible vers notre second point astronomique, Souprounkovtsi, près de Kamienietz-Podolsk.

Nous quittâmes Taschbounar le 14 octobre n. s.; le 21 nous arrivâmes à Souprounkovtsi, latitude 48° 45′. La saison assez avancée, le ciel uniformément couvert et l'air humide et brumeux donnaient peu d'espoir, pour finir en peu de temps les observations à faire dans cette station. Néanmoins, notre tente et nos instruments étaient disposés le plus tôt possible, et nous attendions le moment favorable pour commencer nos travaux.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à M. Schidlovsky, propriétaire de Souprounkovtsi, pour l'hospitalité avec laquelle il nous a accueillis. Les matériaux pour la construction de notre observatoire, les ouvriers à ses gages,

tout fut mis à notre disposition, avec le plus grand désintéressement.

Le 24 à midi le ciel s'étant éclairci, nous commençâmes nos déterminations de la latitude, par l'emploi des deux instruments pour la mesure des distances au zénith, en abandonnant les observations des passages au premier vertical, pour lesquelles la saison avancée ne promettait plus de résultat. Jusqu'au 26 les heures fréquentes d'un ciel clair nous permirent de faire une bonne récolte d'observations.

Le 27 octobre n. s., le ciel était couvert de nuages d'une teinte uniformément plombée pendant toute la journée. L'air était calme, tout présageait un temps pluvieux d'automne. Effectivement, vers le soir il a commencé à pleuvoir, le vent soufflant du nord-ouest. Vers 7 heures du soir une rafale venue du nord-est et accompagnée de coups de vents, d'une intensité tout-à-fait extraordinaire, arracha la toile de la tente astronomique, l'abattit sur l'instrument universel, et le renversa avec son statif.

Ces rafales se suivaient dans une direction qui faisait à peu près un angle droit avec celle du vent qui avait soufflé auparavant. L'autre instrument, le cercle vertical, était menacé d'un moment à l'autre. La présence d'esprit du soldat qui gardait la tente, le sauva. Ayant abattu les autres parties de la toile de la tente, il confia la garde des instruments à l'homme qui se trouvait avec lui, et accourut nous annoncer l'accident. Notre habitation était à 400 pieds au dessous du point trigonométrique dans un ravin, à une distance d'une verste et demie. La nouvelle de l'accident nous surprit ignorants de tout ce qui se passait sur les sommets des élévations qui nous entouraient.

Nous nous acheminâmes à l'instant, pour porter secours à nos appareils contre les effets ultérieurs de cet ouragan qui, comme nous l'avons su depuis, a ravagé l'île de Malte, Constantinople, Athènes, Odessa, renversant les monuments de l'antiquité et déracinant les forêts. Certes, ayant parcouru une étendue considérable du continent, l'ouragan a perdu de sa force. Ce n'était plus ce tourbillon qui renversait les maisons et enlevait les arbres; mais toujours les coups de vent étaient

plus que suffisants pour abattre la toile d'une tente supportée par une charpente assez solide, mais élevée sur le sommet d'une montagne.

L'accident arrivé à l'instrument universel était grave. L'effet de la chûte avait été arrêté par le porte-microscope vertical et le cercle vertical divisé. Ces deux parties étaient courbées et il était devenu impossible de continuer l'observation des distances au zénith. Les autres parties de l'instrument paraissaient bien conservées.

Heureusement l'autre instrument qui était resté debout, n'avait souffert que de la pluie battante. Nous le transportâmes aussitôt dans notre logement, où toutes les parties furent soigneusement démontées, nettoyées, huilées et puis remises à leurs places. L'instrument n'avait rien souffert, même la collimation de la lunette était restée exactement zéro, comme avant l'événement. Rien n'empêchait par conséquent de continuer les observations avec cet instrument. Aussi M. Wagner a-t-il continué d'observer le 28 et 29 octobre, profitant de chaque moment, où le ciel découvert permettait de saisir des observations. Les jours couverts qui suivaient nous engagèrent à regarder nos observations comme terminées. En effet le froid, la neige, en un mot un hiver, commencé bien plus tôt cette année que d'ordinaire, ne nous promettait plus de ciel favorable.

Les étoiles observées à Souprounkovtsi sont les suivantes:

au Nord.	$z =$	*au Sud.*	$z =$
β Cephei	21° 10′	α Andromedae	20° 29′
β Ursae minoris	26 0	α Arietis	25 59
γ Cephei	28 4	α Bootis	28 48
δ Ursae minoris	37 51	α Tauri	32 32
Polaris	41 15	γ Pegasi	34 23
β Ursae minoris sub polo	56 30	ζ Aquilae	35 6
α Ursae majoris sub polo	68 42	α Ophiuchi	36 5
β Ursae majoris sub polo	74 5	α Aquilae	40 16
		α Orionis	41 23
		α Ceti	45 14

au Sud.

	$z =$
γ Ceti	46° 8′
α Aquarii	49 47
α^2 Capricorni	61 45
β Ceti	77 33.

De ces étoiles, j'ai observé en tout 16 mises de quatre pointages; M. Wagner a fait à peu près 40 mises. Ces nombres sont bien inférieurs aux nombres d'observations de Staro-Nekrassovka. Néanmoins, nous eûmes la conviction qu'elles suffiraient pour fixer la latitude à une fraction très petite de seconde près, conviction que nous avait fournie le calcul des observations faites avec les mêmes instruments, soit à Poulkova soit à Staro-Nekrassovka.

Nous quittâmes donc Souprounkovtsi le 31 octobre n. s. Les routes ordinaires des steppes étant devenues presque impraticables, je tâchai de gagner la chaussée qui conduisait de Kobryn à Varsovie, et puis nous avons fait le détour par Varsovie pour revenir à Pétersbourg. Le 16 (28) novembre nous arrivâmes à Poulkova.

Poulkova, en février 1853.

A. Prazmovski.

(Tiré du *Bull. phys.-mathém. T. XII. No.* 6.)

$\frac{11}{23}$ Februar 1853.

Die Gestalt der Erde. Von Dr. M. G. von PAUCKER, Correspondent der Akademie.

Der nachstehende Aufsatz versucht die Frage über die wahre Gestalt der Erde auf einem Wege zu entscheiden, welcher die beschränkte elliptische Voraussetzung verlässt. Der erste Artikel enthält eine mathematische Entwickelung, welche zuletzt ein sehr einfaches Verfahren anzeigt, um die Elemente des Meridians aus den Beobachtungen einer Gradmessung zu bestimmen. Dabei wird der Meridian als eine beliebige krumme Linie angenommen, mit der einzigen Beschränkung, dass diese Linie wenig vom Kreise abweicht.

Nach diesen Ausdrücken nimmt der zweite Artikel die vorhandenen Gradmessungen in Rechnung. Dass die elliptische Gestalt unzulässig ist, war schon aus theoretischen Gründen erkannt worden. Die Elemente eines neuen mittlern Meridians, welcher alle vorhandenen Gradmessungen nach dem Satz der kleinsten Quadrate vereinigt, bestätigen diesen Ausspruch. Es werden ferner die Meridiane von Ostindien, Paris und Dorpat für sich bestehend berechnet. Man gelangt hiebei zu der Ueberzeugung, dass die Gradmessungen jetzt weniger eine geographische, als vielmehr eine geologische Bedeutung haben, indem sie den Gang der örtlichen Anziehungen geben, welche grösstentheils durch die veränderliche Dichtigkeit des Erdinnern bedingt werden.

Erster Artikel.

Der Meridianbogen der sphäroidischen nicht elliptischen Erde.

Es sei für irgend einen Ort des Meridians der aus der Erdmitte gezogene Halbmesser $= r$, die Neigung desselben gegen den Aequator $= \psi$, $\sin \psi = c$, $\cos \psi = c'$, der vom Aequator gerechnete Meridianbogen $= s$, der Krümmungshalbmesser im Meridian $= \mathfrak{R}$, die Neigung desselben gegen den Aequator, d. h. die geographische Breite oder Polhöhe $= \varphi$, $\sin \varphi = f$, $\cos \varphi = f'$, $\tang(\varphi - \psi) = \Delta$.

Man hat alsdann die Gleichungen:

$$\frac{ds}{d\psi} = c', \quad -\frac{dr}{rd\psi} = \Delta, \quad \frac{ds}{rd\psi} = \sqrt{(1 + \Delta^2)}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \mathfrak{R}, \quad \frac{d\Delta}{d\varphi - d\psi} = 1 + \Delta^2$$

$$\text{also } \mathfrak{R} = \frac{r(1+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + \Delta^2 + \frac{d\Delta}{dc} c'}$$

Die Erde wird sphäroidisch, d. h. wenig von der Kugel abweichend angenommen. Es sei bis mit zu den Gliedern vierter Ordnung

$$r = 1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8,$$

wo der Aequatorealhalbmesser $= 1$, der Polarhalbmesser $= 1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$, die Abplattung $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$.

Es ist aber

$$\frac{\Delta}{cc'} = -\frac{dr}{dc} \cdot \frac{1}{rc} = \frac{2\alpha_1 - 4\alpha_2 c^2 + 6\alpha_3 c^4 - 8\alpha_4 c^6}{1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8}$$

Wenn also

$$\frac{\Delta}{cc'} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6,$$

so enthält das Verzeichniss *I* die Koefficienten, mit denen die Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ und ihre Produkte multiplicirt werden müssen, um die Brüche $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ zu geben.

I.

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
α_1	2	.....	.....	.....
α_2	.....	− 4	.....	.....
$\alpha_1\alpha_1$	.....	2	.....	.....
α_3	.....	.....	6	.....
$\alpha_1\alpha_2$	.....	.....	− 6	.....
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	.....	.....	2	.....
α_4	.....	.....	.....	− 8
$\alpha_1\alpha_3$	.....	.....	.....	8
$\alpha_2\alpha_2$	.....	.....	.....	4
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	.....	.....	.....	− 8
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	.....	.....	.....	2

Aus

$$\frac{\Delta}{cc'} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6$$

folgt

$$\frac{\Delta^2}{c^2 - c^4} = \varepsilon_1\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 c^2 + (2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_2)c^4$$

$$\frac{d\Delta}{dc} c' = (1 - 2c^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6)$$
$$+ (c^2 - c^4)(2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 c^2 + 6\varepsilon_4 c^4).$$

Wenn also

$$1 + \Delta^2 + \frac{d\Delta}{dc} c' = \zeta_0 + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c^4 + \zeta_3 c^6 + \zeta_4 c^8$$

$$\frac{1}{1 + \Delta^2 + \frac{d\Delta}{dc} c'} = \eta_0 + \eta_1 c^2 + \eta_2 c^4 + \eta_3 c^6 + \eta_4 c^8;$$

so giebt das Verzeichniss *II* die ζ durch die ε.

II.

	$\zeta_0 - 1$	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
ε_1	1	− 2	...	.....	. ...
ε_2	.....	3	− 4	.. ..	... ..
$\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	1	− 1	.. .	... ..
ε_3	... ..	.....	5	− 6	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_2$	.....	.....	2	− 2	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	.....	... .	.....	.. ...
ε_4	.....	.....	.....	7	− 8
$\varepsilon_1\varepsilon_3$	.....	.....	.....	2	− 2
$\varepsilon_2\varepsilon_2$	.....	.....	..	1	− 1
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2$	.....	.....	.....	....	....
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	.....	....	.....	.....

Man ersetzt in *II* die $\varepsilon_1\varepsilon_2$ .. durch die in *I* ihnen entsprechenden $\alpha_1\alpha_2$ ... Das Verzeichniss *III* giebt dann ζ und η durch $\alpha_1\alpha_2$ ..

III.

	$\zeta_0 - 1$	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
α_1	2	− 4	.....	.. . .	.....
α_2	.....	−12	16	.....	... ..
$\alpha_1\alpha_1$	.....	10	−12	.....	.....
α_3	.....	.....	30	−36	.....
$\alpha_1\alpha_2$	.....	.....	− 46	52	.....
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	.....	.....	18	−20	.... .
α_4	. ....	. ....	.....	−56	64
$\alpha_1\alpha_3$	.....	.. ...	.... .	80	−88
$\alpha_2\alpha_2$	.....	.....	.....	44	−48
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	.....	.....	.....	−96	104
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	.....	.....	.....	26	28

	$\eta_0 - 1$	η_1	η_2	η_3	η_4
α_1	− 2	4	.....	.....	. ....
α_2	.....	12	− 16	.....	....
$\alpha_1\alpha_1$	4	− 26	28	.... .	. ....
α_3	.....	.....	30	36	.....
$\alpha_1\alpha_2$	.... .	− 48	206	− 180	.... .
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	− 8	88	− 242	180	.....
α_4	.....	.....	... .	56	− 64
$\alpha_1\alpha_3$	.....	.....	120	− 464	376
$\alpha_2\alpha_2$	.....	... .	144	− 428	304
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	.....	144	−1192	2624	−1672
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	16	−248	1180	−2058	1164

Es ist ferner

$$(1 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\Delta^2 + \frac{3}{8}\Delta^4.$$

Wenn also

$$(1 + \Delta^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \vartheta_1 c^2 + \vartheta_2 c^4 + \vartheta_3 c^6 + \vartheta_4 c^8,$$

so hat man für die $\vartheta_1 \vartheta_2 \ldots$ das Verzeichniss *IV.*

IV.

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
ε_1	.....	.....	.....	.....
ε_2	.....	.....	.....	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_1$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	.....	.....
ε_3	.....	.....	.....	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_2$	.....	3	-3	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	.....	.....	.....
ε_4	.....	.....	.....	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_3$	.....	.....	3	-3
$\varepsilon_2\varepsilon_2$	.....	.....	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2$	.....	.....	.....	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$
α_1	.....	.....	.....	.....
α_2	.....	.....	.....	.....
$\alpha_1\alpha_1$	6	-6	.....	.....
α_3	.....	.....	.....	.....
$\alpha_1\alpha_2$	.....	-24	24	.....
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	.....	12	-12	.....
α_4	.....	.....	.....	.....
$\alpha_1\alpha_3$	.....	.....	36	-36
$\alpha_2\alpha_2$	.....	.....	24	-24
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	.....	.....	-60	60
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	.....	6	6	-12

Es sei

$$r(1+\Delta^2)^{\frac{3}{2}} = 1 + \varkappa_1 c^2 + \varkappa_2 c^4 + \varkappa_3 c^6 + \varkappa_4 c^8$$

so ergiebt sich aus dem obigen das Verzeichniss *V* für die $\varkappa$.

V.

	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$
a_1	— 1	. ...	.....	.....
a_2	.....	1	.....	.....
a_1a_1	6	— 6	.....	.....
a_3	.....	.....	— 1	.....
a_1a_2	.....	—24	24	.....
$a_1a_1a_1$	.....	6	— 6	.....
a_4	.....	.....	.....	1
a_1a_3	.....	.....	36	—36
a_2a_2	.....	.....	24	—24
$a_1a_1a_2$	.....	.....	—30	30
$a_1a_1a_1a_1$	.....	6	— 6	.....

Es sei

$$\mathfrak{R} = \mu_0 + \mu_1 c^2 + \mu_2 c^4 + \mu_3 c^6 + \mu_4 c^8,$$

so ergeben sich mittels des obigen Ausdrucks von $\mathfrak{R}$ die μ aus den η, ϑ und $\varkappa$ nach dem Verzeichniss *VI.*

VI.

	$\mu_0 - 1$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
a_1	— 2	3	.....	... .	.....
a_2	.....	12	— 15	.....	.....
a_1a_1	4	— 18	18	. ....	.....
a_3	.....	.....	— 30	35	.....
a_1a_2	.....	— 48	168	— 136	.....
$a_1a_1a_1$	— 8	72	— 174	122	.....
a_4	.....	.....	.....	56	— 63
a_1a_3	.....	.....	120	— 396	300
a_2a_2	.....	.....	144	— 392	264
$a_1a_1a_2$	.....	144	—1020	2050	—1242
$a_1a_1a_1a_1$	16	—216	906	—1462	792

Die μ gelten für die Entwickelung von $\mathfrak{R}$ nach Potenzen von c. Um diese Entwickelung nach Potenzen von f zu er-

langen, müssen die Potenzen von c^2 durch die von f^2 ausgedrückt werden, durch die Gleichungen, welche f durch c geben:

$$fV(1+\Delta^2) = c + c'\Delta = c + (c - c^3)\frac{\Delta}{cc'};$$

$$\frac{\Delta}{cc'} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^4 + \varepsilon_4 c^6;$$

$$f^2 = \overset{2}{m}_0 c^2 + \overset{2}{m}_1 c^4 + \overset{2}{m}_2 c^6 + \overset{2}{m}_3 c^8 + \overset{2}{m}_4 c^{10}$$

$$f^4 = \overset{4}{m}_0 c^4 + \overset{4}{m}_1 c^6 + \overset{4}{m}_2 c^8 + \overset{4}{m}_3 c_{10}$$

$$f^6 = \overset{6}{m}_0 c^6 + \overset{6}{m}_1 c^8 + \overset{6}{m}_2 c^{10}$$

$$f^8 = \overset{8}{m}_0 c^8 + \overset{8}{m}_1 c^{10}$$

$$f^{10} = \overset{10}{m}_0 c_{10}$$

VII.

	$\overset{2}{m}_0 - 1$	$\overset{2}{m}_1$	$\overset{2}{m}_2$	$\overset{2}{m}_3$	$\overset{2}{m}_4$
ε_1	2	− 2	.....	.....	.....
ε_2	.....	2	− 2	.....	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_1$	1	− 3	2	.....	.....
ε_3	.....	.....	2	− 2	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_2$	.....	2	− 6	4	.....
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	− 2	4	− 2	.....
ε_4	.....	.....	.....	2	− 2
$\varepsilon_1\varepsilon_3$	.....	.....	2	− 6	4
$\varepsilon_2\varepsilon_2$	.....	.....	1	− 3	2
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2$	.....	.....	− 6	12	− 6
$\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_1$	.....	− 1	4	− 5	2
a_1	4	− 4	.....	.....	.....
a_2	.....	− 8	8	.....	.....
a_1a_1	4	− 8	4	.....	.....
a_3	.....	.....	12	−12	.....
a_1a_2	.....	−16	36	−20	.....
$a_1a_1a_1$	.....	− 8	12	− 4	.....
a_4	.....	.....	.....	−16	16
a_1a_3	.....	.....	24	−56	32
a_2a_2	.....	.....	16	−40	24
$a_1a_1a_2$	.....	.....	56	−88	32
$a_1a_1a_1a_1$	.....	−16	28	−16	4

	$^4_{m_0-1}$	$^4_{m_1}$	$^4_{m_2}$	$^4_{m_3}$
a_1	8	— 8	... ..	.....
a_2	... .	— 16	16	....
a_1a_1	24	— 48	24	.....
a_3	.....	... ..	24	— 24
a_1a_2	.....	— 96	200	— 104
$a_1a_1a_1$	32	—112	120	— 40
a_4	.....	.....	. ... .	— 32
a_1a_3	.....	.....	144	— 304
a_2a_2	.....	.....	96	— 208
$a_1a_1a_2$	.....	—192	720	— 816
$a_1a_1a_1a_1$	16	—160	312	— 224

VII.

	$^6_{m_0-1}$	$^6_{m_1}$	$^6_{m_2}$	$^8_{m_0-1}$	$^8_{m_1}$	$^{10}_{m_0-1}$
a_1	12	— 12	....	16	— 16	20
a_2	.....	— 24	24	.....	— 32	.....
a_1a_1	60	— 120	60	112	— 224	180
a_3	.....	.....	36	.....	.. ...	.....
a_1a_2	.....	— 240	492	.....	— 448	.... ..
$a_1a_1a_1$	160	— 504	516	448	—1376	960
a_4	.....	.....	...	.... ..	.....	.....
a_1a_3	.....	.....	360	.....	.....	.....
a_2a_2	.....	.....	240	.....	.....	.....
$a_1a_1a_2$	.....	— 960	3144	.....	—2688	.....
$a_1a_1a_1a_1$	240	—1200	2004	1120	—4928	3360

Es sei

$$c^2 = {}^2_{n_0}f^2 + {}^2_{n_1}f^4 + {}^2_{n_2}f^6 + {}^2_{n_3}f^8 + {}^2_{n_4}f^{10}$$

$$c^4 = {}^4_{n_0}f^4 + {}^4_{n_1}f^6 + {}^4_{n_2}f^8 + {}^4_{n_3}f^{10}$$

$$c^6 = {}^6_{n_0}f^6 + {}^6_{n_1}f^8 + {}^6_{n_2}f^{10}$$

$$c^8 = {}^8_{n_0}f^8 + {}^8_{n_1}f^{10}$$

$$c^{10} = {}^{10}_{n_0}f^{10},$$

so hat man zur Bestimmung der n die Gleichungen

$$1 = {}^{2\,2}m_0 n_0$$

$$0 = {}^{2\,2}m_1 n_0 + {}^{4\,2}m_0 n_1$$

$$0 = {}^{2\,2}m_2 n_0 + {}^{4\,2}m_1 n_1 + {}^{6\,2}m_0 n_2$$

$$0 = {}^{2\,2}m_3 n_0 + {}^{4\,2}m_2 n_1 + {}^{6\,2}m_1 n_2 + {}^{8\,2}m_0 n_3$$

$$0 = {}^{2\,2}m_4 n_0 + {}^{4\,2}m_3 n_1 + {}^{6\,2}m_2 n_2 + {}^{8\,2}m_1 n_3 + {}^{10\,2}m_0 n_4.$$

Hieraus die n im Verzeichniss *VIII.*

VIII.

	$^{2}n_0 - 1$	$^{2}n_1$	$^{2}n_2$	$^{2}n_3$	$^{2}n_4$
a_1	— 4	4	.....	... ..	.....
a_2	.....	8	— 8	.....	.....
a_1a_1	12	— 40	28	.. ...	... .
a_3	.....	.....	— 12	12	.....
a_1a_2	.....	— 80	220	— 140	... .
$a_1a_1a_1$	— 32	248	— 460	244	.....
a_4	.....	.....	.....	16	— 16
a_1a_3	.....	.....	168	— 424	256
a_2a_2	.....	.....	112	— 280	168
$a_1a_1a_2$	.....	480	—2680	4248	—2048
$a_1a_1a_1a_1$	80	—1200	4324	—5584	2380

	$^{4}n_0 - 1$	$^{4}n_1$	$^{4}n_2$	$^{4}n_3$
a_1	— 8	8	.....	.....
a_2	.....	16	— 16	.....
a_1a_1	40	— 112	72	.....
a_3	... .. .	.....	— 24	24
a_1a_2	.... . .	— 224	568	— 344
$a_1a_1a_1$	—160	912	—1464	712
a_4	.. ..	.... ..	.....	32
a_1a_3	.....	. .....	432	— 1040
a_2a_2	.....	.....	288	— 688
$a_1a_1a_2$	.....	1792	—8592	12464
$a_1a_1a_1a_1$	560	—5600	16584	—19040

VIII.

	6 n_0-1	6 n_1	6 n_2	8 n_0-1	8 n_1	10 n_0-1
a_1	— 12	12	.....	— 16	16	— 20
a_2	.....	24	— 24	.....	32	.....
a_1a_1	84	— 216	132	144	— 352	220
a_3	.....	.....	— 36	.....	.....	.....
a_1a_2	.....	— 432	1044	.....	— 704	.....
$a_1a_1a_1$	—448	2184	— 3204	—960	4256	—1760
a_4	.....	.....	.....	.....	.....	.....
a_1a_3	.....	.....	792	.....	.....	.....
a_2a_2	.....	.....	528	.....	.....	.....
$a_1a_1a_2$	.....	4320	—18888	.....	8448	.....
$a_1a_1a_1a_1$	2016	—16272	42540	5280	—37312	11440

Es sei

$$\mathfrak{N} = \pi_0 + \pi_1 f^2 + \pi_2 f^4 + \pi_3 f^6 + \pi_4 f^8$$

so ergiebt sich aus *VI* und *VIII* das Verzeichniss *IX*.

IX.

	$\pi_0 - 1$	π_1	π_2	π_3	π_4
a_1	— 2	3	.....	.....	.....
a_2	.....	12	— 15	.....	.....
a_1a_1	4	30	30	.....	.....
a_3	.....	.....	— 30	35	.....
a_1a_2	.....	— 96	360	— 280	.....
$a_1a_1a_1$	— 8	180	— 510	350	.....
a_4	.....	.....	.....	56	— 63
a_1a_3	.....	.....	360	—1092	756
a_2a_2	.....	.....	240	— 728	504
$a_1a_1a_2$	.....	480	—4020	8134	—4662
$a_1a_1a_1a_1$	16	—816	4770	—8218	4284

Eine Prüfung dieses Verzeichnisses gewähren die Gleichungen:

$$1 = \pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2.4}{3.5}\pi_2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\pi_3 + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\pi_4;$$

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = b = \pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{7}\pi_3 + \frac{1}{9}\pi_4.$$

Es ist

$$\frac{ds}{d\varphi} = \mathfrak{R}, \quad \frac{df}{d\varphi} = f'.$$

Wenn also

$$s = \beta_0\varphi + \beta_1 f'f + \beta_2 f'f^3 + \beta_3 f'f^5 + \beta_4 f'f^7;$$

so ist

$$\frac{ds}{d\varphi} = \beta_0 + \beta_1(1-2f^2) + \beta_2(3f^2-4f^4) + \beta_3(5f^4-6f^6) + \beta_4(7f^6-8f^8)$$

also

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \beta_0 + \beta_1 \\
\pi_1 &= -2\beta_1 + 3\beta_2 \\
\pi_2 &= -4\beta_2 + 5\beta_3 \\
\pi_3 &= -6\beta_3 + 7\beta_4 \\
\pi_4 &= -8\beta_4 + \ldots
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{2.4}\pi_2 + \frac{3.5}{2.4.6}\pi_3 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\pi_4; \\
-\beta_1 &= \quad \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{2.4}\pi_2 + \frac{3.5}{2.4.6}\pi_3 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\pi_4; \\
-\beta_2 &= \quad + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{5}{4.6}\pi_3 + \frac{5.7}{4.6.8}\pi_4; \\
-\beta_3 &= \quad \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{7}{6.8}\pi_4; \\
-\beta^4 &= \quad \frac{1}{8}\pi_4.
\end{aligned}$$

Hieraus mit dem Verzeichniss *IX* das Verzeichniss *X*.

X.

	$\beta_0 - 1$	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	.....	.....	.....
α_2	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{15}{4}$	.....	.....
$\alpha_1\alpha_1$	$\frac{2}{8}$	$\frac{30}{8}$	$-\frac{30}{4}$	.....	.....
α_3	$-\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{175}{30}$	.....
$\alpha_1\alpha_2$	$-\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$	$-\frac{760}{24}$	$\frac{1400}{30}$	.....
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{2}{16}$	$-\frac{130}{16}$	$\frac{1310}{24}$	$-\frac{1750}{30}$	.....
α_4	$\frac{35}{128}$	$-\frac{35}{128}$	$-\frac{35}{192}$	$-\frac{35}{240}$	$\frac{63}{8}$
$\alpha_1\alpha_3$	$\frac{60}{128}$	$-\frac{60}{128}$	$-\frac{60}{192}$	$\frac{17220}{240}$	$-\frac{756}{8}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{40}{128}$	$-\frac{40}{128}$	$-\frac{40}{192}$	$\frac{11480}{240}$	$-\frac{504}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$-\frac{50}{128}$	$\frac{50}{128}$	$\frac{30770}{192}$	$-\frac{162190}{240}$	$\frac{4662}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{4}{128}$	$\frac{2044}{128}$	$-\frac{50180}{192}$	$\frac{178780}{240}$	$-\frac{4284}{8}$

Zur Prüfung:

$$1 = \beta_0 - \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{2}{3.5}\beta_2 - \frac{2.4}{3.5.7}\beta_3 - \frac{2.4.6}{3.5.7.9}\beta^4;$$

$$b = \beta_0 + \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{5}\beta_2 + \frac{1}{7}\beta_3 + \frac{1}{9}\beta_4.$$

Es sei

$$1 = \beta_0\gamma_0,\ \beta_1 = \beta_0\gamma_1,\ \beta_2 = \beta_0\gamma_2,\ \beta_3 = \beta_0\gamma_3,\ \beta_4 = \beta_0\gamma_4:$$

so giebt das Verzeichniss XI die γ.

XI.

	$\gamma_0 - 1$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
α_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	.....	.....	.....
α_2	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{15}{4}$	.....	.....
$\alpha_1\alpha_1$	.....	$\frac{24}{8}$	$-\frac{30}{4}$	.....	.....
α_3	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{35}{6}$	.....
$\alpha_1\alpha_2$	$\frac{2}{16}$	$\frac{14}{16}$	$-\frac{715}{24}$	$\frac{280}{6}$	.....
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$-\frac{4}{16}$	$-\frac{100}{16}$	$\frac{1220}{24}$	$-\frac{350}{6}$	.....
α_4	$-\frac{35}{128}$	$-\frac{35}{128}$	$-\frac{35}{192}$	$-\frac{7}{48}$	$\frac{63}{8}$
$\alpha_1\alpha_3$	$-\frac{20}{128}$	$-\frac{100}{128}$	$-\frac{40}{192}$	$\frac{3304}{48}$	$-\frac{756}{8}$
$\alpha_2\alpha_2$	$-\frac{22}{128}$	$-\frac{22}{128}$	$-\frac{310}{192}$	$\frac{2296}{48}$	$-\frac{504}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$\frac{102}{128}$	$-\frac{122}{128}$	$\frac{28270}{192}$	$-\frac{31318}{48}$	$\frac{4662}{8}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$-\frac{28}{128}$	$\frac{1572}{128}$	$-\frac{44940}{192}$	$\frac{34356}{48}$	$-\frac{4284}{8}$

Die Umkehrung dieses Verzeichnisses giebt die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ aus den $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$

		a_1	a_2	a_3	a_4	a	$\gamma_0(1-a)-1$
XII.	γ_1	$-\frac{2}{3}$	.....	.....	.....	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	γ_2	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	.....	.....	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
	$\gamma_1\gamma_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	.....	.....	$-\frac{2}{9}$	.....
	γ_3	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{105}$	$-\frac{6}{35}$	.....	$-\frac{23}{105}$	$\frac{1}{7}$
	$\gamma_1\gamma_2$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{52}{45}$	$-\frac{64}{45}$	.....	$-\frac{1}{5}$	.....
	$\gamma_1\gamma_1\gamma_1$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{64}{27}$	$-\frac{16}{9}$	.....	$-\frac{2}{27}$	.....
	γ_4	$-\frac{8}{315}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{1}{315}$	$\frac{8}{63}$	$-\frac{51}{315}$	$\frac{1}{9}$
	$\gamma_1\gamma_3$	$\frac{4}{105}$	$\frac{17}{315}$	$\frac{398}{315}$	$\frac{48}{35}$	$-\frac{39}{315}$	.....
	$\gamma_2\gamma_2$	.....	$-\frac{22}{225}$	$\frac{96}{225}$	$\frac{128}{225}$	$-\frac{10}{225}$	.....
	$\gamma_1\gamma_1\gamma_2$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{148}{45}$	$\frac{1304}{135}$	$\frac{32}{5}$	$-\frac{13}{135}$	.....
	$\gamma_1\gamma_1\gamma_1\gamma_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{392}{81}$	$\frac{80}{9}$	$\frac{128}{27}$	$-\frac{2}{81}$	.....

Es sei jetzt der Aequatorealhalbmesser $= a$, so ist

$$\frac{s}{a} = \beta_0\varphi + \beta_1 f' f + \beta_2 f' f^3 + \beta_3 f' f^5 + \beta_4 f' f^7$$

oder

$$\frac{s}{a} = \beta_0\varphi + \beta_1 \cos\varphi \sin\varphi + \beta_2 \cos\varphi \sin^3\varphi + \beta_3 \cos\varphi \sin^5\varphi + \beta^4 \cos\varphi \sin^7\varphi,$$

Es sei der zwischen den Polhöhen φ und φ' enthaltene Meridianbogen $= l$,

der Breitenunterschied $\varphi' - \varphi = u$ in Theilen des Grades,

$$\cos\varphi' \sin\varphi' - \cos\varphi \sin\varphi = b_1$$
$$\cos\varphi' \sin^2\varphi' - \cos\varphi \sin^2\varphi = b_2$$

$$\cos\varphi' \sin^5\varphi' - \cos\varphi \sin^5\varphi = b_3$$
$$\cos\varphi' \sin^7\varphi' - \cos\varphi \sin^7\varphi = b_4:$$

so ist

$$\frac{l}{a\beta_0} = \frac{\pi}{180} u + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 + \gamma_4 b_4$$

oder

$$l = tu + t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 + t_4 b_4$$

Aus einer Reihe beobachteter Polhöhen und Meridianbögen seien mittels der gegebenen u, b_1, b_2, b_3, b_4 durch Ausgleichung die Elemente t, t_1, t_2, t_3, t_4 bestimmt worden. Für den Meridianquadranten ist

$$\varphi = o, \quad \varphi' = 90, \quad u = 90, \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = o.$$

Es sei der Meridianquadrant $= Q$,
der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang dem des Meridians gleich ist, $= R$: so ist

$$Q = 90t$$

$$R = \frac{2Q}{\pi} = a\beta_0$$

$$\gamma_1 R = t_1, \quad \gamma_2 R = t_2, \quad \gamma_3 R = t_3, \quad \gamma_4 R = t_4.$$

Aus den beiden oben angezeigten Prüfungsgleichungen der β folgt also:

Aeq. Halbm. $a = R - \frac{1}{3} t_1 - \frac{2}{3.5} t_2 - \frac{2.4}{3.5.7} t_3 - \frac{2.4.6}{3.5.7.9} t_4,$

Pol. Halbm. $b = R + \frac{1}{3} t_1 + \frac{1}{5} t_2 + \frac{1}{7} t_3 + \frac{1}{9} t_4.$

Hieraus die Gesammtabplattung

$$\alpha = \frac{a - b}{a}.$$

Die einzelnen Abplattungsbrüche $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ berechnet man aus den $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ mittels des Verzeichnisses XII.

Ein Beispiel giebt Bessel's Meridian (*Astr. Nachr.* No. 438 S. 216). Hier ist in Toisen:

$t = 57013{,}109, \quad t_1 = -16372{,}4440,$
$t_2 = -68{,}3132, \quad t_3 = -0{,}3547, \quad t_4 = -0{,}0020;$

$Q = 90t = 5131179{,}81, \quad \frac{1}{\pi} = 0{,}31830988618379.$

$R = \frac{2Q}{\pi} = 3266610{,}5226;$

$R =$	3266610,5226	$R =$	3266610,5226
$\frac{1}{3}t_1$	5457,4813	$\frac{1}{3}t_1$	− 5457,4813
$\frac{2}{15}t^2$	9,1084	$\frac{1}{5}t_2$	− 13,6626
$\frac{8}{105}t_3$	0,0270	$\frac{1}{7}t_3$	− 0,0507
$\frac{16}{315}t_4$	0,0001	$\frac{1}{9}t_4$	− 0,0002
$a =$	3272077,1394,	$b =$	3261139,3278,

$a - b = 10937{,}8116, \quad \frac{a-b}{a} = \alpha = 0{,}00334277317.$

Statt des Ausdrucks

$$\frac{s}{a\beta_0} = \varphi + \gamma_1 \cos\varphi \sin\varphi + \gamma_2 \cos\varphi \sin^3\varphi \ldots$$

kann man die Entwickelung nach den Sinus der Vielfachen vorziehen:

$$\frac{s}{a\beta_0} = \varphi + \frac{1}{2}\delta_1 \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\delta_2 \sin 4\varphi + \frac{1}{2}\delta_3 \sin 6\varphi + \frac{1}{2}\delta_4 \sin 8\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\delta_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 + \frac{5}{16}\gamma_3 + \frac{7}{32}\gamma_4$$
$$\delta_2 = -\frac{1}{4}\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_3 - \frac{7}{32}\gamma_4$$
$$\delta_3 = \frac{1}{16}\gamma_3 + \frac{3}{32}\gamma_4$$
$$\delta_4 = -\frac{1}{64}\gamma_4.$$

Mittels des Verzeichnisses XI findet man dann die $\delta_1 \delta_2 \ldots$ nach dem Verzeichniss XIII.

XIII.

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
α_1	$-\frac{3}{2}$	.....	.....	.....
α_2	$\frac{6}{4}$	$-\frac{15}{16}$	.....	.....
$\alpha_1\alpha_1$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{30}{16}$	.....	.....
α_3	$-\frac{45}{32}$	$\frac{45}{32}$	$-\frac{35}{96}$	.....
$\alpha_1\alpha_2$	$\frac{18}{32}$	$-\frac{135}{32}$	$\frac{280}{96}$	.....
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{30}{32}$	$\frac{60}{32}$	$-\frac{350}{96}$	.....
α_4	$\frac{84}{64}$	$-\frac{210}{128}$	$\frac{140}{192}$	$-\frac{63}{512}$
$\alpha_1\alpha_3$	$-\frac{3}{64}$	$\frac{450}{128}$	$-\frac{875}{192}$	$\frac{756}{512}$
$\alpha_2\alpha_2$	$\frac{12}{64}$	$-\frac{285}{128}$	$\frac{560}{192}$	$-\frac{504}{512}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	$-\frac{240}{64}$	$\frac{150}{128}$	$-\frac{2660}{192}$	$\frac{4662}{512}$
$\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\frac{114}{64}$	$-\frac{420}{128}$	$\frac{1050}{192}$	$-\frac{4284}{512}$

Zur Prüfung

$$1 = \gamma_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{2}{3.5}\delta_2 + \frac{3}{5.7}\delta_3 + \frac{4}{7.9}\delta_4.$$

Die Umkehrung dieses Verzeichnisses giebt die $\alpha_1\alpha_2 \ldots$ aus den $\delta_1\delta_2 \ldots$

XIV.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a
δ_1	$-\frac{2}{3}$	.....	.....	.....	$-\frac{2}{3}$
δ_2	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{16}{15}$	.....	.....	.....
$\delta_1\delta_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	.....	.....	$-\frac{2}{9}$
δ_3	$-\frac{54}{35}$	$-\frac{144}{35}$	$-\frac{96}{35}$	.....	$-\frac{6}{35}$
$\delta_1\delta_2$	$\frac{12}{5}$	$\frac{368}{45}$	$\frac{256}{45}$	.....	$-\frac{4}{45}$
$\delta_1\delta_1\delta_1$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{64}{27}$	$-\frac{16}{9}$	.....	$-\frac{2}{27}$
δ_4	$-\frac{128}{63}$	$-\frac{640}{63}$	$-\frac{1024}{63}$	$-\frac{512}{63}$	.....
$\delta_1\delta_3$	$\frac{124}{35}$	$\frac{864}{35}$	$\frac{1504}{35}$	$\frac{768}{35}$	$-\frac{4}{35}$
$\delta_2\delta_2$	$\frac{480}{225}$	$\frac{2528}{225}$	$\frac{4096}{225}$	$\frac{2048}{225}$	.....
$\delta_1\delta_1\delta_2$	$-\frac{504}{135}$	$-\frac{3696}{135}$	$-\frac{6656}{135}$	$-\frac{3456}{135}$	$-\frac{8}{135}$
$\delta_1\delta_1\delta_1\delta_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{392}{81}$	$\frac{720}{81}$	$\frac{128}{27}$	$-\frac{2}{81}$

Oder

$$\alpha = -\frac{\frac{2}{3}\delta_1}{1-\frac{1}{3}\delta_1} - \left(\frac{4}{45}\delta_1\delta_2 + \frac{6}{35}\delta_3\right)\left(1+\frac{2}{3}\delta_1\right).$$

Es sei

$$\varphi' - \varphi = u, \quad \varphi' + \varphi = m$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) = \sin u \cos m = a_1$$

$$\frac{1}{2}(\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) = \sin 2u \cos 2m = a_2$$

$$\frac{1}{2}(\sin 6\varphi' - \sin 6\varphi) = \sin 3u \cos 3m = a_3$$

$$\frac{1}{2}(\sin 8\varphi' - \sin 8\varphi) = \sin 4u \cos 4m = a_4:$$

so ist

$$\frac{l}{a\beta_0} = \frac{\pi}{180} u + \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 + \delta_4 a_4$$

oder

$$l = tu + v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 + v_4 a_4.$$

Die Elemente t, v_1, v_2, v_3, v_4 werden aus Beobachtungen bestimmt.

Dann ist

$$Q = 90t$$

$$R = \frac{2Q}{\pi} = a\beta_0$$

$$\delta_1 R = v_1, \quad \delta_2 R = v_2, \quad \delta_3 R = v_3, \quad \delta_4 R = v_4.$$

Die einzelnen Abplattungsbrüche $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ berechnet man aus den $\delta_1 \delta_2 \ldots$ mittels des Verzeichnisses XIV.

Aeq. Halbm. $a = R - \frac{1}{3} v_1 - \frac{2}{3.5} v_2 - \frac{3}{5.7} v_3 - \frac{4}{7.9} v_4$,

Pol. Halbm. $b = R + \frac{1}{3} v_1 - \frac{2}{3.5} v_2 + \frac{3}{5.7} v_3 - \frac{4}{7.9} v_4$,

Krüm. Halb. $\mathfrak{R} =$

$R + v_1 \cos 2\varphi + 2v_2 \cos 4\varphi + 3v_3 \cos 6\varphi + 4v_4 \cos 8\varphi$,

Breitengrad $g =$

$t + \frac{\pi}{180} v_1 \cos 2\varphi + \frac{\pi}{180} 2v_2 \cos 4\varphi + \frac{\pi}{180} 3v_3 \cos 6\varphi + \frac{\pi}{180} 4v_4 \cos 8\varphi$.

In dem oben angeführten Bessel'schen Meridian ist

$v_1 = -16406{,}7117$, $v_2 = 17{,}1673$, $v_3 = -0{,}0223$, $v_4 = 0$,

$R =$	3266610,5226	3266610,5226
$\frac{1}{3} v_1$	5468,9039	— 5468,9039
$\frac{2}{15} v_2$	— 2,2890	— 2,2890
$\frac{3}{35} v_3$	0,0019	— 0,0019
	$a = 3272077{,}1394$,	$b = 3261139{,}3278$.

Um die obigen Ausdrücke zu prüfen, bezieht man sie auf die Ellipse. In derselben sei der Aequatorealhalbmesser $= 1$, der Polarhalbmesser $= b$, die Abplattung $1 - b = \alpha$, der Excentricitätswinkel $= e$, tang $e = \lambda$, so ist die Gleichung der Ellipse

$$1 = r^2(1 + \lambda^2 c^2) = b^2(1 + \lambda^2)$$

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{1 + \lambda^2}{(1 + \lambda^2 f^2)^3}$$

Wenn also

$$r = 1 - \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c^4 - \alpha_3 c^6 + \alpha_4 c^8$$

$$\mathfrak{R} = \pi_0 + \pi_1 f^2 + \pi_2 f^4 + \pi_3 f^6 + \pi_4 f^8:$$

so erhält man übereinstimmend mit IX das Verzeichniss XV.

XV.

	α_1	α_2	α_3	α_4	$\pi_0 - 1$	π_1	π_2	π_3	π_4
λ^2	$\frac{1}{2}$	....	....	....	-1	$\frac{3}{2}$	....	....	....
λ^4	..	$\frac{3}{8}$	....	....	1	-3	$\frac{15}{8}$	..	....
λ^6	....	....	$\frac{5}{16}$	....	-1	$\frac{9}{2}$	$-\frac{45}{8}$	$\frac{35}{16}$	....
λ^8	....	...	...	$\frac{35}{128}$	1	-6	$\frac{45}{4}$	$-\frac{35}{4}$	$\frac{315}{128}$

Zur weitern Prüfung von X, XI, XIII ist bei der Ellipse:

	$\beta_0 - 1$	β_1	β_2	β_3	β_4
λ^2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	.....	.....	.....
λ^4	$\frac{13}{64}$	$\frac{51}{64}$	$-\frac{15}{32}$	...	.....
λ^6	$-\frac{45}{256}$	$-\frac{211}{256}$	$\frac{365}{384}$	$-\frac{35}{96}$	.....
λ^8	$\frac{2577}{16384}$	$\frac{13807}{16384}$	$\frac{35345}{24576}$	$\frac{6755}{6144}$	$-\frac{315}{1024}$

	$\gamma_0 - 1$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
λ^2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	.....	.....	... .
λ^4	$-\frac{9}{64}$	$\frac{39}{64}$	$-\frac{15}{32}$	.....	.....
λ^6	$\frac{23}{256}$	$-\frac{133}{256}$	$\frac{320}{384}$	$-\frac{35}{96}$	.....
λ^8	$\frac{1021}{16384}$	$\frac{7491}{16384}$	$\frac{27885}{24576}$	$\frac{6195}{6144}$	$-\frac{315}{1024}$

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
λ^2	$-\frac{3}{4}$	. ..	.....	.....
λ^4	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{128}$	.....	.....
λ^6	$-\frac{111}{512}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{35}{1536}$	.....
λ^8	$\frac{141}{1024}$	$\frac{405}{4096}$	$\frac{35}{1024}$	$\frac{315}{65536}$

—

Zweiter Artikel.

Die Gradmessungen.

Wenn nach dem im ersten Artikel gefundenen Ausdruck aus den Elementen eines mittlern Meridians zu einer beobachteten Polhöhe der entsprechende Meridianbogen berechnet wird, so bedarf derselbe einer Verbesserung, um mit dem gemessenen Bogen übereinzustimmen. Die Verbesserung ist meist viel beträchtlicher als die höchstens 2 — 3 Toisen betragende Summe der Beobachtungsfehler, und steigt in den Gradmessungen von Ostindien, Frankreich, England auf 60 bis 100 Toisen. Zur Erklärung dieses Umstandes wird eine Ablenkung des Lothes durch Anziehung von Gebirgen oder durch ungleiche Dichtigkeit des Erdinnern angenommen.

Es bleibt also nichts anders übrig, als die Ablenkung aus den Gradmessungen selbst zu bestimmen, und man benutzt dazu die Ausgleichungsrechnung.

Diese ausgeglichene Ablenkung ist aber von der wahren Ablenkung gewiss verschieden. Denn z. B. in jeder Gradmessung von zwei Polhöhen sind die ausgeglichenen Ablenkungen einander gleich und entgegengesetzt, während die wahren Ablenkungen ungleich sind. In einer Gradmessung von mehrern Polhöhen erhält man ferner eine verschiedene Reihe von ausgeglichenen Ablenkungen, je nachdem man von einer verschiedenen Polhöhe ausgeht. Ein Verfahren, das eigentlich nur für zufällige Beobachtungsfehler gilt, wird hier auf Grössen angewendet, die von einer sehr bestimmten Ursache abhängig sind.

Um die ausgeglichenen Ablenkungen zu bestimmen, verfährt man gegenwärtig so, dass man die kleinste Polhöhe mit allen übrigen vergleicht. Die dieser kleinsten Polhöhe im Meridianbogen entsprechende Ablenkung sei $= x$, die den übrigen Polhöhen entsprechenden Ablenkungen der Meridianbögen seien k', k'' u. s. w. Man erhält also für n Polhöhen oder $n - 1$ Meridianbögen die Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} o = k + x \\ l' = k' + x + tu' + v_1 a_1' + v_2 a_2' \ldots \\ l'' = k'' + x + tu'' + v_1 a_1'' + v_2 a_2'' \ldots \end{cases}$$

u. s. w.

Es sei:

$$\underbrace{k' + k'' \ldots}_{} = \underbrace{k} \qquad \underbrace{l' + l'' \ldots}_{} = \underbrace{l}$$
$$\underbrace{u'k' + u''k'' \ldots}_{} = \underbrace{uk} \qquad \underbrace{u'l' + u''l' \ldots}_{} = \underbrace{ul}$$

u. s. w., so ist

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \underbrace{l} = k + \underbrace{k} + x \;\; n + t \underbrace{u} + v_1 \underbrace{a_1} \ldots \\ \underbrace{ul} = \underbrace{uk} \quad + x \;\; \underbrace{u} + t \underbrace{uu} + v_1 \underbrace{a_1 u} \ldots \\ \underbrace{a_1 l} = \underbrace{a_1 k} \quad + x \underbrace{a_1} + t \underbrace{a_1 u} + v_1 \underbrace{a_1 a_1} \ldots \end{cases}$$

Um x auszuscheiden, setzt man in jeder Gradmessung:

$$\textbf{III.}\quad \begin{cases} k + \underset{\sim}{k} = o \\ \overset{*}{l}' = l' - \frac{1}{n}\underset{\sim}{l}, \quad \overset{*}{u}' = u' - \frac{1}{n}\underset{\sim}{u}, \quad \overset{*}{a_1}' = a_1' - \frac{1}{n}\underset{\sim}{a_1} \\ \overset{*}{l}'' = l'' - \frac{1}{n}\underset{\sim}{l}, \quad \overset{*}{u}'' = u'' - \frac{1}{n}\underset{\sim}{u}, \quad \overset{*}{a_1}'' = a_1'' - \frac{1}{n}\underset{\sim}{a_1} \end{cases}$$

u. s. w., so ist

$$\textbf{IV.}\quad \begin{cases} \overset{*}{l}' = k' + t\overset{*}{u}' + v_1\overset{*}{a_1}' + v_2\overset{*}{a_2}' \ldots \\ \overset{*}{l}'' = k'' + t\overset{*}{u}'' + v_1\overset{*}{a_1}'' + v_2\overset{*}{a_2}'' \ldots \end{cases}$$

u. s. w.

$$\textbf{V.}\quad \begin{cases} \underset{\sim}{u}\overset{*}{l} = \underset{\sim}{u}k + t\,\underset{\sim}{u}\overset{*}{u} + v_1\underset{\sim}{a_1}\overset{*}{u} + v_2\underset{\sim}{a_2}\overset{*}{u} \ldots \\ \underset{\sim}{a_1}\overset{*}{l} = \underset{\sim}{a_1}k + t\,\underset{\sim}{a_1}\overset{*}{u} + v_1\underset{\sim}{a_1}\overset{*}{a_1} + v_2\underset{\sim}{a_1}\overset{*}{a_2} \ldots \\ \underset{\sim}{a_2}\overset{*}{l} = \underset{\sim}{a_2}k + t\,\underset{\sim}{a_2}\overset{*}{u} + v_1\underset{\sim}{a_1}\overset{*}{a_2} + v_2\underset{\sim}{a_2}\overset{*}{a_2} \ldots \end{cases}$$

u. s. w.

$$\textbf{VI.}\quad \begin{cases} \underset{\sim}{u}\overset{*}{l} = \underset{\sim}{u}l - \frac{1}{n}\underset{\sim}{u}\,\underset{\sim}{l}, \quad \underset{\sim}{a_1}\overset{*}{l} = \underset{\sim}{a_1}l - \frac{1}{n}\underset{\sim}{a_1}\,\underset{\sim}{l} \\ \underset{\sim}{u}\overset{*}{u} = \underset{\sim}{u}u - \frac{1}{n}\underset{\sim}{u}\,\underset{\sim}{u}, \quad \underset{\sim}{a_1}\overset{*}{u} = \overset{*}{\underset{\sim}{a_1}}u = \underset{\sim}{a_1}u - \frac{1}{n}\underset{\sim}{a_1}\,\underset{\sim}{u} \\ \underset{\sim}{a_1}\overset{*}{\underset{\sim}{a_1}} = \underset{\sim}{a_1}\underset{\sim}{a_1} - \frac{1}{n}\underset{\sim}{a_1}\underset{\sim}{a_1}, \quad \underset{\sim}{a_1}\overset{*}{a_2} = \overset{*}{\underset{\sim}{a_1}}a_2 = \underset{\sim}{a_1}a_2 - \frac{1}{n}\underset{\sim}{a_1}a_2 \end{cases}$$

Die Ausdrücke *IV.* und *VI.* gewähren den wichtigen Vortheil einer Rechnungsprüfung. In den Verzeichnissen *B* und *C* sind die Zahlen durch diese zwiefache Rechnung geprüft und sichergestellt worden.

Man berechnet die Zahlen in *V.* für jede einzelne Gradmessung. Sollen dann die dieser Gradmessung entsprechenden Meridianelemente $t, v_1, v_2 \ldots$ gefunden werden, so setzt man

$$\underset{\smile}{uk} = o \qquad \underset{\smile}{a_1 k} = o$$

u. s. w.

Um aber die Elemente des mittlern Meridians zu bestimmen, addirt man die entsprechenden Zahlen aller Gradmessungen:

$$I\,\overset{*}{\underset{\smile}{ul}} + II\,\overset{*}{\underset{\smile}{ul}} \ldots = \overset{*}{\underset{\smile}{ul}}$$

$$I\,\overset{*}{\underset{\smile}{uu}} + II\,\overset{*}{\underset{\smile}{uu}} \ldots = \overset{*}{\underset{\smile}{uu}}$$

u. s. w.

Es können nun nicht die einzelnen $\underset{\smile}{uk}$, $\underset{\smile}{a_1 k}$.. verschwinden, sondern man bestimmt die mittlern Elemente, so dass die Summen verschwinden

$$\underset{\smile\smile}{uk} = o, \qquad \underset{\smile\smile}{a_1 k} = o, \qquad \underset{\smile\smile}{a_2 k} = o$$

u. s. w.

Nachdem hienach aus *V* die Elemente des mittlern Meridians *M* gefunden worden sind, geben diese aus *IV* für jede Gradmessung die einzelnen ausgeglichenen Bogenablenkungen $k, k' k'' \ldots$ und dadurch auch die der kleinsten Polhöhe entsprechende ausgeglichene Bogenablenkung

$$k = -x = -\underset{\smile}{k}.$$

Das Verzeichniss *A* giebt die auf diese Art berechneten Ablenkungen *k* für den mittlern Meridian *M*. Zur Prüfung derselben enthält das Verzeichniss *C* die Werthe $\underset{\smile}{uk}$, $\underset{\smile}{a_1 k}$, $\underset{\smile}{a_2 k}$, aus deren Addition sich ergiebt, dass die Summen $\underset{\smile\smile}{uk}$, $\underset{\smile\smile}{a_1 k}$, $\underset{\smile\smile}{a_2 k}$ für den mittlern Meridian verschwinden.

Um die mittlere einheitliche ausgeglichene Bogenablenkung f zu erhalten, berechnet man von allen Gradmessungen die Gesammtsumme $\underset{\smile\smile}{kk}$. Die Anzahl aller Polhöhen in allen Gradmessungen zusammen sei $= m$, hier $= 42$, die Anzahl aller Gradmessungen, also die Anzahl der x sei $= \xi$, hier $= 11$, die Anzahl der Meridianelemente $t, v_1, v_2 \ldots$ sei $= \tau$, hier $= 3$, so ist

$$(m - \xi - \tau)\,ff = \underset{\smile\smile}{kk}, \quad \text{hier } 28\,ff = \underset{\smile\smile}{kk}.$$

Bessel hat in den Astron. Nachrichten No. 333 und 438 die Elemente des mittlern Meridians aus den zehn ersten Gradmessungen berechnet, dabei aber eine Ellipse vorausgesetzt Er findet:

$$t = 57013{,}109, \qquad \frac{1}{a} = 299{,}1528.$$

Nach unsern Ausdrücken ergiebt sich hieraus

$$v_1 = -16406{,}7117 \qquad v_2 = 17{,}1673$$
$$v_3 = -0{,}0223 \qquad v_4 = 0$$

In einem spätern Artikel wird bewiesen werden, dass der Meridian nur dann eine Ellipse sein kann, wenn das Innere der Erde überall gleiche Dichtigkeit hat, eine Bedingung, welche aus geologischen Gründen nicht statt findet. Da also die elliptische Voraussetzung unzulässig ist, so ist der mittlere Meridian M ohne Rücksicht auf elliptische Krümmung in den Verzeichnissen A, B, C neu berechnet worden, mit Hinzunahme der eilften Gradmessung, welche Enke im astronomischen Jahrbuch für 1852 S. 340 anzeigt.

Es sind drei Elemente t, v_1, v_2 angenommen worden. Es ergiebt sich

$$t = 57018{,}8474 \qquad \text{Gewicht} = 42\frac{1}{3}$$
$$v_1 = -16931{,}3423 \qquad \text{Gewicht} = \frac{1}{240}$$
$$v_2 = 224{,}1091 \qquad \text{Gewicht} = \frac{1}{31}.$$

Gewicht heisst hier das Umgekehrte des entsprechenden Koëfficienten in der auflösenden Gleichung. Hieraus folgt weiter:

Meridianquadrant $\ldots Q = 5131696{,}266$
Aequat. Halbmesser $a = 3272553{,}2083$
Halbe Erdaxe $\ldots\ldots b = 3261265{,}6467$
Gesammtabplattung $\alpha = 0{,}0034491606$

$$\text{Abplattungsnenner} \cdot \frac{1}{e} = 289{,}9256$$

$$\text{Ortshalbmesser} \ldots . r = 1 - 0{,}003399065\, e^2 - 0{,}000051868\, e^4 + 0{,}000001775\, e^6 - 0{,}000000002\, e^8.$$

Der mittlere Meridian M ist also keine Ellipse, da die für die Ellipse geltenden Beziehungen

$$2\alpha_2 = 3\alpha_1\alpha_1, \quad 3\alpha_3 = 5\alpha_1\alpha_2, \quad 4\alpha_4 = 7\alpha_1\alpha_3$$

u. s. w. hier nicht statt finden.

Bemerkenswerth ist hiebei die nahe Uebereinstimmung der Abplattung mit dem Verhältniss der Schwungkraft zur Schwere unter dem Aequator, $= 0{,}003467$. Nach den Pendelbeobachtungen ist diese Uebereinstimmung noch grösser, so dass der Unterschied nur drei Einheiten der 6ten Decimalstelle beträgt.

Die nächste Frage ist, ob die einzelnen Meridiane einander gleich sind, d. h. ob die Erde ein Rotationskörper ist. Wenn angenommen werden dürfte, dass die Elemente eines Meridians in seinen verschiedenen Gegenden einerlei Werth haben, so wäre es am zweckmässigsten, zwei gleiche Bögen in gleichen Abständen vom 45sten Breitengrade zu messen. Drei in verschiedenen Meridianstrichen gemessene Bogenpaare, die nicht zusammenhängend zu sein brauchen, wären zu genauerer Ermittelung dreier Meridianelemente hinlänglich. Aehnliche Messungen, in dem gegenüberliegenden Quadranten derselben Erdhälfte angestellt, müssten zeigen, ob beide Elementensysteme für die halbe Erdaxe einerlei Werth geben.

Zwei solche Quadranten wären etwa die beiden, welche unter dem 80sten und 260sten Längengrade liegen. Ihre Mitte geht durch die Kirgisensteppe und das Oregongebiet.

Unter den vorhandenen Gradmessungen findet man nur drei, welche über die Frage einigen Aufschluss geben können. Der Meridian von Ostindien mit 6 Bögen auf 16°, der von Paris mit 6 Bögen auf $12\frac{1}{2}$°, der von Dorpat mit 5 Bögen auf 8°.

	Ostindien.	Paris.	Dorpat.
t	56942,3850	57009,6494	57049,5520
Gewicht von t	$\frac{1}{2}$	120	$\frac{1}{2}$
v_1	— 11552,2253	— 22239,2392	— 11559,25
Gewicht von v_1	$\frac{1}{9158}$	$\frac{1}{7881}$	$\frac{1}{43999}$
Quadrant Q .	5124859,65	5130868,446	5134459,68
Aeq. Halbm. a	3266437,7256	3273825,3818	3272551,6360
Halbe Erdaxe b	3258736,2420	3258999,2224	3264845,4694
Abpl. Nenn. $\frac{1}{\alpha}$	424,13	220,814	424,666

Die Rechnung ist aus den entsprechenden Zahlen der Verzeichnisse *B, C* nach den Gleichungen *V* geführt.

Hier zeigt sich die Unzulänglichkeit des Satzes der Ausgleichung zur Bestimmung der wahren Ablenkungen. Denn man kann bewirken, dass alle ausgeglichenen Ablenkungen verschwinden, wenn man soviel Elemente annimmt, als gemessene Bögen vorhanden sind. Man kommt aber dann auf Elemente, welche sehr von den Elementen des mittlern Meridians abweichen, und die Unsicherheit wächst in dem Maasse, als man mehr Elemente annimmt. Bei der geringen Ausdehnung der Messungen konnten daher in den obigen drei Meridianen nur zwei Elemente angenommen werden.

Der Quadrant des pariser Meridians hat ein grosses Gewicht, also eine bedeutende Sicherheit, weil der 45ste Breitengrad in die Mitte der französischen Gradmessung fällt. Dieser Quadrant ist um 830 Toisen kürzer, als der Quadrant des mittlern Meridians *M*. Die Meridiane sind also ungleich, d. h. die Erde ist kein Rotationskörper. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass die nördlichern Gradmessungen einen grössern Quadranten geben, als die südlichern. Der Unterschied zwischen dem ostindischen und dorpater Quadranten beträgt 9600 Toisen (3800 = 1 geogr. Meile).

Da die Meridianelemente von der veränderlichen Erddichtigkeit abhängen, so haben sie in den verschiedenen Theilen

des Meridians wahrscheinlich nicht gleichen Werth. Die durch Rechnung geschlossenen Elemente entsprechen derjenigen Krümmung, welche eine über die Erdoberfläche verbreitete dünne flüssige Schicht annimmt. Diese Krümmung muss von der geometrischen Meridiankrümmung etwas verschieden sein, wenn die Erde anders als durch blossen Niederschlag aus einer ursprünglich flüssigen Masse sich gebildet hat. Es darf also nicht befremden, dass die drei Gradmessungen für die halbe Erdaxe einen verschiedenen Werth geben.

Die Hauptaufgabe, welche bei den Gradmessungen noch zu lösen bliebe, wäre die unmittelbare Bestimmung der Ablenkung aus Beobachtungen. Die Gradmessungen würden, vorausgesetzt dass diese Bestimmung möglich ist, alsdann nicht bloss ein geographisches und astronomisches, sondern auch ein geologisches Interesse darbieten. Die örtliche Ablenkung wäre gleichsam der Fühlhebel, der an die Erdfläche gelegt wird, um das dunkle Gebiet der wechselnden Dichtigkeit ihres Innern zu erforschen. (S. die Tabelle.)

—

Die folgenden Artikel sollen eine gedrängte Uebersicht derjenigen Sätze geben, durch welche die von Clairaut und Laplace aufgestellte theoretische Grundlage soweit ausgebildet wird, um an sie eine neue Berechnung der Erdgestalt anknüpfen zu können. Von der elliptischen Voraussetzung Umgang nehmend, ist das Umdrehungssphäroid nur der Bedingung unterworfen, dass es von der Kugel wenig abweiche. Es ergeben sich dadurch stark zusammenlaufende Reihen, deren allgemeines Gesetz zu Tage liegt, und die mit den Abplattungsgliedern vierter Ordnung hinreichend abschliessen.

Diese Andeutungen erklären, weshalb hiebei die Arbeiten der neuern Mathematik nicht benutzt werden konnten, die bei übrigens unläugbarem wissenschaftlichen Werth doch mehr auf dem Felde rein spekulativer Abstraktion sich bewegen.

Die hier gegebenen Sätze beruhen daher auf selbständiger Untersuchung. Dahin gehören die gegenseitigen Beziehungen zwischen dem Indicial und Subindicial, sowohl dem einfachen

	$10^{10}.\overset{*}{\underbrace{ss}}$	$10^{10}\ a_1\overset{*}{\underbrace{s}}$
1	48597971503	846588016
2	12519016959	197874920
3	1921910310884	28030044206
4	1196056273831	4685128
5	43552449987	— 185780903
6	20320272012	— 92226104
7	11727061362	— 64171755
8	11821218905	— 70629105
9	395723930355	— 2587217452
10	13156064579	— 155614188
11	66983983989	508105164
M	3742368554366	26431657927

	$\overset{*}{\underbrace{sl}}$	$a_1\overset{*}{\underbrace{l}}$
1	275715,86317	4803,03473
2	71057,40902	1123,12965
3	10911530,84822	159137,63813
4	6818664,46860	23,88770
5	248549,87031	— 1060,19344
6	116082,15570	— 526,85343
7	66953,38744	— 366 37623
8	67556,75585	— 403,63889
9	2260577,92312	— 14779,77491
10	75247,64592	— 890,05350
11	381298,08958	2892,32426
M	21293234,41694	149953,12407

das Subindicial $\overset{*}{c}_n = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_2 c^2 + \mathfrak{l}_4 c^4 \ldots + c^n$

oder $\overset{*}{c}_n = \mathfrak{l}_1 c + \mathfrak{l}_3 c^3 + \mathfrak{l}_5 c^5 \ldots + c^n$;

je nachdem n grade oder ungrade. Der Koefficient der höchsten Potenz wird $= 1$ angenommen.

Die Benennung Indicial bezieht sich darauf, dass diese Grössen von dem Zeiger (Index) n abhängen. Diese Abhängigkeit wird durch folgende Differentialgleichungen ausgesprochen:

$$\widehat{c}_n = c'^2 . \frac{\widehat{dc_n}}{dc}, \qquad \overset{*}{c}_n = c'^2 . \overset{*}{c}_n,$$

$$\frac{\widehat{dc_n}}{dc} + n(n+1)\widehat{c_n} = 0, \quad \frac{\overset{*}{d^2 c_n}}{dc^2} + (n+1)(n+2)\overset{*}{c}_n = 0.$$

Es sei das allgemeine Glied $\mathfrak{f}_x c^x$ oder $\mathfrak{l}_x c^x$, so folgt aus diesen Differentialgleichungen:

$$(n-x)(n+x+1)\mathfrak{f}_x + (x+1)(x+2)\mathfrak{f}_{x+2} = 0,$$

$$(n-x)(n+x+3)\mathfrak{l}_x + (x+1)(x+2)\mathfrak{l}_{x+2} = 0.$$

Diese Koefficienten sind in den Verzeichnissen 1. 2. angegeben.

Die Anfangskoefficienten sind:

$$\mathfrak{f}_0 = \frac{1 \cdot 3 \quad 5 \ldots (n-1)}{(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}, \quad \mathfrak{f}_1 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots n}{(n+2)(n+4)\ldots(2n-1)},$$

$$\mathfrak{l}_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{(n+3)(n+5)\ldots(2n+1)}, \quad \mathfrak{l}_1 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots n}{(n+4)(n+6)\ldots(2n+1)}.$$

Für $c = 1$ ist die Summe aller $\mathfrak{f}$ oder das einheitliche Indicial $= \underset{\smile}{\mathfrak{f}}$. die Summe aller $\mathfrak{l}$ oder das einheitliche Subindicial $= \underset{\smile}{\mathfrak{l}}$;

$$\underset{\smile}{\mathfrak{f}} = \frac{1.2.3 \ldots\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}, \quad \underset{\smile}{\mathfrak{l}} = \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1.2\ldots.(n+1)}{1.3\ldots(2n+1)}.$$

Es sei $v = -\frac{1}{2}$, dessen $n$te Binomialzahl $= \overset{n}{v}$, die $n+1$ste Binomialzahl $= \overset{n+1}{v}$, so ist

$$2^n \overset{n}{v} \underset{\frown}{1} = 1, \qquad 2^{n+1} \overset{n+1}{v} \underset{\frown}{1} = \frac{n+2}{2}.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt, wenn n und x ungrade,

$$x(2n-1)\, 1_x^{(n)} = n(n+x-1)\, 1^{\binom{n-1}{x-1}},$$

$$x(2n+1)\, 1_x^{(n)} = n(n+x+1)\, 1^{\binom{n-1}{(x-1)}}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen, wenn n grade,

$$(n+1)\widehat{c_n} + nc\overset{*}{c}_{n-1} = (2n+1)\overset{*}{c}_n,$$

$$(n+1)\widehat{c_n} - n\frac{c'^2}{c}\overset{*}{c}_{n-1} = (2n+1)\frac{\widehat{c_{n+1}}}{c}.$$

Durch Umstellung wird die Potenz c^n nach Indicialen oder Subindicialen entwickelt:

$$c^n = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_2\widehat{c_2} + \mathfrak{m}_4\widehat{c_4} \ldots + \widehat{c_n},$$

$$\text{oder } c^n = \mathfrak{m}_1\widehat{c_1} + \mathfrak{m}_3\widehat{c_3} + \mathfrak{m}_5\widehat{c_5} \ldots + \widehat{c_n},$$

$$c^n = \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{n}_2\overset{*}{c}_2 + \mathfrak{n}_4\overset{*}{c}_5 \ldots + \overset{*}{c}_n,$$

$$\text{oder } c^n = \mathfrak{n}_1\overset{*}{c}_1 + \mathfrak{n}_3\overset{*}{c}_3 + \mathfrak{n}_5\overset{*}{c}_5 \ldots + \overset{*}{c}_n.$$

Diese Koefficienten sind in den Verzeichnissen 3 4., angezeigt. Vermöge der obigen Differentialgleichungen haben die der Stelle x entsprechenden Koefficienten für zwei Potenzen c^{n-2} und c^n folgende Beziehungen:

$$(n-x)(n+x+1)\, \mathfrak{m}_x^{(n)} = (n-1)\, n\, \mathfrak{m}_x^{(n-2)},$$
$$(n-x)(n+x+3)\, \mathfrak{n}_x^{(n)} = (n-1)\, n\, \mathfrak{n}_x^{(n-2)}.$$

Für das Subindicial und das Differential des Indicials gilt folgende Gleichung:

$$n \overset{*}{c}_{n-1} = \frac{d\widehat{c_n}}{dc}.$$

Denn wenn k eine von c unabhängige Zahl ist, so folgt aus der Gleichung des Indicials:

$$\widehat{c_n} + n(n+1) \int \widehat{c_n dc} = n(n+1)k,$$

oder $c'^2 \frac{d\widehat{c_n}}{dc} + n(n+1) \int \widehat{c_n dc} = n(n+1)k,$

oder ⊙, $c'^2 \overset{*}{c}_{n-1} + (n+1) \int \widehat{c_n dc} = n(n+1)k,$

oder $\tilde{c}_{n-1} + (n+1) \int \widehat{c_n dc} = (n+1)k,$

oder $\frac{d^2 \tilde{c}_{n-1}}{dc^2} + (n+1) \frac{d\widehat{c_n}}{dc} = 0,$

oder $-n(n+1) \overset{*}{c}_{n-1} + (n+1) \frac{d\widehat{c_n}}{dc} = 0,$

was mit der Annahme übereinstimmt.

Wenn der Werth des Integrals $\int \widehat{c_n dc}$ für $c = -1$, von dem Werth für $c = 1$ abgezogen wird, so ergiebt sich das einheitliche Integral zwischen den Grenzen $c = \pm 1$. Aus der Gleichung ⊙, folgt wegen des Faktors $c'^2 = 1 - c^2$, welcher bei beiden Werthen von c verschwindet, der erste Satz:

»Das einheitliche Integral $\int \widehat{c_n dc}$ verschwindet für jeden Werth von n.«

Wenn n grade, so ist $k = 0$.
Wenn n ungrade, so ist $(n+1)k = l_0^{(n-1)}$.

Es seien m und n zwei beliebige Zeiger, so ist:

$$\frac{d(\widehat{c_m c_n})}{dc} = \widehat{c_m}\cdot\frac{d\widehat{c_n}}{dc} + \widehat{c_n}\cdot\frac{d\widehat{c_m}}{dc} = c'^2\cdot\frac{d\widehat{c_m}}{dc}\cdot\frac{d\widehat{c_n}}{dc} - m(m+1)\widehat{c_m c_n},$$

$$\frac{d(\widehat{c_n c_m})}{dc} = \widehat{c_n}\cdot\frac{d\widehat{c_m}}{dc} + \widehat{c_m}\cdot\frac{d\widehat{c_n}}{dc} = c'^2\cdot\frac{d\widehat{c_n}}{dc}\cdot\frac{d\widehat{c_m}}{dc} - n(n+1)\widehat{c_m c_n},$$

$$\frac{d(\widehat{c_m c_n})}{dc} - \frac{d(\widehat{c_n c_m})}{dc} = [n(n+1) - m(m+1)]\widehat{c_m c_n}.$$

Es sei also k eine von c unabhängige Zahl, so ist:

$$k + [n(n+1) - m(m+1)]\int\widehat{c_m c_n}dc = \widehat{c_m c_n} - \widehat{c_n c_m}$$

$$= c'^2\left[\frac{d\widehat{c_m}}{dc}\cdot\widehat{c_n} - \frac{d\widehat{c_n}}{dc}\cdot\widehat{c_m}\right] = c'^2\,[m\overset{*}{c}_{m-1}\widehat{c_n} - n\overset{*}{c}_{n-1}\widehat{c_m}].$$

Wegen des Faktors c'^2, welcher für $c = \pm 1$ verschwindet, folgt hieraus der zweite Satz:

»Das einheitliche Integral des Produkts der Indiciale $\int\widehat{c_m c_n}dc$ verschwindet für zwei beliebige aber verschiedene Zeiger m und n.«

Wenn beide Zeiger m, n, einander gleich sind, so wird die obige Gleichung identisch. Es muss also das einheitliche Integral des Quadrats der Indiciale $S_{mm} = \int\widehat{c_n c_n}dc$ besonders bestimmt werden. Aus dem zweiten Satz ergiebt sich leicht, dass es dem einheitlichen Integral $\int\widehat{c^n c_n}dc$ gleich ist.

Aber

$$c^n\widehat{c_n} = \ldots\mathfrak{k}_x c^{n+x}\ldots$$

Also

$$\int\widehat{c^n c_n}dc = \ldots\frac{\mathfrak{k}_x}{n+x+1}c^{n+x+1}\ldots$$

Hier ist $(n+x+1)$ immer ungrade. Für $c = \pm 1$ ist also $c^{n+x+1} = \pm 1$. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2}S_{nn} = \frac{\mathfrak{k}_0}{n+1} + \frac{\mathfrak{k}_2}{n+3}\ldots \text{ oder } = \frac{\mathfrak{k}_1}{n+2} + \frac{\mathfrak{k}_3}{n+4}\ldots.$$

Das einheitliche Indicial sei wie oben $= \underset{\smile}{\mathfrak{t}}$, so ergiebt sich hieraus der dritte Satz:

«Das einheitliche Integral des Quadrats eines Indicials wird durch das Quadrat des einheitlichen Indicials ausgedrückt.»

$$\frac{2n+1}{2} S_{nn} = \underset{\smile}{\mathfrak{t}} . \underset{\smile}{\mathfrak{t}}$$

oder

$$\frac{1}{2} S_{nn} = \frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n-1)} \cdot \frac{1.2.3...n}{3.5.7...(2n+1)}$$

Es seien

$$v_0 = -\frac{1}{2}, \quad v_2 = -\frac{3}{2},$$

und ihre Binominalzahlen

$$\overset{1}{v}_0, \overset{2}{v}_0, \overset{3}{v}_0 \ldots \overset{1}{v}_2, \overset{2}{v}_2, \overset{3}{v}_2 \ldots,$$

so ist

$$\frac{2n+1}{2} (2^n \overset{n}{v}_0)^2 S_{nn} = 1$$

oder

$$\frac{1}{2} (2^n \overset{n}{v}_0) (2^n \overset{n}{v}_2) S_{nn} = 1.$$

Das sphärische Indicial.

In einem sphärischen Dreieck seien c und z die Kosinus zweier Seiten, welche den Winkel m einschliessen, c' und z' die Sinus dieser Seiten, C der Kosinus der dritten Seite, u der Kosinus des Winkels m, welcher der dritten Seite gegenüber liegt.

$$C = cz + c'z'u.$$

Die hier von $m = 0$ bis $m = 2\pi$ genommenen Integrale heissen Umlaufsintegrale.

Das sphärische Indicial

$$\widehat{C}_n = \frac{1}{2\pi} \int C^n dm,$$

das sphärische Subindicial

$$\overset{\cdot\cdot}{C}_{n-1} = \frac{1}{2\pi c'z'} \int \overline{C^n u dm},$$

die Binominalzahlen von n sind $\overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n} \ldots$

$$C^n = (cz)^n + \overset{1}{n}(cz)^{n-1}(c'z')u + \overset{2}{n}(cz)^{n-2}(c'z')^2u^2 \ldots\ldots$$

$$C^n u = (cz)^n u + \overset{1}{n}(cz)^{n-1}(c'z')u^2 + \overset{2}{n}(cz)^{n-2}(c'z')^2u^3 \ldots$$

Die Binominalzahlen von $v_0 = -\frac{1}{2}$ sind $\overset{1}{v}_0, \overset{2}{v}_0, \overset{3}{v}_0 \ldots\ldots$ sämmtlich positiv genommen.

$$x \text{ ungrade} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2\pi} \int \overline{u^x dm} = 0,$$

$$x \text{ grade oder ungrade } \frac{1}{2\pi} \int \overline{u^{2x} dm} = \overset{x}{v}_0,$$

$$\overset{\cdot\cdot}{\overline{C}}_n = (cz)^n + \overset{1}{v}_0 \overset{2}{n}(cz)^{n-2}(c'z')^2 + \overset{2}{v}_0 \overset{4}{n}(cz)^{n-4}(c'z')^4 \ldots$$

$$\overset{\cdot\cdot}{C}_{n-1} = \overset{1}{v}_0 \overset{1}{n}(cz)^{n-1} + \overset{2}{v}_0 \overset{3}{n}(cz)^{n-3}(c'z')^2 + \overset{3}{v}_0 \overset{5}{n}(cz)^{n-5}(c'z')^4 \ldots$$

$$(\overset{x}{n} + 1) - \overset{x}{n} = \overset{x-1}{n},$$

also

$$\overset{\cdot\cdot}{\overline{C}}_{n+1} - \overset{\cdot\cdot}{\overline{C}}_n (cz) = \overset{\cdot\cdot}{C}_{n-1} (c'z')^2.$$

Für das sphärische Indicial und Subindicial gelten ähnliche Gleichungen, wie für das einfache:

$$\overset{\sim}{\overline{C}}_n = c'^2 \left(\frac{d\overset{\cdot\cdot}{\overline{C}}_n}{dc}\right), \quad \overset{\sim}{\overline{C}}_{n-1} = c'^2 \dot{C}_{n-1},$$

$$\left(\frac{d\overset{\sim}{\overline{C}}_n}{dc}\right) + n(n+1)\overset{\cdot\cdot}{\overline{C}}_n - (n-1)n\overset{\cdot\cdot}{\overline{C}}_{n-2} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\overset{\sim}{\overline{C}}_{n-1}}{dc^2}\right) + n(n+1)\overset{\cdot\cdot}{C}_{n-1} - (n-1)n\overset{\cdot\cdot}{C}_{n-3} = 0.$$

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft der Binomialzahlen von v_0, dass

$$3\overset{1}{v}_0 = 4\overset{2}{v}_0, \quad 5\overset{2}{v}_0 = 6\overset{3}{v}_0, \quad 7\overset{3}{v}_0 = 8\overset{4}{v}_0 \ldots$$

Aus diesen Differentialgleichungen folgt, dass das sphärische Indicial in eine Reihe von Gliedern sich entwickeln lässt, deren jedes ein Produkt zweier einfachen Indiciale von gleichem Zeiger enthält.

Eben so besteht das sphärische Subindicial aus einer Reihe von Gliedern, deren jedes ein Produkt zweier einfachen Subindiciale enthält.

$$\widehat{\widehat{C}}_n = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_2\widehat{c_2 z_2} + \mathfrak{f}_4\widehat{c_4 z_4} \ldots \text{ oder } = \mathfrak{f}_1\widehat{c_1 z_1} + \mathfrak{f}_3\widehat{c_3 z_3} \ldots$$

$$\overset{**}{C}_{n-1} = \mathfrak{d}_1\overset{*}{c}_1\overset{*}{z}_1 + \mathfrak{d}_3\overset{*}{c}_3\overset{*}{z}_3 \ldots \text{ oder } \mathfrak{d}_0 + \mathfrak{d}_2\overset{*}{c}_2\overset{*}{z}_2 + \mathfrak{d}_4\overset{*}{c}_4\overset{*}{z}_4 \ldots$$

je nachdem n grade oder ungrade ist.

In der bei $\widehat{\widehat{C}}_n$ und $\overset{**}{C}_{n-1}$ nach Potenzen von (cz) und $(c'z')$ fortschreitenden Reihe enthält jedes Glied die höchste Potenz von (cz), also auch das Produkt $\widehat{c\,z}$ oder $\overset{**}{cz}$ vom höchsten Zeiger. Also ist das letzte Glied

$$\mathfrak{f}_n = 1 + \overset{1}{v}_0\overset{2}{n} + \overset{2}{v}_0\overset{4}{n} \ldots \quad \mathfrak{d}_{n-1} = \overset{1}{v}_0\overset{1}{n} + \overset{2}{v}_0\overset{3}{n} \ldots$$

n grade $\ldots$ $\mathfrak{f}_n = \dfrac{(n+1)(n+3)\ldots(2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots n}$,

n ungrade $\ldots$ $\mathfrak{f}_n = \dfrac{(n+2)(n+4)\ldots(2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-1)}$,

n ungrade $\ldots$ $\mathfrak{d}_{n-1} = \dfrac{n(n+2)\ldots(2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-1)}$,

n grade $\ldots$ $\mathfrak{d}_{n-1} = \dfrac{(n+3)(n+5)\ldots(2n-1)}{2 \quad 4 \ldots (n-2)}$.

Für die übrigen Glieder findet man aus den obigen Gleichungen folgende Beziehung:

$$(n-x)(n+x+1)\,\mathfrak{f}_x^{(n)} = n(n-1)\,\mathfrak{f}_x^{(n-2)},$$

$$(n-x-1)(n+x+2)\,\mathfrak{d}_x^{(n-1)} = n(n-1)\,\mathfrak{d}_x^{(n-3)}.$$

Diese Koefficienten sind in den Verzeichnissen 5. 6. angezeigt.

Zwischen den Koefficienten des sphärischen Indicials und den umgestellten Koefficienten des einfachen Indicials ergiebt sich eine von n unabhängige Beziehung:

$$f_x^{(n)} = 2^x \overset{x}{v}_0 m_x^{(n)}.$$

Wenn

$$y_x = \frac{1.2.3\ldots\ x}{1.3.5\ldots(2x-1)}, \quad w_x = \frac{1\ 2\ 3\ldots\ (x+2)}{3.5.7\ldots(2x+1)},$$

so ist

$$y_x f_x^{(n)} = m_x^{(n)}, \qquad \frac{1}{n} w_x \mathfrak{d}_x^{(n-1)} = n_x^{(n)}.$$

—

Vierter Artikel.

Das geometrische Potential.

In einem gradlinigen Dreieck seien die Seiten 1, r, e, der von den Seiten 1 und r eingeschlossenen Winkel sei $= p$, $\cos p = z$, $\sin p = z'$

$$e^2 = 1 - 2rz + r^2.$$

In dem untern Falle, wo $r < 1$, ist der Theil rechts konvergirend. Es sei $\mathfrak{r} = \frac{1}{r}$, so ist

$$(e\mathfrak{r})^2 = 1 - 2\mathfrak{r}z + \mathfrak{r}^2.$$

In dem obern Falle, wo $r > 1$, also $\mathfrak{r} < 1$, ist der Theil rechts konvergirend. Es ist also nur nöthig den untern Fall zu betrachten, weil der obere Fall aus diesem abgeleitet wird, indem man $\mathfrak{r}$ statt r, und $e\mathfrak{r}$ statt e setzt.

Das geometrische aufsteigende Potential ist

$$P'' = e^{n''}, \text{ für } n'' = -1, 1, 3, 5, 7\ldots$$

Das geometrische absteigende Potential ist

$$P = \frac{(1-r^2)^{n-2}}{e^n}, \text{ für } n = 3, 5, 7, 9\ldots$$

Es sei

$$\alpha'' = -\left(\frac{dP''}{dr}\right) r^2, \quad \beta'' = -\left(\frac{dP''}{dz}\right) z'^2,$$

$$\alpha = -\left(\frac{dP}{dr}\right) r^2, \quad \beta = -\left(\frac{dP}{dz}\right) z'^2,$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left[\left(\frac{d\alpha''}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta''}{dz}\right)\right](1-r^2) - 2(n''+1)\left(\frac{dP''}{dr}\right) r^2 + n''(n''+1) P'' r^2 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)\right](1-r^2) - 2(n-3)\left(\frac{dP}{dr}\right) r^2. + (n-4)(n-3) P r^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass sowohl das aufsteigende als absteigende geometrische Potential sich in eine Reihe entwickeln lassen, welche nach Indicialen von z fortschreitet. Diese Indiciale sind mit Koefficienten behaftet, welche bloss von der Seite r abhängen, und daher Potentialseiten heissen.

Es seien

$$\frac{n''}{2} = v'' - \frac{n}{2} = v,$$

und deren Binomialzahlen

$$\overset{1''}{v}, \overset{2''}{v}, \overset{3''}{v} \ldots . \overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \overset{3}{v} \ldots :$$

so ist

$$P'' = e^{n''} = l''_0 - 2\overset{1}{v}'' l_1'' \widehat{z_1} + 2^2 \overset{2}{v}'' l_2'' \widehat{z_2} - 2^3 \overset{3}{v}'' l_3'' \widehat{z_3} \ldots .$$

$$P = \frac{(1-r^2)^{n-2}}{e^n} = l''_0 - 2\overset{1}{v} l_1 \widehat{z_1} + 2^2 \overset{2}{v} l_2 \widehat{z_2} - 2^3 \overset{3}{v} l_3 \widehat{z_3} \ldots .$$

Für $n'' = -1$ ist

$$\left(\frac{d\alpha''}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta''}{dz}\right) = 0.$$

Für $n = 3$ ist

$$\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + \left(\frac{d\beta}{d\varepsilon}\right) = 0.$$

In diesen beiden Fällen enthält die Potentialseite nur ein Glied $l''_x = l_x = r^x$.

Es sei also

$$-\frac{1}{2} = v_0, \text{ und } -\frac{3}{2}a =,$$

so ist

$$\frac{1}{e} = 1 - 2\overset{1}{v}_0 r\widehat{z_1} + 2^2\overset{2}{v}_0 r^2\widehat{z_2} - 2^3\overset{3}{v}_0 r^3\widehat{z_3}\ldots$$

$$\frac{1-r^2}{e^2} = 1 - 2\overset{1}{v}_2 r\widehat{z_1} + 2^2\overset{2}{v}_2 r^2\widehat{z_2} - 2^3\overset{3}{v}_2 r^3\widehat{z_3}\ldots$$

Wenn $n - n'' = 4$, so verwandelt sich die Seite des einen Potentials in die des andern. In diesem Falle haben beide eine gleiche Seite $l''_x = l_x$. Es ist also nur nöthig für eine der beiden Potentiale die Seite zu bestimmen. Durch die Gleichung $n - n'' = 4$ verwandelt man diese Seite in die des andern Potentials.

Aus der Differentialgleichung von P ergiebt sich eine ähnliche für die Potentialseite l_x.

Es sei

$$\widehat{l_x} = \left(\frac{dl_x}{dr}\right) r^2,$$

so ist

$$\left[x(x+1)l_x - \frac{d\widehat{l_x}}{dr}\right](1-r^2) - 2(n-3)\left(\frac{dl_x}{dr}\right)r^2 + (n-4)(n-3)l_x r^2 = 0.$$

$$l_x = r^x + \mathfrak{p}_2 r^{x+2} + \mathfrak{p}_4 r^{x+4}\ldots\mathfrak{p}_{n-3}r^{x+n-3}.$$

Zwei nächste Potentialzahlen seien $\mathfrak{p}_{\gamma-2}$ und $\mathfrak{p}_\gamma$

$2x+1 = u.$

Beim aufsteigenden Potential sei. $n'' + 3 = w + y.$

Bei absteigenden Potential sei. . $n - 1 = w + y,$

so ergiebt sich aus obiger Gleichung:

$$y(u+y)\mathfrak{p}_\gamma + w(u-w)\mathfrak{p}_{\gamma-2} = 0.$$

Diese Potentialzahlen $\mathfrak{p}$ sind im Verzeichniss 7. angezeigt.

Für $x = 0$ verhalten sich die Potentialzahlen wie die Binomialzahlen von $n-2$ oder $n''+2$. Die letzte Potentialzahl ist

$$\mathfrak{p}_{n-3} = \pm \frac{(2x-1)(2x-3)\ldots(2x+4-n)}{(2x+3)\,2x+5)\ldots(2x-2+n)}.$$

Es sei das geometrische Potential mit einem beliebigen Indicial $\widehat{z_m}$ multiplicirt, und von dem Produkt das einheitliche Integral $= F_m$ von $z = -1$ bis $z = 1$ genommen.

Die einheitlichen Integrale des Produkts zweier Indiciale von verschiedenem Zeiger verschwinden, und es bleibt bloss das einheitliche Integral S_{mm} des Indicialquadrats übrig. Also

$$F_m'' = 2^m v^m{}'' l''_m S_{mm}, \qquad F_m = 2^m v^m l_m S_{mm},$$

wo

$$v'' = \frac{n''}{2}, \qquad v = -\frac{n}{2}$$

und

$$l_m = r^m + \mathfrak{p}_2 r^{m+2} + \mathfrak{p}_4 r^{m+4} \ldots \mathfrak{p}_{n-3} r^{m+n-3}.$$

Es sei also:

$$F_m = \mathfrak{i}_0 r^m + \mathfrak{i}_2 r^{m+2} \ldots + \mathfrak{i}_{n-3} r^{m+n-3},$$

so ist

$$\mathfrak{i}_0 = 2^m v^m S_{mm},$$

$$2^m v^m = \frac{n(n+2)\ldots(2m+n-2)}{1 \cdot 2 \ldots m},$$

$$\frac{1}{2} S_{mm} = \frac{(1.2\,3.\ldots m)\quad(1.2.3.\ldots m)}{[1.3\,5\ldots(2m-1)]\,[1.3.5\ldots(2m+1)]}.$$

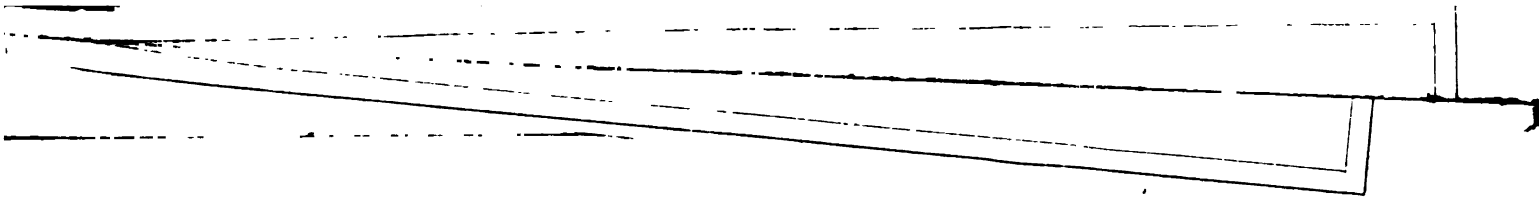
Wenn also

$$2u = n - 4,$$

so ist

$$\frac{n-2}{2} 2^m v^m \mathfrak{i}_{n-3} = 1.$$

(Aus dem *Bull. phys.-mathém. T. XII. No.* 7. 8.)



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

3 2044 092 688 183